

광탄성 실험에서 균열선단 응력장의 고차항을 고려한 응력확대계수 측정에 관한 연구

서 제 국

경동정보대학 산업시스템계열
(1999. 10. 29. 접수 / 2000. 2. 22. 채택)

A Study on the Measurement of Stress Intensity Factor Considering of High Order of Stress Field in the Vicinity of Crack Tip by Photoelastic Experiment

Jae-Guk Suh

Division of Industrial System, Kyungdong College
(Received October 29, 1999 / Accepted February 22, 2000)

Abstract : Generally, photoelastic experimental data were measured in the closed vicinity of crack tip to determine stress intensity factors of a crack with photoelastic experiment method. In this case, only the first order term has been considered in the equation of stress field. But because it is very difficult to measure the correct photoelastic data in the closed vicinity of crack, the accuracy of experimental results was very poor. By including the high order terms in the stress field equation we could obtain the accurate S.I.F. values by using clear photoelastic data in the distant region from crack tip instead of unclear photoelastic data in the vicinity of crack tip.

1. 서 론

장시간 큰 동적, 정적 힘을 받는 구조물에 대한 안전점검 시, 구조물의 설치초기와는 달리 구조물의 부재에 균열이 존재함을 본다. 이러한 경우 부재의 크기와 부재에 작용하는 하중의 경계조건을 고려하여 부재에 허용되는 균열의 크기를 결정하는 것은 구조물의 안전관리에 있어서 매우 중요하다. 허용균열의 크기는 부재의 크기와 균열선단 부근의 응력상태에 의해서 결정되며, 이와 같이 균열이 존재하는 구조물의 균열선단 부근에서의 응력상태는 응력확대계수에 의하여 지배되므로 주어진 경계조건에 응력확대계수를 구함으로써 균열선단 부근의 응력상태와 허용균열의 크기를 구할 수 있다. 응력확대계수를 구하는 방법으로는 F.E.M.이나 B.E.M과 같은 수

치해석적인 방법과 실험에 의한 방법이 있다. 실험에 의한 방법으로는 스트레인 게이지에 의한 방법, 모아래에 의한 방법, 코스틱에 의한 방법 그리고 광탄성 실험법 등이 있으며, 특히 구조물에 대한 실험적 응력해석 방법으로 구조물 전체에 대한 응력상태를 가시적으로 볼 수 있다는 장점으로 광탄성 실험법이 많이 이용된다. 광탄성 실험법에 의한 응력확대계수 결정법에는 Irwin 법¹⁾, 세 가지 파라메타를 이용하는 방법²⁾, 외사법, 근래에 와서는 컴퓨터를 이용한 최소자승법³⁾ 그리고 광탄성 시험편에 존재하는 초기응력을 고려한 광응력 법칙^{4,5)}이 제시되기도 하였다. 이와 같이 광탄성 실험을 이용한 응력해석에 있어서 보다 정도 높은 실험결과를 얻기 위한 노력이 진행되어 왔다. 최소자승법을 이용하여 응력확대계수를 구하기 위해서는 균열선단 부근에서 25~30개의 광탄성 실험 데이터를 얻을 수 있어야 한다. 그러나 균열선단에서 응력집

중으로 발생하는 소성역과 균열을 시험편에 가 공할 때 발생하는 잔류응력 등에 의하여 균열선 단에서 25~30개의 정확한 광탄성 실험 데이 터 얻기에는 어려운 경우가 허다하며, 이러한 경 우 균열선단으로부터 어느 정도 떨어진 위치, 즉 광탄성 무늬가 선명히 나타나는 곳에서 측정된 광탄성 데이터를 이용하여야 하며, 이러한 데이 터로 응력확대계수를 구하고자할 때, 여기에 적 용되는 균열선단의 응력장은 일반적으로 무시되 는 r (균열선단에서의 거리)의 고차항이 고려되 어야할 것이다. 본 연구에서는 광탄성 실험 데이 터의 측정범위와 응력장에서 r 의 고차항 차수의 관계를 규명하고자 한다.

2. 기초이론

2.1. 부재의 균열선단 부위의 응력성분

파괴역학에서 균열선단 부근의 변형은 Fig. 1 과 같은 모드I(개구형), 모드II(면내 전단형), 모 드III(면외 전단형)의 세 가지 독립된 변형방식의 합으로써 주어진다. 이들 각 모드에서 균열선단 부근의 응력성분은 방정식(1)⁶과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(r)^{\frac{n}{2}-1} \cdot f_{ij,n}(\theta) \quad (1)$$

균질재료에 Fig. 1과 같은 변형방식의 경계조

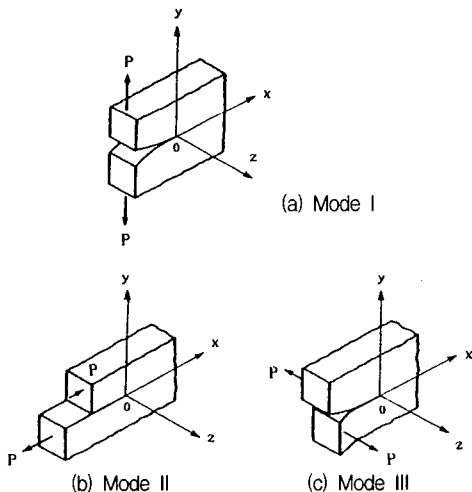


Fig. 1. Basic mode of crack surface displacement

건을 만족하는 방정식(1)의 구체적인 표현은 방 정식(2)와 같다.

개구형(모드 I)

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} \frac{n}{2} r^{\frac{n}{2}-1} \left\{ (2+(-1)^n + \frac{n}{2}) \cos(\frac{n}{2}-1)\theta - (\frac{n}{2}-1) \cos(\frac{n}{2}-3)\theta \right\} \\ \sigma_{yy} &= \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} \frac{n}{2} r^{\frac{n}{2}-1} \left\{ (2-(-1)^n - \frac{n}{2}) \cos(\frac{n}{2}-1)\theta + (\frac{n}{2}-1) \cos(\frac{n}{2}-3)\theta \right\} \\ \tau_{xy} &= \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} \frac{n}{2} r^{\frac{n}{2}-1} \left\{ -((-1)^n + \frac{n}{2}) \sin(\frac{n}{2}-1)\theta + (\frac{n}{2}-1) \sin(\frac{n}{2}-3)\theta \right\} \end{aligned} \quad (2-a)$$

면내 전단형 (모드 II)

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \frac{n}{2} r^{\frac{n}{2}-1} \left\{ (2-(-1)^n + \frac{n}{2}) \sin(\frac{n}{2}-1)\theta - (\frac{n}{2}-1) \sin(\frac{n}{2}-3)\theta \right\} \\ \sigma_{yy} &= \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \frac{n}{2} r^{\frac{n}{2}-1} \left\{ (2+(-1)^n - \frac{n}{2}) \sin(\frac{n}{2}-1)\theta + (\frac{n}{2}-1) \sin(\frac{n}{2}-3)\theta \right\} \\ \tau_{xy} &= \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \frac{n}{2} r^{\frac{n}{2}-1} \left\{ -((-1)^n - \frac{n}{2}) \cos(\frac{n}{2}-1)\theta - (\frac{n}{2}-1) \cos(\frac{n}{2}-3)\theta \right\} \end{aligned} \quad (2-b)$$

면외 전단형 (모드 III)

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} A_{3n} \frac{n}{2} r^{\frac{n}{2}-1} \sin(\frac{n}{2}-1)\theta \\ &+ \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} A_{3n} \frac{n}{2} r^{\frac{n}{2}-1} \cos(\frac{n}{2}-1)\theta \\ \tau_{yz} &= \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} A_{3n} \frac{n}{2} r^{\frac{n}{2}-1} \cos(\frac{n}{2}-1)\theta \\ &- \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} A_{3n} \frac{n}{2} r^{\frac{n}{2}-1} \sin(\frac{n}{2}-1)\theta \end{aligned} \quad (2-c)$$

r 은 균열선단으로부터의 거리이고 방정식(2) 에서 r 이 0으로 수렴할 때, 방정식(2)의 각 응력 성분에서 n 이 1인 항은 무한대로 발산하고, n 이 2인 항은 r 에 무관한 항이며, n 이 3 이상인 항에서는 0으로 수렴한다. 그러므로 균열 길이와 비교하여 충분히 작은 균열선단 부근의 영역에 있어서 각 변형 모드의 응력 성분은 다음과 같 이 표현된다.

개구형 (모드 I)

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin 3\frac{\theta}{2}) \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin 3\frac{\theta}{2}) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}\end{aligned} \quad (3-a)$$

면내 전단형 (모드 II)

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} (2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}) \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2})\end{aligned} \quad (3-b)$$

면외 전단형 (모드 III)

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \\ \tau_{yz} &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2}\end{aligned} \quad (3-c)$$

Fig. 2와 같은 모드I 과 모드II의 변형이 동시에 존재하는 혼합 모드에 있어서 각 응력성분은 방정식(4)와 같이 각각 독립된 변형방식의 합으로 표시된다.

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} \frac{n}{2} r^{\frac{n}{2}-1} \\ &\quad \left\{ (2 + (-1)^n + \frac{n}{2}) \cos(\frac{n}{2}-1)\theta - (\frac{n}{2}-1) \cos(\frac{n}{2}-3)\theta \right\} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \frac{n}{2} r^{\frac{n}{2}-1} \\ &\quad \left\{ (2 - (-1)^n + \frac{n}{2}) \sin(\frac{n}{2}-1)\theta - (\frac{n}{2}-1) \sin(\frac{n}{2}-3)\theta \right\} \\ \sigma_{yy} &= \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} \frac{n}{2} r^{\frac{n}{2}-1} \\ &\quad \left\{ (2 - (-1)^n - \frac{n}{2}) \cos(\frac{n}{2}-1)\theta + (\frac{n}{2}-1) \cos(\frac{n}{2}-3)\theta \right\} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \frac{n}{2} r^{\frac{n}{2}-1} \\ &\quad \left\{ (2 + (-1)^n - \frac{n}{2}) \sin(\frac{n}{2}-1)\theta + (\frac{n}{2}-1) \sin(\frac{n}{2}-3)\theta \right\} \\ \tau_{xy} &= \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} \frac{n}{2} r^{\frac{n}{2}-1} \\ &\quad \left\{ -((-1)^n + \frac{n}{2}) \sin(\frac{n}{2}-1)\theta + (\frac{n}{2}-1) \sin(\frac{n}{2}-3)\theta \right\} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \frac{n}{2} r^{\frac{n}{2}-1} \\ &\quad \left\{ -((-1)^n - \frac{n}{2}) \cos(\frac{n}{2}-1)\theta - (\frac{n}{2}-1) \cos(\frac{n}{2}-3)\theta \right\}\end{aligned} \quad (4)$$

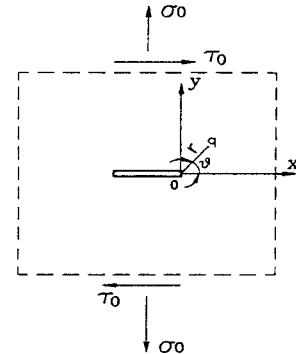


Fig. 2. Cracked plate in the mixed mode

그리고 이 경우 균질재료에서의 응력상태는 방정식(3)으로부터 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin 3\frac{\theta}{2}) \\ &\quad - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} (2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}) \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin 3\frac{\theta}{2}) \\ &\quad + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ &\quad + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2})\end{aligned} \quad (5)$$

2.2. 응력의 고차항을 고려한 광탄성 실험에서의 최소자승법 적용

부재의 응력과 광탄성 무늬차수와의 관계를 나타내는 광응력 법칙⁷⁾은 다음과 같다.

$$\frac{f \cdot N}{t} = \sigma_1 - \sigma_2 = \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (6)$$

여기서 N : 광탄성 무늬 차수, f : 응력 프린치, t : 시험편의 두께, σ_1, σ_2 : 최대 주응력, 최소 주응력을 나타낸다.

Fig. 2와 같은 혼합 모드(모드I + 모드II)의 상태에 있어서 균열선단으로부터 약간 떨어진 위치의 응력성분은 r 의 고차항이 포함된 방정식(4)로 표현된다. 이와 같이 혼합 모드 상태에 있는 균열부재의 응력확대계수에 대한 광탄성 실험에

의한 해석 시, 광탄성 실험 데이터가 균열선단에서 떨어진 위치에서 측정되었을 때, 방정식(5)와 같은 균열선단의 응력장이 아닌 방정식(4)가 적용되어야 하며, 방정식(4)와 광응력 법칙인 방정식(6)을 이용하여 최소자승법으로 응력확대계수를 결정하는 방법은 다음과 같이 전개된다.

혼합 모드인 경우 방정식(4)를 광응력 법칙인 방정식(6)에 대입하면

$$F_k(A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}, A_{21}, \dots, A_{2n}) \\ = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2 - \left(\frac{f \cdot N}{t}\right)^2 \quad (7)$$

여기서 $A_{11} = K_I / \sqrt{2\pi}$, $A_{21} = K_{II} / \sqrt{2\pi}$, $k=1, 2, 3, \dots, j$

와 같이 나타낼 수 있고, j 개의 광탄성 무늬차수와 그 좌표를 방정식(7)에 대입하고 뉴턴-랩슨(Newton-Raphson)반복법과 최소자승법을 만족하는 최소화 과정을 거치면 A_{11} , A_{12} , \dots , A_{1n} 과 A_{21} , A_{22} , \dots , A_{2n} 을 구할 수 있다. 방정식(7)에 테일러 급수(Taylor series)를 적용하고 테일러 급수의 고차항을 무시하면

$$(F_k)_{i+1} = (F_k)_i + \left(\frac{\partial F_k}{\partial A_{11}}\right)_i \cdot \Delta A_{11} + \left(\frac{\partial F_k}{\partial A_{12}}\right)_i \cdot \Delta A_{12} \\ + \dots + \left(\frac{\partial F_k}{\partial A_{1n}}\right)_i \cdot \Delta A_{1n} \\ + \left(\frac{\partial F_k}{\partial A_{21}}\right)_i \cdot \Delta A_{21} + \left(\frac{\partial F_k}{\partial A_{22}}\right)_i \cdot \Delta A_{22} \\ + \dots + \left(\frac{\partial F_k}{\partial A_{2n}}\right)_i \cdot \Delta A_{2n} \quad (8)$$

과 같이 표시된다. 여기서 i 는 반복단계를 의미하며, $(F_k)_{i+1} = 0$ 이 되므로 방정식(8)은 방정식(9)과 같이 나타낼 수 있다.

$$-(F_k)_i = \left(\frac{\partial F_k}{\partial A_{11}}\right)_i \cdot \Delta A_{11} + \left(\frac{\partial F_k}{\partial A_{12}}\right)_i \cdot \Delta A_{12} \\ + \dots + \left(\frac{\partial F_k}{\partial A_{1n}}\right)_i \cdot \Delta A_{1n} \\ + \left(\frac{\partial F_k}{\partial A_{21}}\right)_i \cdot \Delta A_{21} + \left(\frac{\partial F_k}{\partial A_{22}}\right)_i \cdot \Delta A_{22} \\ + \dots + \left(\frac{\partial F_k}{\partial A_{2n}}\right)_i \cdot \Delta A_{2n} \quad (9)$$

방정식(9)을 매트릭스 형태로 표시하면 아래 방정식과 같다.

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_j \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial A_{11}} & \frac{\partial F_1}{\partial A_{12}} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial A_{1n}} & \frac{\partial F_1}{\partial A_{21}} & \frac{\partial F_1}{\partial A_{22}} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial A_{2n}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial A_{11}} & \frac{\partial F_2}{\partial A_{12}} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial A_{1n}} & \frac{\partial F_2}{\partial A_{21}} & \frac{\partial F_2}{\partial A_{22}} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial A_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_j}{\partial A_{11}} & \frac{\partial F_j}{\partial A_{12}} & \dots & \frac{\partial F_j}{\partial A_{1n}} & \frac{\partial F_j}{\partial A_{21}} & \frac{\partial F_j}{\partial A_{22}} & \dots & \frac{\partial F_j}{\partial A_{2n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta A_{11} \\ \Delta A_{12} \\ \vdots \\ \Delta A_{1n} \\ \Delta A_{21} \\ \vdots \\ \Delta A_{2n} \end{bmatrix} \quad (10)$$

방정식(10)을 텐서로 간결하게 표시하면 아래와 같다.

$$[F] = [a] \cdot [\Delta A] \quad (11)$$

한편, 방정식(7)는 다음과 같은 과정을 따라 최소자승화할 수 있다.

$$[a]^T \cdot [F] = [a]^T \cdot [a] \cdot [\Delta A]$$

에 의하여

$$[d] = [c] \cdot [\Delta A] \quad (12)$$

를 얻는다.

여기서 $[d] = [a]^T \cdot [F]$, $[c] = [a]^T \cdot [a]$ 이 되고, 아래의 관계를 얻는다.

$$[\Delta A] = [c]^{-1} \cdot [d] \quad (13)$$

$$\begin{aligned} (A_{11})_{i+1} &= (A_{11})_i + \Delta A_{11} \\ (A_{12})_{i+1} &= (A_{12})_i + \Delta A_{12} \\ \vdots & \vdots \\ (A_{1n})_{i+1} &= (A_{1n})_i + \Delta A_{1n} \\ (A_{21})_{i+1} &= (A_{21})_i + \Delta A_{21} \\ (A_{22})_{i+1} &= (A_{22})_i + \Delta A_{22} \\ \vdots & \vdots \\ (A_{2n})_{i+1} &= (A_{2n})_i + \Delta A_{2n} \end{aligned} \quad (14)$$

즉 광탄성 무늬에서 측정된 j 개의 광탄성 무늬차수와 좌표를 방정식(7)에 대입하고 방정식(11), (12), (13)의 과정을 통하여 $\Delta A_{11}(= \Delta K_I / \sqrt{2\pi})$, $\Delta A_{12}(= \Delta \sigma_{0x})$, ..., ΔA_{1n} , $\Delta A_{21}(= \Delta K_{II} / \sqrt{2\pi})$, ΔA_{22} , ..., ΔA_{2n} 를 구하고, 이것을 방정식(14)에 대입함으로써 응력장의 계수항인 $(A_{11})_{i+1}$, $(A_{12})_{i+1}$, ...,

$(A_{1n})_{i+1}, (A_{21})_{i+1}, (A_{22})_{i+1}, \dots (A_{2n})_{i+1}$ 등을 구하여, 이것을 다시 방정식(7)에 대입하여 위의 과정을 반복함으로써 방정식(7)의 값이 최소화되는 $A_{11}(=K_I/\sqrt{2\pi})$, $A_{12}(=\sigma_{0x})$, ..., A_{1n} , $A_{21}(=K_{II}/\sqrt{2\pi})$, A_{22} , ..., A_{2n} 등을 구할 수 있다.

3. 실험

광탄성 실험 데이터가 균열선단에서 측정된 경우는 $n=1$ 만을 고려한 응력장인 방정식(5)를 방정식(7)에 대입하여 응력확대계수 K_I , K_{II} 를 최소자승법으로 구할 수 있으나, 균열선단에서의 소성역 및 가공에 의한 초기응력의 영향을 고려하면 방정식(7)에서 n 이 1인 때의 응력항으로만, 즉 $F_k(A_{11}, A_{21}) = F_k(K_I, K_{II})$ 으로 응력확대계수를 구하는 것은 오차가 수반될 소지가 크다. 따라서 정확한 데이터를 측정할 수 있는 균열선단으로부터의 거리 r 범위에 따라 적절한 n 의 범위를 결정해야 할 것이다.

이와 같이 측정된 데이터의 r 범위에 대한 응력성분의 r 고차항의 크기를 나타내는 n 의 범위를 결정하기 위하여 Fig. 3과 같이 하중직각 단직선균열 및 하중직각 중앙직선균열을 갖는 각각의 시험편에 대하여 실험을 수행하였다. 시험편의 균열은 테프론 수지를 이용하여 가능한 한 실제 균열과 근사하게 제작하였으며, 각 시험편의 두께는 4mm이며, 형상은 Fig. 3과 같다. Fig. 3에서 하중직각 단직선균열의 경우는 σ_0 가 3.68MPa, 하중직각 중앙직선균열 시험편의 경우 σ_0 가 3.92MPa일 때, 광탄성 무늬를 촬영하였으

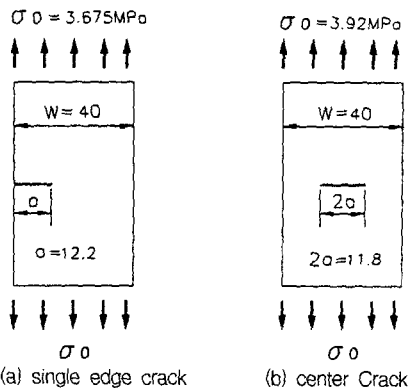


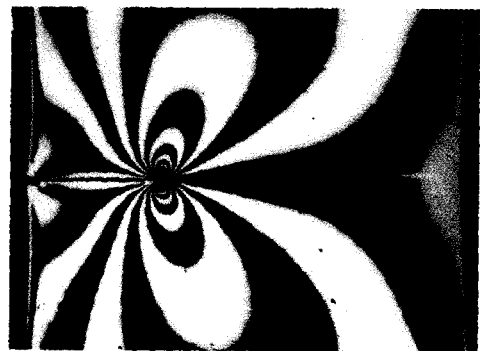
Fig. 3. Specimen of cracked plate

며, 이 촬영된 광탄성 무늬의 사진으로부터 광확대기를 이용하여 광탄성 무늬의 전 범위에 걸쳐서 무늬차수와 균열선단으로부터의 좌표를 측정하였다.

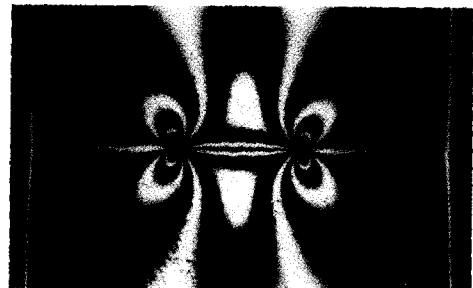
4. 실험결과 및 고찰

광탄성 실험에 있어서 기존에 제시된 최소자승법으로 균열부재의 응력확대계수를 구할 때, 광탄성 데이터의 측정범위는 r/a (a : 균열길이)이 0.15범위 이내가 적절한 것으로 알려져 있다³⁾. 이 때 응력장은 균열선단의 응력장인 방정식(5)에 σ_{0x} 를 첨가한 응력장이 사용된다. 그러나 실험조건에 따라서 r/a 이 0.15 이하인 범위에서 광탄성 실험 데이터를 측정하기 어려운 경우가 많이 있다.

Fig. 4(a)는 Fig. 3(a)와 같이 a/W 가 0.305인 하중직각 단직선균열을 갖는 시험편에 균일 분포 하중 σ_0 가 3.68MPa 이 작용할 때, 광탄성 무늬를 나타내며, Fig. 5는 광 확대기를 이용하여 Fig. 4(a)에서 측정된 광탄성 무늬차수를 균열길이 a



(a) Edge crack ($a/W=0.305$, $\sigma_0=3.68$ MPa)



(b) Center crack ($2a/W=0.925$, $\sigma_0=3.92$ MPa)

Fig. 4. Photoelastic fringe pattern for the plate with a crack

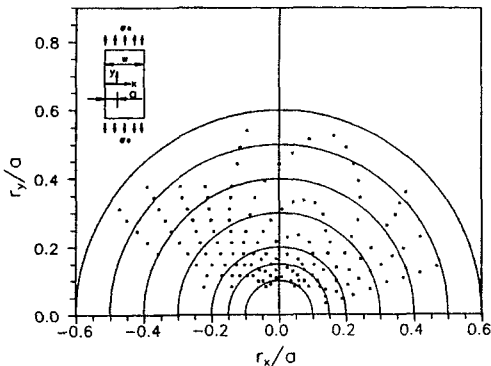


Fig. 5. Measured photoelastic data of plate with an edge crack

Table 1. Stress intensity factors with range of r/a for an edge crack (r : distance from crack tip, $a/W=0.305$, $K_0 = \sigma_0 \sqrt{\pi a}$)

r/a	1st order		2nd order		Number of data
	K_I/K_0	K_{II}/K_0	K_I/K_0	K_{II}/K_0	
0.1-0.15	1.9577	-0.0041	1.7473	-0.00411	20
0.15-0.2	1.9796	0.0006	1.7104	0.0006	20
0.1-0.2	1.9636	0.0055	1.7482	0.0056	40
0.15-0.25	1.9909	0.0449	1.7444	0.0349	28
0.25-0.5	2.0392	0.1222	1.6240	0.1222	63
0.3-0.6	2.0758	0.2964	not converge		56
Brown	1.673	0			

로 무차원화한 x - y 좌표에 도시한 것이며, 반원은 균열길이 a 로 무차원화한 균열선단으로부터의 거리 r 의 크기를 나타낸다.

Fig. 5에서 알 수 있듯이 r/a 가 0.1 이하에서는 데이터의 수가 3개뿐이며, 0.15까지는 20개로 측정 가능한 데이터의 수가 적으며, 정확한 데이터를 측정하는데도 어려움이 있다. r/a 가 0.15 넘는 범위에서는 비교적 무늬가 선명하여 정확한 데이터를 다량으로 측정할 수 있었다.

표1은 Fig. 4(a)와 같이 하중직각 단직선균열의 경우, 균열을 갖는 부재의 응력장인 방정식(4)에서 n 이 1인 경우와 n 을 2까지 고려한 경우에 광탄성 실험 데이터의 측정범위 r/a 의 변화에 따른 응력확대계수 K_I/K_0 , K_{II}/K_0 ($K_0 = \sigma_0 \sqrt{\pi a}$)를 각각 Brown의 값⁸⁾과 비교한 것이다. $n=1$ 만을 고려한 경우, 즉 균열선단에서의 응력장으로 구한 경우는 데이터 범위 r/a 가 0.1에서 0.15일 때

K_I/K_0 가 Brown의 값보다도 17% 큰 값을 나타내며, 데이터 범위가 균열선단으로부터 멀어 질수록 K_I/K_0 는 더 큰 값을 나타내며, r/a 가 0.25보다 큰 데이터에서는 K_{II}/K_0 가 상당히 큰 값을 나타낸다. 그러므로 r/a 가 0.1보다 큰 경우에는 $n=1$ 만을 고려한 응력장으로는 정확한 결과를 구할 수가 없다는 것을 알 수 있다. $n=2$ 까지 고려한 경우 r/a 가 0.25까지는 r/a 의 범위에 따라 약간의 차이를 나타내지만 거의 비슷한 값을 나타내며, 이 범위에 있어서 K_I/K_0 가 Brown의 값보다도 4%정도 큰 값으로 거의 비슷하며, K_{II}/K_0 는 0의 가까운 값을 나타낸다. r/a 가 0.25보다 큰 데이터에서는 K_{II}/K_0 가 큰 값을 나타내거나 수렴하지 못하는 경우가 있었다. 측정되는 데이터의 r/a 가 0.25 이하에서는 $n=2$ 까지만, 즉 $r^{-1/2}$, r^0 만 고려하여도 좋은 결과를 얻을 수 있음을 알았다.

표2는 표1과 동일한 경우에 $n=3$ 까지 고려했을 때와 $n=4$ 까지 고려했을 때 데이터의 측정범위에 따른 각각의 응력확대계수 값을 Brown의 값과 비교한 것이다. $n=3$ 까지 고려한 경우, 즉 $r^{-1/2}$, r^0 , $r^{1/2}$ 의 3개항을 고려한 경우는 데이터의 측정범위에 관계없이, 데이터가 측정된 전 범위 (0.1- 0.6)에서 K_I/K_0 가 Brown의 값보다 3-4% 정도 큰 값으로 비슷하게 나타났으며, K_{II}/K_0 는 거의 0에 가까운 매우 작은 값을 나타내었다. $n=4$ 까지 고려한 경우는 이론적으로는 $n=3$ 까지 고려한 경우보다도 더 좋은 결과를 도출하여야 하나, 결과가 잘 수렴하지 않았으며, 데이터의

Table 2. Stress intensity factors with range of r/a for an edge crack (r : distance from crack tip, $a/W=0.305$, $K_0 = \sigma_0 \sqrt{\pi a}$)

r/a	3rd order		4th order		Number of data
	K_I/K_0	K_{II}/K_0	K_I/K_0	K_{II}/K_0	
0.0-0.2	1.7325	-0.0754	1.6901	-0.1099	40
0.2-0.6	1.7432	-0.0431	1.7532	-0.0512	82
0.25-0.5	1.7128	-0.0351	not converge		63
0.2-0.6	1.7485	0.02	not converge		56
Brown	1.673	0			

수가 많은 경우에는 $n=3$ 까지 고려한 경우와 비슷한 결과를 나타내었다. 이 경우에는 구해야 할 계수가 8개로 보다 넓은 범위에서 측정된 많은 데이터를 요구한다.

그러므로 a/W 가 0.305인 하중직각 단직선균열을 갖는 부재의 응력확대계수를 최소자승법을 이용한 광탄성 실험으로 구할 때, 방정식(4)에서 $n=3$ 까지만 고려함으로써 r/a 가 0.6까지의 범위에서 측정된 광탄성 실험 데이터로 상당히 정확한 응력확대계수의 값을 얻을 수 있었다. 그러나 3차항까지 고려한 경우에서도 2차항까지 고려한 경우 보다 많은 광탄성 실험 데이터를 필요로 하였다.

Fig. 6은 하중직각 단직선균열을 갖는 시험편의 경우 r 의 고차항을 2차항, 3차항, 4차항까지 각각 고려했을 때, 광탄성 실험 데이터로 구한 각각의 응력확대계수 및 응력항의 계수를 방정식(4)에 대입하고 방정식(4)와 (6)을 이용하여 각각 그래픽한 광탄성 무늬와 실험에 의해 촬영된 광탄성 무늬를 비교한 것이다. Fig. 6(a)는 Fig. 3(a)의 시험편에 σ_0 가 3.68MPa이 작용할 때의 광탄성 무늬를 나타내는 Fig. 4(a)의 광탄성 무늬를 확대한 것이다. Fig. 6(b)는 $n=2$ 까지 고려하고 측정 데이터의 범위 r/a 가 0~0.2일 때 구한 K_I , K_{II} , σ_{0x} 를 방정식(4)와 방정식(6)에 대입하

여 그래픽한 광탄성 무늬이다. 이 때 K_I/K_0 는 1.748이고 K_{II}/K_0 는 0.006이다.

Fig. 6(c)는 $n=3$ 까지 고려하고 측정 데이터의 범위 r/a 가 0.2~0.6일 때 구해진 $K_I(=A_{11}\sqrt{2\pi})$, $K_{II}(=A_{21}\sqrt{2\pi})$, $\sigma_{0x}(=A_{12})$, A_{22} , A_{13} , A_{23} 를 이용하여 그래픽한 광탄성 무늬이며, 이 때 K_I/K_0 는 1.743이고 K_{II}/K_0 는 -0.043이다. Fig. 6(d)는 Fig. 6(c)와 데이터의 범위가 동일하고 $n=4$ 까지 고려한 경우에 실험에 의해서 구하여진 $K_I(=A_{11}\sqrt{2\pi})$, $K_{II}(=A_{21}\sqrt{2\pi})$, $\sigma_{0x}(=A_{12})$, A_{22} , A_{13} , A_{23} , A_{14} , A_{24} 를 이용하여 그래픽한 광탄성 무늬이며, 이때 K_I/K_0 는 1.753이고 K_{II}/K_0 는 -0.051이다. 그래픽된 이 세 가지의 경우는 응력확대계수 값은 거의 비슷한 값을 나타낸다.

Fig. 6의 (b)와 (a)를 비교하면, 균열선단과 가까운 범위에서는 거의 비슷한 형태를 나타내지만 멀리 떨어진 부분에서는 상이한 형태를 나타낸다. 즉 r/a 가 약 0.2~0.25 이후의 데이터를 측정하여 구한 경우는 정확한 결과를 얻을 수 없음을 시사한다.

Fig. 6의 (c)와 (a)를 비교하여 보면, 이 경우는 무늬 형태가 전체적으로 잘 일치한다. 그러므로 $n=3$ 까지 고려하는 경우는 데이터의 범위가 $r/a=0.6$ 까지는 어느 범위의 데이터를 사용하여도 좋은 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

Fig. 6의 (d)와 (a)를 비교하면, 균열선단과 가까운 범위에서는 거의 비슷한 형태를 나타내지만 멀리 떨어진 부분에서는 이론상으로는 Fig. 6(c)보다 더 잘 일치하여야 하나 약간 상이한 형태를 나타낸다. 이는 실험에서 구해지는 응력확대계수와 응력항의 계수의 결과가 불안정한 데 기인한 것으로 추측된다.

Fig. 4(b)는 Fig. 3(b)와 같은 $2a/W$ 가 0.295인 하중직각 중앙균열을 갖는 시험편에 σ_0 가 3.92MPa로 작용할 때의 광탄성 무늬를 나타내며, Fig. 7는 광 확대기를 이용하여 Fig. 4(b)로부터 측정된 광탄성 무늬차수를 균열길이 a 로 무차원화한 x-y좌표에 도시한 것이다. Fig. 7에서 알 수 있듯이 r/a 가 0.15 이하에서는 데이터의 수가 4개뿐이며, 0.2까지도 8개로 측정 가능한 데이터의 수가 적으며 정확한 데이터를 측정하는데도 어려움이 있다. 이러한 광탄성 무늬로부터 균열

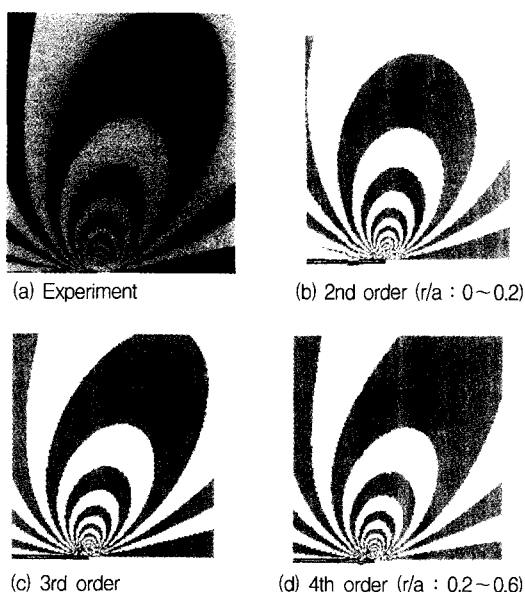


Fig. 6. Comparison of graphic fringe pattern with

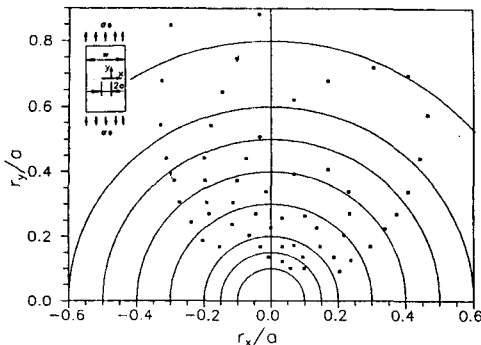


Fig. 7. Measured photoelastic data of plate with a center crack

선단에서의 응력장에 σ_{0x} 항만 고려하여 최소자승법으로 정확한 응력확대계수를 구할 수 없을 것이다.

표 3은 Fig. 4(b)와 같이 하중직각 중앙균열의 경우, 방정식(4)에서 $n=1$ 인 경우와 $n=2$ 까지 고려한 경우에 광탄성 실험 데이터의 측정범위 r/a 의 변화에 따른 응력확대계수 K_I/K_0 , K_{II}/K_0 를 각각 Feddersen의 값⁹⁾과 비교한 것이다. $n=1$ 만을 고려한 경우는 데이터 범위 r/a 가 0.1에서 0.25일 때 K_I/K_0 가 Feddersen의 값보다도 40%정도 큰 값을 나타내고, 데이터 범위가 균열선단으로부터 멀어 질수록 K_I/K_0 는 더 큰 값을 나타내며, K_{II}/K_0 는 0.27로 상당히 큰 값을 나타낸다. $n=2$ 까지 고려한 경우 r/a 가 0.25까지는 데이터의 수가 14개로 데이터의 수가 부족하여 정확한 결과를 얻을 수 없었으며, 그 이상의 범위에서는 K_{II}/K_0 가 0.13-0.15로 상당히 큰 값을 나타내었다. 그러므로 이러한 광탄성 실험 데이터로서는 응력향의 $n=2$ 까지 고려하여서는 정확한 응력확대계수를 구할 수 없을 것이다.

Table 3. Stress intensity factors with range of $r/2a$ for a center crack

(r : distance from crack tip, $2a/W=0.295$,
 $K_0 = \sigma_0 \sqrt{\pi a}$)

r/a	S.I.F	1st order		2nd order		Number of data
		K_I/K_0	K_{II}/K_0	K_I/K_0	K_{II}/K_0	
0-0.25		1.4728	0.2666	0.962	0.1311	14
0.25-0.35		1.6043	0.2861	1.0216	0.1299	13
0.2-0.45		1.6037	0.2831	1.0626	0.1457	29
Feddersen		1.5030	0			

Table 4. Stress intensity factors with range of $r/2a$ for a center crack

(r : distance from crack tip, $2a/W=0.295$,

$$K_0 = \sigma_0 \sqrt{\pi a})$$

r/a	S.I.F	3rd order		4th order		Number of data
		K_I/K_0	K_{II}/K_0	K_I/K_0	K_{II}/K_0	
0-0.2		not converge		not converge		
0.2-0.4		1.0449	0.0452	1.0093	0.0607	23
0.2-0.5		1.0699	0.0412	0.9377	0.2001	32
0.25-0.5		1.0788	-0.0047	1.1288	0.0797	17
0.3-0.5		1.0836	-0.0028	1.0798	-0.0475	26
0.3-0.5		1.0880	-0.046	not converge		18
0.4-0.6		1.1639	-0.057	not converge		17
Feddersen		1.053	0			

표 4는 표 2와 동일한 경우로 $n=3$ 까지 고려했을 때와 n 을 4까지 고려했을 때, 데이터의 측정범위에 따른 각각의 응력확대계수 값을 Feddersen의 값과 비교한 것이다. $n=3$ 을 고려한 경우, 즉 $r^{-1/2}$, r^0 , $r^{1/2}$ 의 3개항을 고려한 경우는 데이터의 측정범위가 0.5 r/a 이내에서 K_I/K_0 가 Feddersen의 값보다 2-3%정도 큰 값으로 거의 비슷하게 나타났으며, K_{II}/K_0 는 거의 0에 가까운 값을 나타내었다. 그러나 r/a 가 0.4에서 0.6 사이의 데이터에서는 K_I/K_0 가 Feddersen의 값보다 10% 정도 큰 값을 나타내었다. $n=4$ 까지 고려했을 때 r/a 가 0.25에서 0.5인 경우에는 Feddersen의 값과 거의 일치했으나, 그 외의 범위에서는 수렴하지 못하거나 불안정한 결과를 나타내었다. 그러므로 $2a/W$ 가 0.295인 하중직각 중앙균열을 갖는 부재의 응력확대계수를 최소자승법을 이용한 광탄성 실험으로 구할 때, a/W 가 0.305인 하중직각 단직선균열의 경우와 같이 방정식(4)에서 $n=3$ 까지만 고려함으로써 r/a 가 0.5까지의 범위에서 측정된 광탄성 실험 데이터로 정확한 결과를 얻을 수 있었다. Fig. 8은 하중직각 중앙균열을 갖는 시험편의 경우 응력향의 2차항, 3차항, 4차항까지 각각 고려했을 때 광탄성 실험 데이터로 구한 각각의 응력확대계수 및 응력향의 계수와 방정식(6)과 방정식(4)를 이용하여 각각 그래픽한 광탄성 무늬와 실험에 의한 광탄성 무늬를 비교한 것이다.

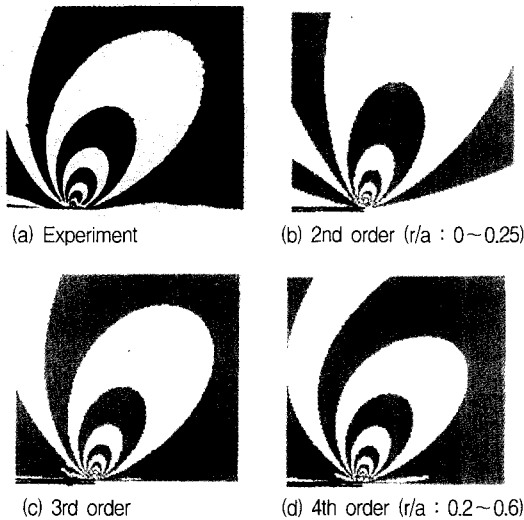


Fig. 8. Comparison of graphic fringe patterns with

Fig. 8(a)는 Fig. 3(b)의 시험편에 σ_0 가 3.92 MPa이 작용할 때의 광탄성 무늬를 나타내는 Fig. 4(b)의 광탄성 무늬를 확대한 것이다. Fig. 8(b)는 $n=2$ 까지 고려하고, 데이터의 측정범위가 $r/a=0\sim0.25$ 일 때 구해진 K_I , K_{II} , σ_{0x} 를 방정식(4)에 대입하고 방정식(4)와 방정식(6)을 이용하여 그래픽한 광탄성 무늬이다. 이 때 K_I/K_0 는 0.962이고 K_{II}/K_0 는 0.131이다. Fig. 8(c)는 $n=3$ 까지 고려하고 측정 데이터의 범위 r/a 가 0.2~0.5일 때 구하여진 $K_I(=A_{11}\sqrt{2\pi})$, $K_{II}(=A_{21}\sqrt{2\pi})$, $\sigma_{0x}(=A_{12})$, A_{22} , A_{13} , A_{23} 를 이용하여 그래픽한 광탄성 무늬이며 이 때 K_I/K_0 는 1.07이고 K_{II}/K_0 는 0.041이다. Fig. 8(d)는 데이터의 범위가 0.25~0.5 r/a 이고, $n=4$ 까지 고려한 경우 실험에 의해서 구하여진 $K_I(=A_{11}\sqrt{2\pi})$, $K_{II}(=A_{21}\sqrt{2\pi})$, $\sigma_{0x}(=A_{12})$, A_{22} , A_{13} , A_{23} , A_{14} , A_{24} 를 이용하여 그래픽한 광탄성 무늬이며, 이 때 K_I/K_0 는 1.08이고 K_{II}/K_0 는 -0.047이다.

Fig. 8(b)와 Fig. 8(a)를 비교하면 균열선단과 가까운 범위에서는 서로 비슷한 형태를 나타내지만 약간 떨어진 부분에서는 상이한 형태를 나타낸다. Fig. 8(c)와 Fig. 8(a)를 비교하여 보면 무늬 형태가 전체적으로 잘 일치하고 있다. 그러므로 $n=3$ 까지 고려한 경우는 데이터의 범위가 $r/a=0.5$ 까지는 어느 범위의 데이터를 사용하여도 좋은 결과를 얻을 수 있을 것이다. Fig. 8(d)와

Fig. 8(a)를 비교하면 균열선단과 가까운 범위에서는 거의 비슷한 형태를 나타내지만 멀리 떨어진 부분에서는 이론상으로는 Fig. 8(c)보다 더 잘 일치하여야 하나 약간 상이한 형태를 나타낸다. 이는 하중직각 단직선균열의 경우와 같이 실험에서 구해지는 응력확대계수와 응력항의 계수의 결과가 불안정한데 기인한다고 사료된다.

5. 결 론

노후 기계 구조물의 안전성 평가 시 제기되는 선형 파괴역학의 균열선단 문제에 대한 최소자승법을 이용한 광탄성 실험에 있어서 시험편의 균열선단 부근에 잔류응력이 있는 경우나 균열선단에서 광탄성 무늬가 선명하지 못한 경우는 균열선단 부근에서 광탄성 실험 데이터의 측정이 곤란하며, 이러한 경우 균열선단의 응력장에 σ_{0x} 만을 고려하여서는 정확한 응력확대계수를 구할 수 없으며, 광탄성 실험 데이터 측정범위에 대한 응력장에서 고려되어야 할 r 의 고차항의 범위는 다음과 같다.

하중직각 단직선균열의 경우

데이터의 측정범위 r/a 이 0.2까지는 응력의 고차항의 2차항까지만 고려하여도 정확한 응력확대계수를 구할 수 있으며, 응력의 고차항을 3차항까지 고려했을 때는 0.6까지의 광탄성 실험 데이터를 이용하여도 정확한 결과를 얻을 수 있었다. 그러나 4차항, 5차항까지 고려하였을 때에는 안정된 결과를 얻을 수가 없었다.

하중직각 중앙균열의 경우

응력의 고차항을 2차항까지 고려한 경우 r/a 이 0.1에서 0.25인 광탄성 실험 데이터로서는 정확한 응력확대계수를 구할 수 없었으나, 3차항까지 고려한 경우는 하중직각 단직선균열의 경우와 비슷하게 r/a 이 0.5까지의 범위에서는 정확한 응력확대계수를 구할 수 있었다.

일반적으로 균열선단부근에서 응력해석에 필요한 광탄성 실험 데이터를 충분히 측정하기에는 어려움이 많으나 r/a 이 0.5까지의 범위 내에서 많은 양의 정확한 광탄성 실험 데이터를 측정할 수 있다. 이 범위에서 측정된 광탄성 실험

데이터는 광응력 법칙에 적용되는 응력장의 고차항을 3차항까지 고려함으로써 균열선단에서의 광탄성 데이터를 이용한 것과 비슷한 정확한 응력확대계수를 구할 수 있다.

감사의 글 : 이 논문은 1998년도 경동정보대학 학술연구비의 지원을 받아 연구되었음.

참고문헌

- 1) G. R. Irwin, Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate, J. Appl. Mech., pp. 24~31, 1957.
- 2) J. M. Etheridge, and J. W. Dally, A Three Parameter Method for Determining Stress Intensity Factors from Isochromatic Fringe Loop, Journal of Stress Analysis, Vol. 13, No. 2, pp. 288~295, 1978.
- 3) R. J. Sanford, Application of the Least-squares Method to Photoelastic Analysis, Exp. Mech. pp. 192~197, 1980.
- 4) 서재국, 최선희, 황재석, 잔류응력을 고려한 광탄성실험의 광응력법칙 개발에 관한 연구 (1), 대한기계학회논문집, Vol. 19, No. 5, pp. 1190~1201, 1995.
- 5) 서재국, 최선희, 황재석, 잔류응력을 고려한 광탄성실험의 광응력법칙 개발에 관한 연구 (2), 대한기계학회논문집, Vol. 19, No. 8, pp. 1810~1821, 1995.
- 6) M. L. William, On the Stress Distribution at the Base of Station Crack, Journal of Applied Mechanics, Vol. 24, pp. 109~114, 1957.
- 7) 辻二郎, 光弾性 實驗法, 日刊工業新聞社, pp. 42~56, 1962.
- 8) W. F. Brown and J. E. Srawley, Plane Strain Crack Toughness Testing of High Strength Metallic Materials, ASME, STP 410, pp. 12~24, 1966.
- 9) Y. Murakami, Stress Intensity Factors Handbook, Vol. 1, pp. 3~9, 1986.