

## 미소 변형 및 회전 단위 벡터를 이용한 판의 대변형 해석

이기수\*

### Large Deflection Analysis of Plates By Using Small Local Deflections And Rotational Unit Vectors

kisu Lee\*

#### ABSTRACT

The large deflection of plate is analyzed by co-rotational formulations using small local displacements and rotating unit vectors on the nodal points. The rotational degrees of the freedom are represented by the unit vectors on the nodal points, and the equilibrium equations are formulated by using small deflection theories of the plates by assuming that the directions of the unit vectors of the nodal points are known apriori. The translational degrees of freedom are independently solved from the rotational degrees of freedom in the equilibrium equations, and the correct directions of the unit vectors are computed by the iterative scheme by imposing the moment equilibrium constraint. The equilibrium equations and the associated solution procedure are explained, and the verification problems are solved.

**Key Words** : Large deflection (대변형), Large rotation (대회전), Plate (판), Finite element method (유한요소법)

#### 1. 서론

각종 정밀 기계의 경량화 및 고속화와 더불어 이들 기계에 사용되는 판 (plate)은 대변형이 일어나는 경우가 많아지고 있다. 그런데 일반적으로 판의 대변형 해석은 삼차원의 비선형 회전으로 인하여 대단히 복잡하다. 원칙적으로는 연속체 역학의 대변형 이론 및 유한요소법을 이용하여 판 또는 각 (shell)의 대변형 해석이 가능하지만<sup>(1-4)</sup>, 이 경우 수식은 대단히 복잡해지며 대개의 경우 삼차원 회전으로 인한 계산상의 어려움에 봉착한다. 이러한 삼

차원의 비선형 회전으로 인한 계산상의 어려움을 해소하기 위하여, 각 유한 요소 자체는 미소 변형 이론을 이용하여 식을 만든 후 그 요소 전체가 3차원의 강체 회전 운동을 하는 co-rotational formulation 기법이 최근 도입되었다<sup>(5, 6)</sup>. 그러나 이 경우에도 대단히 복잡한 강성도 행렬이 유도되며, 또한 변위 (즉 translational degrees of freedom)를 회전 각 (즉 rotational degrees of freedom)과 동시에 연립시켜 비선형 평형 방정식을 푸는 어려움이 따른다.

본 논문에서는, 참고문헌 7에서 소개된 저자의

\* 전북대학교 기계공학과

삼차원 보 대변형 해석을 확대하여, 판의 삼차원 대변형 해석을 Co-rotational formulation에 의하여 해석하고자 한다. 단 여기에서 막 변형율(membrane strain)은 작다고 가정하였다(실제로 구조해석에서 막 변형은 처짐에 비하여 작은 경우가 대부분이다). 각 유한 요소의 평형방정식은 판의 미소 변형 이론 및 미소 막 변형율을 이용하여 유도하며, 유한 요소의 각 절점에서는 각각 세 개의 단위 벡터를 사용하여 각 절점에서의 삼차원 대규모 회전을 계산한다. 모든 절점에서 이러한 단위 벡터 방향이 주어졌다고 가정하여(즉 모든 절점에서 절점의 회전 각도가 주어졌다고 가정하여) 전체 평형방정식을 유도하며, 각 절점에서의 단위 벡터 방향은 모멘트 평형방정식을 구속조건으로 부과하여 유도한다. 본 논문에서 비선형 평형 방정식 해법으로 사용되는 반복계산법은 augmented Lagrange multiplier method 경우와 비슷한 것으로서 두 단계로 구성된다. 첫 단계에서는 기 계산된 모멘트 오차를 이용하여 각 절점 단위 벡터의 방향을 계산하는 것이며, 두 번째 단계에서는 주어진 단위 벡터들로 인하여 이루어진(즉 주어진 절점의 회전 각도들로 인하여 이루어진) 병진 좌표계의 평형방정식을 풀어 각 절점의 병진 변위 및 모멘트 오차를 계산하는 것이다. 이러한 방법에 의하여 병진 평형방정식(translational equilibrium equations)은 회전 자유도(rotational degrees of freedom)와는 독립적으로 풀리게되며, 회전 평형방정식(rotational equilibrium equations)은 모멘트 평형 구속조건에 의하여 추가로 풀리게 된다. 본 논문은 참고문헌 7을 확장한 것이므로, 여기에서는 판의 삼차원 대변형 관련 부분만을 집중적으로 기술하기로 하며, 예제 계산에 의하여 본 논문 계산 방법의 정확도 및 효율성을 점검하기로 한다.

## 2. 회전 단위 벡터 및 미소 변형

본 논문에서 제시된 해법은 유한요소법에서 사용되는 거의 모든 판 요소를 사용하여 계산 가능한 것이지만, 여기에서는 예로써 4 절점의 사각형 판 요소(매 절점에 6개의 자유도가 있음)를 사용하여 설명하기로한다. Fig. 1에서  $\widehat{\mathbf{q}}_1^*$ ,  $\widehat{\mathbf{q}}_2^*$ 와  $\widehat{\mathbf{q}}_3^*$  ( $i=1\sim 4$ )는 변형되지 않은 초기 상태의 요소에서의 단

위 벡터를 나타내고,  $\widehat{\mathbf{q}}_1^i$ ,  $\widehat{\mathbf{q}}_2^i$ ,  $\widehat{\mathbf{q}}_3^i$ 는 변형된 요소에서의 단위 벡터를 나타낸다.. 초기 상태에서  $\widehat{\mathbf{q}}_3^*$ 은 점  $i$ 에서 판에 수직이며,  $\widehat{\mathbf{q}}_1^*$ 과  $\widehat{\mathbf{q}}_2^*$ 는 점  $i$ 에서 판의 평면내에 위치한다. 그리고 초기 상태에서 각 절점의 단위 벡터는 다른 절점의 해당 단위 벡터와 평행하도록 잡는다(예로써  $\widehat{\mathbf{q}}_2^*$ ,  $\widehat{\mathbf{q}}_2^*$ ,  $\widehat{\mathbf{q}}_3^*$ 와  $\widehat{\mathbf{q}}_3^*$ 는 모두 전체 좌표계의 방향 2를 향하는 평행한 벡터이다). 변형된 요소의 절점  $i$ 에서,  $\widehat{\mathbf{q}}_3^i$ 는 판에 수직인 방향을 나타내며,  $\widehat{\mathbf{q}}_1^i$ 과  $\widehat{\mathbf{q}}_2^i$ 는 변형된 평판에서의 방향 1 및 2를 나타내고, 이러한 단위 벡터들은 다음에 사용되는 식에 의하여 판 요소의 orthogonal base vectors 계산하는데 사용된다. 물체의 전단 변형으로 인하여 단위 벡터  $\widehat{\mathbf{q}}_1^i$ ,  $\widehat{\mathbf{q}}_2^i$ 와  $\widehat{\mathbf{q}}_3^i$  ( $i=1\sim 4$ )는 완전히 물체에 부착되어 움직이지는 않지만, 현실적으로 물체의 전단 변형은 대단히 작은 경우가 대부분이므로 이들 단위 벡터)

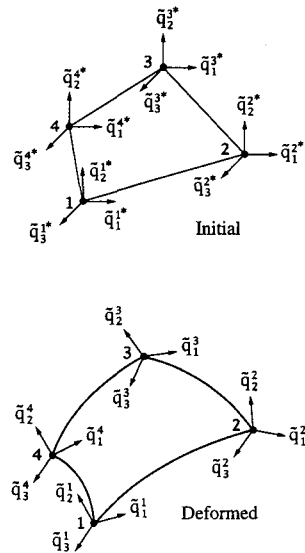


Fig. 1 Set of mutually orthogonal unit vectors on the nodal points of the initial and deformed configurations of a quadrilateral element

는 거의 물체에 부착되어 움직인다고 볼 수 있다 (만약 전단 변형이 없다면, 이들 단위 벡터들은 물체에 완전히 부착되어 움직일 것이다)

그리고 단위 벡터  $\widetilde{\mathbf{q}}_1^* \sim \widetilde{\mathbf{q}}_3^*$  와  $\widetilde{\mathbf{q}}_1 \sim \widetilde{\mathbf{q}}_3$  는 전체 좌표계 위에서 계산된다. 본 논문에서 부호  $\sim$ 는 전체 좌표계에서 계산된 요소 내부의 양을 나타내고, 다음에 설명되는 부호  $\wedge$ 는 각 요소의 지방 좌표계에서 계산되는 요소 내부의 양을 나타내며, 또한 부호  $*$ 는 초기 상태를 나타낸다. 각 절점에서의 위와같은 단위 벡터를 이용하여, 요소의 회전을 나타내는 단위 벡터  $\widetilde{\mathbf{e}}_1$ ,  $\widetilde{\mathbf{e}}_2$  와  $\widetilde{\mathbf{e}}_3$  는 일차적으로 다음과 같이 계산되며

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{e}}_1 &= \frac{1}{4} (\widetilde{\mathbf{q}}_1^1 + \widetilde{\mathbf{q}}_1^2 + \widetilde{\mathbf{q}}_1^3 + \widetilde{\mathbf{q}}_1^4) \\ \widetilde{\mathbf{e}}_2 &= \frac{1}{4} (\widetilde{\mathbf{q}}_2^1 + \widetilde{\mathbf{q}}_2^2 + \widetilde{\mathbf{q}}_2^3 + \widetilde{\mathbf{q}}_2^4) \\ \widetilde{\mathbf{e}}_3 &= \frac{1}{4} (\widetilde{\mathbf{q}}_3^1 + \widetilde{\mathbf{q}}_3^2 + \widetilde{\mathbf{q}}_3^3 + \widetilde{\mathbf{q}}_3^4) \end{aligned} \quad (1)$$

임의의 편리한 방법을 사용하여 서로 수직인 세 개의 단위 벡터로 전환된다 (예로써  $\widetilde{\mathbf{e}}_1$  과  $\widetilde{\mathbf{e}}_2$  가 만드는 평면에서  $\widetilde{\mathbf{e}}_1$  에 수직이 되도록  $\widetilde{\mathbf{e}}_2$  의 방향을 수정하고,  $\widetilde{\mathbf{e}}_3$  방향은  $\widetilde{\mathbf{e}}_1$  과  $\widetilde{\mathbf{e}}_2$  가 만드는 평면에 수직이 되도록 수정한 후,  $\widetilde{\mathbf{e}}_1$ ,  $\widetilde{\mathbf{e}}_2$  및  $\widetilde{\mathbf{e}}_3$  모두 단위 벡터의 값을 부여함).

본 논문의 수식에서는 초기 상태에서의 한 요소 내부의 단위 기초 벡터  $\widetilde{\mathbf{e}}_1^*$ ,  $\widetilde{\mathbf{e}}_2^*$ ,  $\widetilde{\mathbf{e}}_3^*$ 는 강체 회전 운동에 의하여 현재 상태에서의 요소 내부 단위 기초 벡터  $\widetilde{\mathbf{e}}_1$ ,  $\widetilde{\mathbf{e}}_2$ ,  $\widetilde{\mathbf{e}}_3$ 로 변환된다고 생각한다. (초기 상태에서의 요소 내부 단위 기초 벡터  $\widetilde{\mathbf{e}}_1^*$ ,  $\widetilde{\mathbf{e}}_2^*$ ,

$\widetilde{\mathbf{e}}_3^*$ 는 초기 상태의 기하학적 모양에서 식 (1)에 의하여 계산됨). 그러면 아무리 큰 강체 회전 운동이 요소의 변형에 포함되어 있어도, 그 요소의 변형을 단위 기초 벡터  $\widetilde{\mathbf{e}}_1$ ,  $\widetilde{\mathbf{e}}_2$ ,  $\widetilde{\mathbf{e}}_3$ 에 의하여 계산한다면, 그 요소 내부에서는 미소 변형 이론을 적용할 수 있다. 이 경우, 요소 내부의 지방 좌표  $\widetilde{\mathbf{e}}_1$ ,  $\widetilde{\mathbf{e}}_2$ ,

$\widetilde{\mathbf{e}}_3$ 에서 측정된 절점  $i$ 에서의 회전각  $\widetilde{\theta}_1$ ,  $\widetilde{\theta}_2$ ,  $\widetilde{\theta}_3$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} 2\sin \widetilde{\theta}_1 &= -[\widetilde{\mathbf{q}}_3^1]^T \widetilde{\mathbf{e}}_2 + [\widetilde{\mathbf{q}}_2^1]^T \widetilde{\mathbf{e}}_3 \\ 2\sin \widetilde{\theta}_2 &= [\widetilde{\mathbf{q}}_3^2]^T \widetilde{\mathbf{e}}_1 - [\widetilde{\mathbf{q}}_1^2]^T \widetilde{\mathbf{e}}_3 \\ 2\sin \widetilde{\theta}_3 &= -[\widetilde{\mathbf{q}}_2^3]^T \widetilde{\mathbf{e}}_1 + [\widetilde{\mathbf{q}}_1^3]^T \widetilde{\mathbf{e}}_2 \end{aligned} \quad (2)$$

그리고 한 요소 내부에서의 전체 회전각은 편의상 다음과 같이 표시한다.

$$\widetilde{\theta} = [\widetilde{\theta}_1, \widetilde{\theta}_2, \widetilde{\theta}_3, \dots, \widetilde{\theta}_1, \widetilde{\theta}_2, \widetilde{\theta}_3]^T \quad (3)$$

Fig. 1에 보인 요소에서, 절점  $i$ 의 절점 1에 대한  $\widetilde{\mathbf{e}}_j$  방향 상대 위치를  $A_j^i$ 로 표시하기로 한다. (전술한 바와 같이 부호  $*$ 는 초기 기하학적 모양에서 측정된 것임을 나타냄). 그러면 전체 좌표계에서 측정된 강체 운동으로 인하여 발생하는 네 개 절점의 변위  $\widetilde{\mathbf{u}}_r$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$\widetilde{\mathbf{u}}_r = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{u}}^1 + A_1^1(\widetilde{\mathbf{e}}_1 - \widetilde{\mathbf{e}}_1^*) + A_2^1(\widetilde{\mathbf{e}}_2 - \widetilde{\mathbf{e}}_2^*) \\ \widetilde{\mathbf{u}}^2 + A_1^2(\widetilde{\mathbf{e}}_1 - \widetilde{\mathbf{e}}_1^*) + A_2^2(\widetilde{\mathbf{e}}_2 - \widetilde{\mathbf{e}}_2^*) \\ \widetilde{\mathbf{u}}^3 + A_1^3(\widetilde{\mathbf{e}}_1 - \widetilde{\mathbf{e}}_1^*) + A_2^3(\widetilde{\mathbf{e}}_2 - \widetilde{\mathbf{e}}_2^*) \end{bmatrix} \quad (4)$$

위에서  $\widetilde{\mathbf{u}}^1$ 는 전체 좌표계에서 측정된 절점 1의 변위를 나타낸다. 그러면 전체 좌표계에서 측정된 네 절점의 미소 변위  $\widetilde{\mathbf{u}}_s$ 는 다음과 같이 표시된다.

$$\widetilde{\mathbf{u}}_s = \widetilde{\mathbf{u}} - \widetilde{\mathbf{u}}_r \quad (5)$$

위에서  $\widetilde{\mathbf{u}}$ 는 네 절점의 전체 변위이다. 다음과 같은 좌표 변환 행렬  $\widetilde{\mathbf{R}}$ 을 사용하여

$$\widetilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{e}}_1, \widetilde{\mathbf{e}}_2, \widetilde{\mathbf{e}}_3 & & & 0 \\ & \widetilde{\mathbf{e}}_1, \widetilde{\mathbf{e}}_2, \widetilde{\mathbf{e}}_3 & & \\ & & \widetilde{\mathbf{e}}_1, \widetilde{\mathbf{e}}_2, \widetilde{\mathbf{e}}_3 & \\ 0 & & & \widetilde{\mathbf{e}}_1, \widetilde{\mathbf{e}}_2, \widetilde{\mathbf{e}}_3 \end{bmatrix}^T \quad (6)$$

전체 좌표계에서 측정된 변위  $\widetilde{\mathbf{u}}$  및  $\widetilde{\mathbf{u}}_r$  를 요소 내부의 지방 좌표계에서 측정된 변위  $\widehat{\mathbf{u}}$  및  $\widehat{\mathbf{u}}_r$  로 다음과 같이 변환시킬 수 있다:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{u}} &= \widetilde{\mathbf{R}} \widetilde{\mathbf{u}} \\ \widehat{\mathbf{u}}_r &= \widetilde{\mathbf{R}} \widetilde{\mathbf{u}}_r \end{aligned} \quad (7)$$

위의 식 (2), (5) 및 (7)에 의하여 계산되는 요소 내부의 미소 변형에 의하여, 물체가 선형 탄성인 경우, 요소의 절점에 작용하는 힘  $\widehat{\mathbf{f}}$  와 모멘트  $\widehat{\mathbf{M}}$  은 유한요소법 기본 이론에 의하여 다음과 같이 계산된다:

$$\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{K}}_{uu} & \widehat{\mathbf{K}}_{u\theta} \\ \widehat{\mathbf{K}}_{\theta u} & \widehat{\mathbf{K}}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{u}} - \widehat{\mathbf{u}}_r \\ \widehat{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{f}} \\ \widehat{\mathbf{M}} \end{bmatrix} \quad (8)$$

위에서 좌변의 행렬은 판의 미소 변형 (막의 미소 변형 포함)에 의하여 유도되는 요소의 강성도 행렬이다 (단 필요한 경우 drilling rotation에 관련된 항도 추가함). 그리고 위의 힘과 모멘트 벡터는 전체 좌표계에서 측정된 힘과 모멘트 벡터  $\widetilde{\mathbf{f}}$  및  $\widetilde{\mathbf{M}}$  로 다음과 같이 변환된다:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{f}} &= \widetilde{\mathbf{R}}^T \widehat{\mathbf{f}} \\ \widetilde{\mathbf{M}} &= \widetilde{\mathbf{R}}^T \widehat{\mathbf{M}} \end{aligned} \quad (9)$$

각 절점의 회전을 나타내는 단위 벡터의 값이 주어졌다면, (7)-(9)에 의하여 얻어지는 식을 유한요소법 기본 절차에 의하여 전체 물체에서 합하여, 전체 병진 좌표계에서 다음과 같은 평형 방정

식을 쓸 수 있다.

$$\sum (\widetilde{\mathbf{R}}^T \widehat{\mathbf{K}}_{uu} \widetilde{\mathbf{R}}) \mathbf{u} = \mathbf{f} - \sum \{ \widetilde{\mathbf{R}}^T (\widehat{\mathbf{K}}_{u\theta} \widehat{\theta} - \widehat{\mathbf{K}}_{\theta u} \widehat{\mathbf{u}}_r) \} \quad (10)$$

위에서  $\mathbf{u}$  및  $\mathbf{f}$  는 전체 병진 좌표계에서의 변위 및 힘 벡터를 나타낸다. 따라서, 만약 모든 절점에서 회전을 나타내는 단위 벡터 값이 주어졌다면 전체 절점에서의 병진 변위  $\mathbf{u}$  는 식 (10)의 해에 의하여 구해진다.

### 3. 방정식 해법

#### 3.1 반복 계산법

판 전체 평형 방정식의 정확한 해를 구하기 위해서는 병진 평형 방정식 (10) 이외에도 각 절점에서 모멘트 평형 방정식이 만족되어야 한다. 이를 달성하기 위하여 다음과 같이 모멘트 구속 오차 벡터  $\mathbf{v}$  를 정의한다.

$$\mathbf{v} = \sum \{ \widetilde{\mathbf{R}}^T \widehat{\mathbf{K}}_{\theta u} (\widehat{\mathbf{u}} - \widehat{\mathbf{u}}_r) + \widetilde{\mathbf{R}}^T \widehat{\mathbf{K}}_{\theta\theta} \widehat{\theta} \} - \mathbf{M} \quad (11)$$

위에서  $\mathbf{M}$ 은 외부에서 가해지는 모멘트 벡터이며, 식 (7)-(9)로부터, 모멘트 평형 방정식은 위에서 정의한 모멘트 구속 오차 벡터  $\mathbf{v}$ 가 0이 되면 만족된다. 본 논문 해법의 요체는 오차 벡터  $\mathbf{v}$ 를 0으로 만드는 정확한 단위 벡터들을 반복 계산법에 의하여 각 절점에서 구하는 것이다. 이제  $\mathbf{q}$ 가 모든 절점에서의 단위 벡터를 나타낸다고, (m-1)번째 반복 (iteration) 까지의 계산이 완료되었다고 하자. 또한 상첨자 m-1과 m 이 해당 반복 (iteration) 횟수를 나타낸다고 하자. 즉 단위 벡터  $\mathbf{q}^{m-1}$ 과 구속 오차 벡터  $\mathbf{v}^{m-1}$  는 이미 계산되었다고 가정한다. (여기에서  $\mathbf{v}^{m-1}$ 는  $\mathbf{q}^{m-1}$ , (2) 및 (10)을 사용하여 (11)에 의하여 계산되는 구속 오차를 뜻한다.) 이제 m 번째 반복 계산을 위하여, 모든 절점의 단위 벡터를 다음의  $\delta \omega$  만큼 회전시킨다.

$$\delta \boldsymbol{\omega} = -\alpha \mathbf{A}_n \mathbf{v}^{m-1} / \|\mathbf{C}\|_\infty \quad (12)$$

위에서  $\alpha$ 는 다음에 설명되는 스칼라 양이며,  $\mathbf{A}_n$ 은 부록에서 정의된 계산 가속 행렬이고 (만약 계산 가속 기능이 필요 없으면  $\mathbf{A}_n$ 은 단위 행렬로 취급함),  $\mathbf{C}$ 는 다음에서 정의된 행렬이다.

$$\mathbf{C} = \sum (\widehat{\mathbf{R}}^T \widehat{\mathbf{K}}_{\theta\theta} \widehat{\mathbf{R}}) - \sum (\widehat{\mathbf{R}}^T \widehat{\mathbf{K}}_{\omega} \widehat{\mathbf{R}}) \left\{ \sum (\widehat{\mathbf{R}}^T \widehat{\mathbf{K}}_{uu} \widehat{\mathbf{R}}) \right\}^{-1} \sum (\widehat{\mathbf{R}}^T \widehat{\mathbf{K}}_{u\theta} \widehat{\mathbf{R}}) \quad (13)$$

위의  $\delta \boldsymbol{\omega}$ 는 미소한 3차원 회전각을 나타내므로 거의 벡터와 같은 기능을 가지며, 따라서 단위 벡터들이  $\delta \boldsymbol{\omega}$ 만큼 회전한 경우  $\delta \boldsymbol{\omega}$ 를 회전 벡터로 취급하여 근사적인 계산을 할 수 있다. 예로써, 절점 i에서 m 번째 반복 계산시의 단위 벡터는 다음과 같이 1차적으로 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} (\widetilde{\mathbf{q}}_1^i)^m &= (\widetilde{\mathbf{q}}_1^i)^{m-1} + \delta \boldsymbol{\omega}^i \times (\widetilde{\mathbf{q}}_1^i)^{m-1} \\ (\widetilde{\mathbf{q}}_2^i)^m &= (\widetilde{\mathbf{q}}_2^i)^{m-1} + \delta \boldsymbol{\omega}^i \times (\widetilde{\mathbf{q}}_2^i)^{m-1} \\ (\widetilde{\mathbf{q}}_3^i)^m &= (\widetilde{\mathbf{q}}_3^i)^{m-1} + \delta \boldsymbol{\omega}^i \times (\widetilde{\mathbf{q}}_3^i)^{m-1} \end{aligned} \quad (14)$$

위에서  $\delta \boldsymbol{\omega}^i$ 는 절점 i에서의  $\delta \boldsymbol{\omega}$ 를 뜻한다. 그리고 식 (14)에 의하여 얻어지는  $(\widetilde{\mathbf{q}}_1^i)^m$ ,  $(\widetilde{\mathbf{q}}_2^i)^m$  및  $(\widetilde{\mathbf{q}}_3^i)^m$ 를 서로 수직인 단위 벡터들로 수정하고, 각 요소 내부의 기초 단위 벡터  $(\widetilde{\mathbf{e}}_1^i)^m$ ,  $(\widetilde{\mathbf{e}}_2^i)^m$  및  $(\widetilde{\mathbf{e}}_3^i)^m$ 를 식 (1)에 의하여 계산한 후 서로 수직인 단위 벡터로 수정한다 (벡터들의 수직화는 식 (1) 뒤에 설명되어 있음). 그러면 위와 같은 수직 단위 벡터들에 의하여 식 (2)에 의하여  $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^m$ 을 계산하고, 식 (10)에 의하여  $\mathbf{u}^m$ 을 계산하며, 식 (11)에 의하여  $\mathbf{v}^m$ 을 계산할 수 있다.

위의 계산 방법은 참고문헌 7과 유사한 것이며, 따라서 참고문헌 7에 상술된 과정에 의하여, 다음

의 식을 유도할 수 있다:

$$\mathbf{v}^m \approx (\mathbf{I} - \alpha \mathbf{C}_n) \mathbf{v}^{m-1} \quad (15)$$

위에서  $\mathbf{C}_n$ 은 부록에서 정의된 행렬이다. 그러면 식 (12)의  $\alpha$ 가 특정치보다 작고 (13)에서 정의된 행렬  $\mathbf{C}$ 가 positive definite 라면 (실제 대부분의 구조물에서 전체 강성도 행렬은 positive definite 이며 따라서 행렬  $\mathbf{C}$ 는 positive definite 이다), m 번째 구속 오차  $\mathbf{v}^m$ 은 m-1 번째 구속 오차  $\mathbf{v}^{m-1}$ 보다 작게 된다. 따라서 (12)의 반복 계산법에 의하여 (11)에서 정의된 모멘트 구속 오차는 0으로 수렴하며 결국 정확한 해를 구할 수 있다.

### 3.2 전산기 계산 과정

본 논문의 반복계산법 과정은 참고문헌 7에서 상술된 방법과 유사하므로, 여기에서는 실제 계산에 필요한 부분만 간단히 설명하기로 한다. 먼저 반복 계산법 (12)에서의  $\alpha$ 에는 다음의 값을 부여하여 최대의 효율을 얻을 수 있다.

$$\alpha = \frac{2}{\omega_n + \epsilon_n} \quad (16)$$

위에서  $\omega_n$ 과  $\epsilon_n$  부록 (A.3)와 (A.4)에서 정의된 값이며 n (예로써 n=3)은 정수이다. 부록 (A.4)에서 정의된  $\overline{\epsilon}_1$ 은 반복 계산의 초기 J (예로써 J=5)회에, n과  $\alpha$ 를 각각 1과 1.9로 택한 후, 다음에 의하여 계산한다.

$$\overline{\epsilon}_1 = \min_{1 \leq m < J} \frac{1}{\alpha} \left( 1 - \frac{\|\mathbf{v}^m\|_2}{\|\mathbf{v}^{m-1}\|_2} \right) \quad (17)$$

본 논문의 주요 과정은 병진 평형 방정식 (10) 및 모멘트 구속 오차 (11)을 이용하여 병진 변위  $\mathbf{u}$  및 회전을 표시하는 단위 벡터  $\mathbf{q}$ 를 구하는 것이며, 다음과 같은 반복 계산 과정에 의하여 계산한다.

Step 1: m을 0으로 하고,  $\mathbf{q}^0$  값을 가정하며 (예로써  $\mathbf{q}^0 = \mathbf{0}$ ), 식 (17)의 J 값을 정한 후 (예로써

J=5), step 4로 간다. Setp 2: 필요한 경우 (즉  $m=1$  또는  $m=J+1$  인 경우)에는  $\mathbf{C}$ 를 계산한다. 만약  $m < J+1$  이면  $n$ 과  $a$ 를 각각 1과 1.9로 한다. 만약  $m=J+1$  이면 식 (17)에 의하여  $\overline{\varepsilon}_1$ 을 계산한다. 만약  $m \geq J+1$  이면  $a$ 를 (16)에 의하여  $\mathbf{A}_n \mathbf{v}^{m-1}$ 를 계산한다. Setp 3: 식 (12)에 의하여  $\delta \omega$ 를 계산한다. 식 (14)에 의하여  $\mathbf{q}^m$ 를 계산한 후 서로 수직인 단위 벡터로 변환한다. Setp 4: 모든 유한 요소의 내부에서 식 (1)에 의하여  $\widehat{\mathbf{e}}^m$ 를 계산한 후 서로 수직인 단위 벡터로 변환하며, 식 (2)에 의하여  $\widehat{\theta}^m$ 를 계산하고, 식 (10)을 풀어서  $\mathbf{u}^m$ 를 계산한다. Step 5: 식 (11)에 의하여  $\mathbf{v}^m$ 를 계산한다. 만약  $\|\mathbf{v}^m\|_2 < \text{Tol}$  이면 계산을 종료한다 (여기에서 Tol은 허용오차). 만약  $\|\mathbf{v}^m\|_2 < \|\mathbf{v}^{m-1}\|_2$  또는  $m=0$  이면  $m=m+1$ 로 하여 step 2로 간다. 기타의 경우에는  $a = a/2$ 로 하여 step 3로 가서  $m$  번째 반복 계산을 다시 수행한다.

#### 4. 계산 예

본 예제 계산에서는 미소 변형의 12 d.o.f. 직사각형 판 요소 (참고문헌 8 참조)와 미소 변형의 평면 응력 요소를 결합하여 요소의 강성도 행렬을 계산하였다. 또한 절점  $i$ 에서  $U_i = 0.5k(\widehat{\theta}_3^i - \Omega^i)^2$ 와 같이 주어지는 에너지를 가정하여 drilling rotation에 해당하는 강성도 행렬을 추가하였다 (여기에서  $\widehat{\theta}_3^i$ 는 식 (2)에서 정의된 각도이고,  $\Omega^i$ 는 절점  $i$ 를 지나는 두 요소 변 (element segments)의 평균 회전각, 그리고  $k$ 는 drilling rotation에 해당하는 스프링 상수로서 대단히 큰 값임).

첫 번째 예제로 균일 분포 수직 압력이 판 윗면에서 작용하는 단순 지지된 정사각형 판을 해석하기로 한다. 판의 크기는 16 x 16 inch, 두께는 0.1 inch, Young's modulus는  $30 \times 10^6$  psi, 포아송 비는 0.316 이다. 그런데 본 논문에서 요소 내부에서는 미소 변형을 가정하고 있으므로, 만약 소수의 요소를 가지고 전체 계산을 수행하는 경우 그 해의 정확도는 감소할 수 있다. 이처럼 소수의 요소를 사

용한 경우의 계산 정밀도를 점검하기 위하여, 판의 대칭 4분의 1을 16개의 요소를 사용하여 계산하여 그 결과를 Fig. 2에서 Levy(9)가 해석적으로 (즉 미분방정식을 풀어서) 계산한 결과와 비교하였다. Fig. 2에 의하여 비교적 소수의 요소를 사용한 경우에도 본 논문의 계산 방법이 상당히 정확함을 알 수 있다.

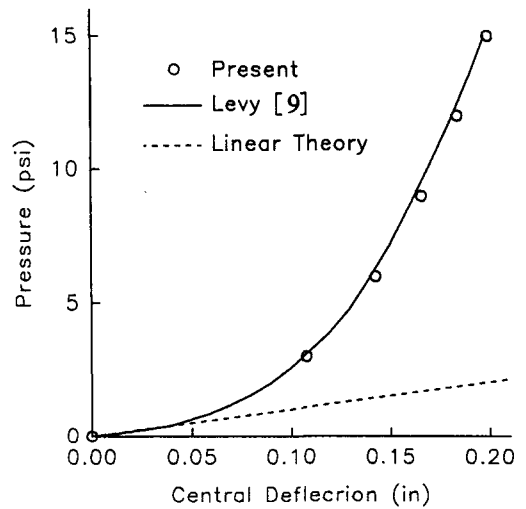


Fig. 2 Load density vs. central displacement of the square plate.

본 논문에서 제시한 방법의 효율성 및 정밀도를 점검하기 위하여, 현재 대변형 등 비선형 구조 해석을 위하여 광범위하게 사용되고 있는 Abaqus(10)의 계산 결과와 비교해 보고자 한다. Abaqus에서는 판의 대변형 해석시 각 요소 단위에서 판의 회전 및 내부의 대변형을 연립시킨 복잡한 비선형 식을 사용하여 요소 단위의 평형 방정식을 만들고, 여기에서 유도되는 전체 비선형 평형 방정식을 Newton Raphson method에 의하여 풀고 있다. 그런데 Newton Raphson method는 현재 비선형 방정식의 해법에 일반적으로 제일 효율적인 방법으로 인정되고 있지만, 반복 계산에서 첫 번째 가정치 (즉 첫 번째 반복 계산에서 사용되는 해의 근사치)가 정확한 해와 비교적 가까이 있지 않으면 Newton Raphson method는 수렴하지 못한다. Abaqus에서는

이와같은 해의 발산 현상이 발생하면 외부 하중의 크기를 점진적으로 변화시켜 가며, 즉 load increment의 크기를 줄여 외부 하중을 여러 단계에 걸쳐 증가시켜 가며, 각 단계에서 Newton Raphson method를 적용하여 비선형 방정식의 해를 구하고 있다. 따라서 외부 하중의 크기가 커서 대변형의 양이 커지면 Newton Raphson method에 의한 계산 즉 Abaqus를 비롯한 상용 프로그램의 계산에서는 외부 하중을 수많은 단계로 나누어 각 단계의 해를 구해야 하므로 전체적인 계산 시간은 증가한다. 그런데 본 논문의 계산 방법에서는 물체가 선형 탄성체인 경우 전체 평형 방정식의 병진 자유도 관련 부분인 식 (10)은 선형 방정식이 되므로 Newton Raphson method는 불필요하다. 또한 각 절점의 회전 각 (즉 각 절점에서의 단위 벡터)은 본 논문에서 제시한 반복 계산법을 이용하여 구하는데, 본 반복 계산법은 다음의 예제 계산에서 설명되는 것처럼 변형량이 큰 경우에 외부 하중을 일시에 가하여도 수렴하게 되므로 판의 대변형 해석의 경우 본 논문의 방법에 의하여 효율적인 계산이 가능하다.

위 예제의 모델을 사용하여 본 논문 방법에 의한 계산 시간 및 계산 결과를 Abaqus에 의한 결과와 비교해 보았다. 모든 계산은 Pentium II (350 MHz)에서 수행하였으며, Abaqus의 경우 4 절점 shell 요소와 full integratin을 사용하였고 모두 default option을 사용하였다. 또 본 논문의 계산에서는  $\|v\|_{\infty}$  (즉 모멘트 오차 성분의 최대치)가 각 요소 내부 모든 모멘트 성분 평균치의 0.5 % 이내로 감소할 때까지 계산을 반복 (iteration) 하였으며, 이는 Abaqus의 Newton Raphson method에 의한 계산 오차 허용치와 동일한 것이다 (따라서 Abaqus의 Newton Raphson method에 의한 비선형 평형 방정식 해의 허용 오차의 절대치는 요소 수, 두께, 외부 하중 등 변수의 크기에 따라 달라진다). 먼저 Table 1에서, 판의 상면에서 가해지는 분포하중의 크기를 변화시켜 가며, Pentium II의 계산에 소요되는 시간 및 판 중심에서의 처짐을 비교하였다 (이 경우 400 개의 사각형 요소를 사용하였으며 두께는 0.1 in 임). 다음에 Table 2에서 계산에 사용되는 유한 요소의 수를 변화시켜 가며 Pentium II의 계산에 소요되는 시간 및 판 중심에서의 처짐을 비교하였다 (이 경우 분포하중의 크기는 1500 psi로 하였으며 두께는 0.1 in 임). 마지막으로 Table 3에서는 판의

두께를 변화시켜 가며 Pentium II의 계산에 소요되는 시간 및 판 중심에서의 처짐을 비교하였다 (이 경우 분포 하중은 1500 psi, 유한 요소 수는 144 개로 하였음). Table 1에서 보인 바와 같이 본 논문 방법에 의한 계산 시간은 Abaqus에 의한 계산 시간보다 훨씬 적음을 알 수 있으며 특히 하중이 큰 경우에는 대단히 큰 차이가 있음을 알 수 있다. 이러한 현상의 주원인은 전술한 바와 같이 Abaqus에서는 Newton Raphson method의 수렴을 위하여 외부 분포하중을 일시에 가하지 못하고 (즉 외부 분포하중을 일시에 가하면 Newton Raphson method가 수렴하지 못하므로) 여러 단계를 사용하여 외부 분포하중을 점진적으로 증가시켜 가야 하지만, 본 논문 방법의 경우 외부 하중을 일시에 가하여도 항상 반복 계산법이 수렴하기 때문이다. 결국 이러한 원인으로 인하여 Table 1에서 보인 것처럼 외부에서 가해지는 하중의 크기가 클수록 본 논문의 계산은 Abaqus보다 효율적이 된다.

한편 판 중심의 변위는 본 논문의 방법에 의한 결과와 Abaqus에 의한 계산치가 거의 비슷함을 알 수 있다 (예로서 분포 하중이 1500 psi, 요소 수 400, 두께 0.1 in 인 경우 양 방법의 차이는 0.5 % 이다). Table 2에서 보인 것처럼 본 논문 방법의 해는 사용된 요소의 수에 따라 별 차이가 없으며 (즉 요소 수가 16 개인 경우와 400 개인 경우의 차이가 본 논문 방법의 경우 0.3 % 이나 Abaqus의 경우는 1.8 %임) 요소 수가 증가할수록 본 논문 방법에 의한 계산이 경제적이다. 그리고 두께를 변화시켰을 경우에도 (예로써 모멘트 불균형 허용 오차가 달라지는 경우에도) Table 3에서 보인 것처럼 본 논문 방법의 효율성 및 정확도를 입증할 수 있다.

두 번째 예제로서 Fig. 3과 같이 중앙에 집중하중 F가 작용하는 원통형 shell을 해석하기로 한다. Fig. 3의 물체 경계선에서, 경계선이 직선인 2 경계에는 단순지지 조건을 가하고, 나머지 경계는 자유단으로 하였다. 본 예제는 많은 참고문헌에서 자신이 제시한 해법의 타당성을 입증하기 위하여 계산된 것이므로 본 논문에서도 비교 계산하기로 한다 (본 물체는 곡면 shell이지만 이것은 평판 요소의 결합에 의하여 계산이 가능함). 전체 shell의 대칭 4분의 1을 16개의 판 요소로 분할한 후, 그 계산 결

Table 1 Comparison of the computing time and central deflection associated with the load density between the present method and Abaqus (number of elements: 400, thickness: 0.1 in)

| load density<br>(psi) | computing time (sec) |        | deflection at center (in) |        |
|-----------------------|----------------------|--------|---------------------------|--------|
|                       | present              | Abaqus | present                   | Abaqus |
| 15                    | 17.96                | 40.3   | 0.198                     | 0.195  |
| 300                   | 16.52                | 152.9  | 0.535                     | 0.536  |
| 1500                  | 15.97                | 264.7  | 0.917                     | 0.922  |
| 3000                  | 19.20                | 259.2  | 1.16                      | 1.17   |

Table 2 Comparison of the computing time and central deflection associated with the number of elements between the present method and Abaqus (load density: 1500 psi, thickness: 0.1 in)

| number of<br>elements | computing time (sec) |        | deflection at center (in) |        |
|-----------------------|----------------------|--------|---------------------------|--------|
|                       | present              | Abaqus | present                   | Abaqus |
| 16 (4x4)              | 3.135                | 12.70  | 0.920                     | 0.939  |
| 64 (8x8)              | 11.66                | 39.56  | 0.920                     | 0.926  |
| 144 (12x12)           | 11.84                | 90.1   | 0.918                     | 0.924  |
| 400 (20x20)           | 15.97                | 264.7  | 0.917                     | 0.922  |

Table 3 Comparison of the computing time and central deflection associated with the plate thickness between the present method and Abaqus (load density: 1500 psi, number of elements: 144)

| thickness (in) | computing time |        | deflection at center (in) |        |
|----------------|----------------|--------|---------------------------|--------|
|                | present        | Abaqus | present                   | Abaqus |
| 0.05           | 25.7           | 108.5  | 1.16                      | 1.17   |
| 0.1            | 11.84          | 90.1   | 0.918                     | 0.924  |
| 0.2            | 3.57           | 48.5   | 0.729                     | 0.730  |
| 0.3            | 4.31           | 29.85  | 0.637                     | 0.632  |



과를 Oliver and Onate(4) 및 Moita and Crisfield(6) 계산치와 Fig. 4에서 비교하였으며, Fig. 4에 의하여 본 계산 방법이 shell 해석에도 적용될 수 있음을 알 수 있다. 본 예제에서는 shell 중앙의 수직 변위를 변화시키며 계산을 수행하였으며 (즉 displacement control), 첫 번째 예제와 동일한 오차허용치를 사용하였다.

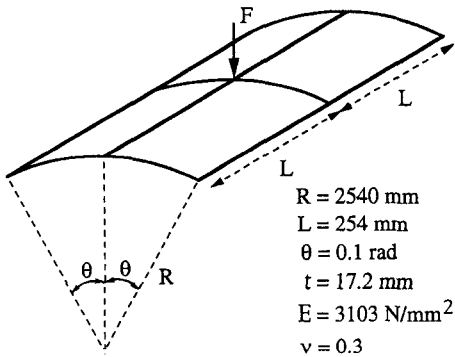


Fig. 3 Cylindrical shell under a point load

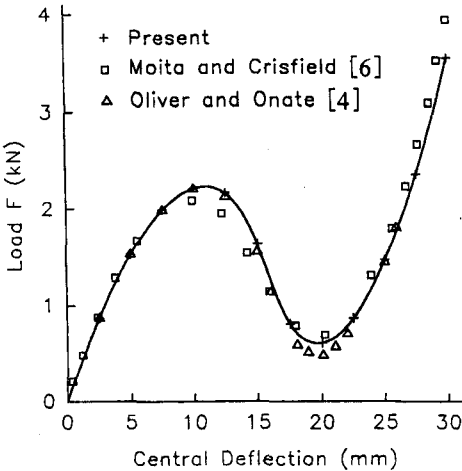


Fig. 4 Point load vs. central displacement of the cylindrical shell.

### 5. 결론

유한 요소법에서의 미소 변형 요소를 이용하여 판의 대변형 해석이 가능함을 입증하였다. 물체가 선형 탄성체인 경우 병진 자유도에 관해서는 선형 방정식이 얻어지며, 각 절점의 회전 각을 표시하는 단위 벡터는 모멘트 평형 방정식을 반복 계산법에 의하여 작용시켜 계산하였다. 본 논문에서는 이에 필요한 계산 과정을 설명하고 계산의 정확도 및 효율성을 예제 계산을 통하여 입증하였다.

본 논문에서는 병진 자유도에 관한 방정식 및 회전 자유도에 관한 방정식을 독립적으로 풀게 되므로, 기존 문헌에서 이미 잘 정리되어 있는 간단 명료한 미소 변형 이론을 효율적으로 이용할 수 있다. 따라서 이러한 각종 미소 변형 이론을 활용하여, 식 (8)의 강성도 행렬만 교환함으로써, 본 논문의 계산 방법은 각종 복합소재 판의 대변형 해석에도 바로 적용될 수 있을 것이다. 또한 본 논문에서는 삼차원 회전을 단위 벡터에 의하여 간단히 표시하는 방법을 제시했으므로, 이를 이용하여 판의 대규모 강체 회전이 포함된 동역학 해석에도 쉽게 활용할 수 있을 것이며 이러한 분야에 대한 추가 연구가 요망된다.

### 참고문헌

1. Parisch, H., "Continuum based shell theory for non-linear applications," *Int. J. Numer. Methods. Engrg.* Vol. 38, pp. 1855-1883, 1995.
2. Sansour, C. and Bufler, H., "An exact finite rotation shell theory, its mixed variational formulation and its finite element implementation," *Int. J. Numer. Methods. Engrg.* Vol. 34, pp. 73-115, 1992.
3. Buechter, N. and Ramm, E., "Shell theory versus degeneration-A comparison in large rotation shell theory," *Int. J. Numer. Methods. Engrg.* Vol. 34, pp. 39-59, 1992.
4. Oliver, J. and Onate, E., "A Total Lagrangian formulation for the geometrically nonlinear analysis of structures using finite elements. Part 1. Two dimensional problems: shell and plate structures," *Int. J. Numer. Methods. Engrg.* Vol. 20, pp.

- 2253-2281, 1984.
5. Peng, X. and Crisfield, M.A., "A consistent co-rotational formulation for shells using the constant stress/constant moment triangle," Int. J. Numer. Methods. Engrg. Vol. 35, pp. 1829-1847, 1992.
  6. Moita, G.F. and Crisfield, M.A., "A finite element formulation for 3-D continua using the co-rotational technique," Int. J. Numer. Methods. Engrg. Vol. 39, pp. 3775-3792, 1996.
  7. Lee, K., "Analysis of large displacements and large rotations of three-dimensional beams by using small strains and unit vectors," Commun. Numer. Methods. Engrg. Vol. 13, pp. 987-997, 1997.
  8. Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., "The Finite Element Method," Vol. 2, Mc-Graw Hill, New York, 1991.
  9. Levy, S., "Bending of rectangular plates with large deflections," NACA Technical Note, No. 846, 1942.
  10. ABQUS, Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc., Pawtucket, RI, Version 5.8, 1998.
  11. Lee, K., "An Accelerated iterative method for contact analysis," Int. J. Numer. Methods. Engrg. Vol. 28, pp. 279-293, 1989.

## 부 록

본 논문에서는 참고문헌 7과 11에서 설명된 계산 가속 기법을 적용하였으며, 본 계산에 직접 활용되는 행렬을 다음에 설명한다 (자세한 설명은 참고문헌 11 활용 요망). 식 (13)에서 정의된 행렬 C로부터 다음의 행렬  $C_n$  이 정의된다.

$$C_n = C / \|C\|_\infty \quad \text{if } n=1$$

$$= C_{n-1} (b_n I - C_{n-1}) \quad \text{if } n \geq 2 \quad (\text{A.1})$$

위에서

$$b_n = \epsilon_{n-1} + \omega_{n-1} \quad (n \geq 2) \quad (\text{A.2})$$

$$\omega_n = 1 \quad \text{if } n=1$$

$$= (b_n)^2 / 4 \quad \text{if } n \geq 2 \quad (\text{A.3})$$

$$\epsilon_n = \overline{\epsilon}_1 \quad \text{if } n=1$$

$$= \epsilon_{n-1} \omega_{n-1} \quad \text{if } n \geq 2 \quad (\text{A.4})$$

위에서  $n$  정수이고  $\overline{\epsilon}_1$  행렬  $C_1$  의 양의 최소 고유치이다. 그리고 행렬  $A_n$  을 다음과 같이 정의한다:

$$A_n = I \quad \text{if } n=1$$

$$= (b_n I - C_{n-1}) A_{n-1} \quad \text{if } n \geq 2 \quad (\text{A.5})$$