

# 구형 인볼루트 베벨기어에 대한 실험적 연구

정동현\*, 이형우\*\*, 박노길\*\*\*

## The Experimental Investigation of the Spherical Involute Bevel Gear

Dong Hyun Chung\*, Hyoung Woo Lee\*\*, No Gill Park\*\*\*

### ABSTRACT

For exact spherical involute bevel gear, several researchers had developed the mathematical models. The solid models of straight bevel gears are obtained and inspected to avoid interference by computer graphics. Furthermore, A gearbox is assembled by spherical involute bevel gears, which are manufactured by CNC machine. The transmission errors in the tooth mesh are measured by Laser sensor, are compared with the AGMA standard. This gearbox is found to be ranked AGMA Q10(JIS 3)

**Key Words** : Spherical involute (구형인볼루트), Bevel gear (베벨기어), Transmission error (치합전달오차), Experimental result(실험결과). Gear manufacturing(기어제작)

### 기호설명

$\theta^{(1)}, \theta^{(2)}$  = input and output shaft angle  
 $\Delta\theta^{(2)}(\theta^{(1)})$  = transmission error with respect  
of input shaft angle  
 $\theta_a$  = addendum cone angle  
 $\theta_p$  = pitch cone angle  
 $\theta_g$  = basic cone angle  
 $\theta_d$  = dedendum cone angle  
 $\chi_a$  = addendum angle in the disk of action  
 $\chi_c$  = contact region angle in the disk of action  
 $\alpha$  = pressure angle

### 1. 서론

베벨기어는 산업의 여러 분야에서 폭 넓게 사용되고 있는 반면, 제작은 Gleason사에서 주로 만든 기어 제작용 전용기에 의해 이루어진다. 이 전용기에서 기어가 만들어지는 방법은 가정된 창성기어(generating gear)에 해당되는 회전공구(circular-cut)가 회전하므로써 상대측, 즉, 공작소재에 생기는 포락면(envelopment)으로 기어치가 생성되도록 하는 것이다. 따라서 스피어나, 헬리칼 기어처럼 호환성이 없어서, 같은 전용기로 창성된 기어와 피니언을 한 쌍으로 묶어서 사용한다. 그리고 치형도 일반적으로 인볼루트가 아니고, 그와 유사한 옥토이드

\* 연암공업대학 기계설계과  
\*\* 부산대학교 기계기술연구소  
\*\*\* 부산대학교 기계공학부, 기계기술연구소

(octoid)이다.<sup>(1)</sup>

베벨기어에 대한 연구는 생산성이라는 관점때문에 그리스사에서 제안한 기어치 형상에 대해 주로 이루어지고 있다.<sup>(2-9)</sup> 그리스사의 베벨기어 제작용 전용기로 창성한 경우에는, 엄밀한 의미에서는, 기어가 공액(Conjugate)치면으로 만들어지지 않는다. 공액치면이 아니라는 것은 기어치가 맞물려 돌아가고 있는 동안에 회전비가 일정하게 유지되지 않는다는 것을 의미한다.<sup>(9)</sup> 그러므로 구동기어와 피동기어가 서로 회전하는데 기구학적인 오차가 있음을 알 수 있다. 그래서 F. L. Litvin과 그의 동료들은 가공기 구조를 개선한다든지<sup>(9)</sup> 또는 절삭 공구를 컴퓨터로 제어하도록 한다든지 하여<sup>(10)</sup>, 기구적인 오차를 최소화하는 방법을 연구했다.

컴퓨터의 발전으로 산업의 모든 분야가 디지털화되는 것처럼 기어의 형상에 대해서도 디지털화될 필요가 있다. Z. H. Fong와 C. B. Tsay는 베벨기어를 가공하는 전용기의 구조와 공구의 형상에 따라 가공된 후의 기어치의 형상을 연구하고, 그에 따라 컴퓨터 모델링을 수립하여 CAD/CAM의 기초자료로 활용할 수 있도록 하였다.<sup>(11-12)</sup> 이 연구는 전용기에서 만들어지는 기어치에 대한 연구이고, 이론적인 기어치 형상에 대한 연구도 이루어졌다. Y. C. Tsai와 P. C. Chin은 원뿔에서 접선 평면이 풀려지면서 그 평면의 한 모서리가 그리는 궤적을 구형 인볼루트 곡면(spherical involute surface)이라 하여 수학적 모델을 제시하였고,<sup>(13)</sup> 이 경우 기초원뿔과 평면의 접촉점에서 평면의 모서리까지를 직선으로 생각하였다. 그리고, M. J. Al-Daccak, J. Angeles, M. A. Gonzales-Palacios는 기초원뿔의 측면에 감겨있던 종이 띠가 풀어지면서, 종이 띠의 측면 모서리가 그리는 궤적을 구형 인볼루트 곡면이라 하여 수학적 모델을 제시하였고, 이 경우는 풀어진 종이는 원뿔에서 측면 모서리까지가 직선이 아니라 기초원뿔과 같은 반지름의 원호라고 하였다.<sup>(14)</sup> 그리하여 컴퓨터 모델링한 결과를 Tsai와 Chin의 결과와 비교하였다.

Al-Daccak, Angeles, Gonzales-Palacios는 모델링 과정에서 뉴튼-랩슨 방법으로 변수사이의 관계를 수치적 표현하였고, 그리고, 구형 인볼루트 곡면으로 기어 한쪽에 대해서만 모델링하였고, 상대 기어와의 관계 즉, 맞물려 돌아가는 과정은 표현하지 못 하였다. N.G. Park은 이상적인 구형 인볼루트곡면을 좌표변환방법으로 기어치의 형상을 모델링하

였고, 기어측의 기초원뿔에 감겨있던 종이 띠가 구겨지지 않고 팽팽한 상태에서 피니언측의 기초원뿔에 되감기면서 기어와 피니언이 서로 맞물려 회전한다고 생각하고, 두 기어사이의 속도비에 대한 해석적 연구와 물음률, 치접축선, 치간섭에 대해 연구하였다.<sup>(15-16)</sup> N.G. Park, D.H. Chung은 앞선 Park의 연구에서 압력각과 피치 압력각이 서로 같은 값을 가진다고 했던 것을 두 변수는 같지 않고, 서로 상관관계가 있음을 밝혀내고, 그에 따라 기구학적 특성을 정리하였다.<sup>(17)</sup>

본 연구는 구형인볼루트 치형의 베벨기어에 대한 연구에 대한 이론적 결과를 실험적으로 검증하고자 한다. 그래서 먼저 연구의 결과를 잘 표현해주는 모델 3가지를 선정하고, 그 기어 쌍에 대해 컴퓨터 그래픽으로 서로 간섭없이 회전하는 것을 확인한 다음, NC기계로 베벨기어를 제작하고, 제작된 기어로 치합전달오차(Transmission Error)를 측정하므로써 구형인볼루트 치형에 대한 연구를 검증하고자 한다.

## 2. 모델기어의 선정

베벨기어의 기구학적 특성을 잘 파악할 수 있는 기어 제원을 선택하고자 한다. 베벨기어치는 가능한 크게 하여 기어의 물림상태를 실험 및 관찰하는데 도움이 되고자 한다. 그리고, 가공에 있어서도 곡면의 오목 곡률반경이 크면, 절삭공구경이 큰 것을 사용할 수 있게 되어 절삭 시간 및 정밀도를 향상하는데 도움이 된다. 그리고, 한계기어잇수는 압력각에 큰 영향을 받으므로<sup>(17)</sup> 큰 기어치를 갖게 하기 위해서는 압력각도 큰 각을 가져야 한다. 그래서 산업체에서는 잘 사용하고 있지 않지만 압력각을 30°로 하기로 하였다.

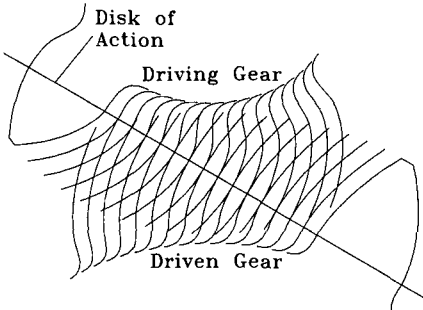
치합전달오차의 실험적 측정에서 서로 회전비가 다를 경우에는 입력과 출력축에 대한 회전각도 ( $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}$ )를 측정하고, 입력과 출력축의 신호가 속도비만큼 차이가 나므로 그 것을 맞추기 위해 입력축각에 대해 나누기를 한다. 따라서 입력축각 ( $\theta^{(1)}$ )의 함수로 치합전달오차( $\Delta\theta^{(2)}(\theta^{(1)})$ )를 표현하면,

$$\Delta\theta^{(2)}(\theta^{(1)}) = \theta^{(2)}(\theta^{(1)}) - \frac{Z^{(1)}}{Z^{(2)}} \theta^{(1)} \quad (1)$$

와 같다. 여기서 상첨자 <sup>(1)</sup> 과 <sup>(2)</sup>는 각각 구동기어

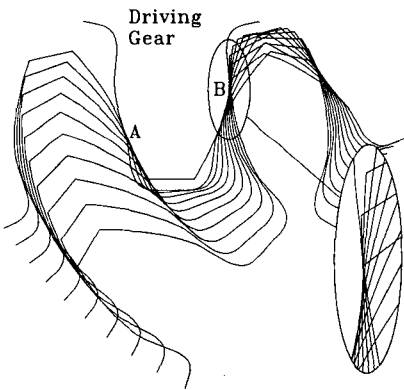




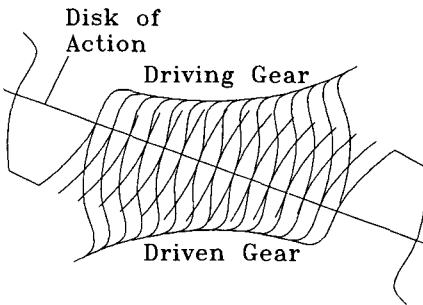


(b) contact position, relative to the disk of action

Fig. 4 Model 2



(a) locations of driven gear, relative to the fixed driving gear



(b) contact position, relative to the disk of action

Fig. 5 Model 3

기어치꼭이 없는 즉, 구의 표면상에 그려지는 기어의 회전하는 모습을 그래픽으로 나타냈다. Fig.3, Fig.4, Fig.5는 모델1, 모델2, 모델3에 대해 피동기어가 각각  $5^\circ$ ,  $8^\circ$ ,  $4^\circ$  간격으로 회전하고 있을 때의 모습들이다. 각각의 그림 (a)는 구동기어를 고정한 상태에서 피동기어가 돌아가는 모습을 보이고 있고, 여기서 B부분은 두 기어치가 서로 접촉한 부분이고, A부분은 서로 멀어지는 부분으로, 백래쉬 값에 의해 두 기어사이 간격이 있음을 알 수 있다. 백래쉬는 한 면에 대해  $0.001\text{rad}(=0.057^\circ)$  값을 주었기 때문에 간격은 이 2배인  $0.002\text{rad}(=0.115^\circ)$ 다. 두 모델 모두 기어가 회전하고 있는 동안 상대치와의 관섭이나 또는 접촉점이 떨어지는 현상은 발견되지 않았으며, 특히, (b)의 View고정 그림에서는 접촉점이 작용원판상에 계속적으로 존재한다는 것이 관찰되었다. 작용원판은 두 기초원뿔에 접하는 평면이므로, 기초원뿔에 감겨있던 종이가 풀어져서 상대측 기초원뿔에 감긴다고 가정한 것이 사실임을 확인해준다. 그리고, 두 기어사이의 작용력도 작용원판상에 있고, 그 힘의 방향도 바뀌지 않음을 알 수 있다. 그리고, Fig.6는 모델3의 조건에 잇수틀 9개로 했을 때에 화살표 부분에서 간섭이 일어나고 있는 부분을 보여주고 있다.

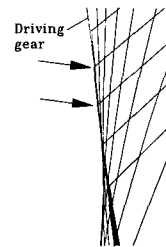


Fig. 6 Interference of gear

### 3.2 직선 베벨기어의 제작

앞 절에서 구해진 모델1의 데이터를 기초로 기어 치면과 축을 모델링하였다. 치면의 프로파일은 데이터사이의 정밀도를 높이기 위하여 B스플라인을 이용하였으며, 레디알 방향은 양단을 직선으로 하였다. 곡면은 레디알 방향의 직선을 프로파일 방향에 대해 축 중심을 기준으로 회전이동곡면(rotational sweep surface)으로 곡면을 만들었다.

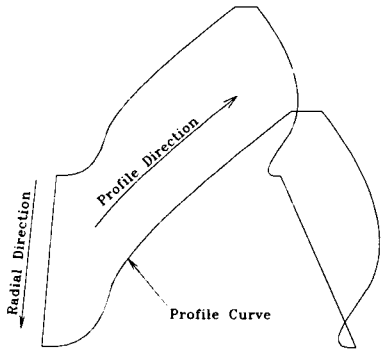
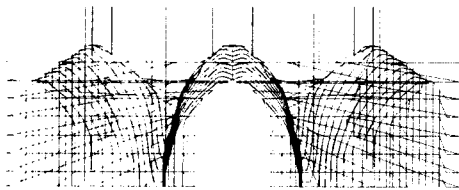
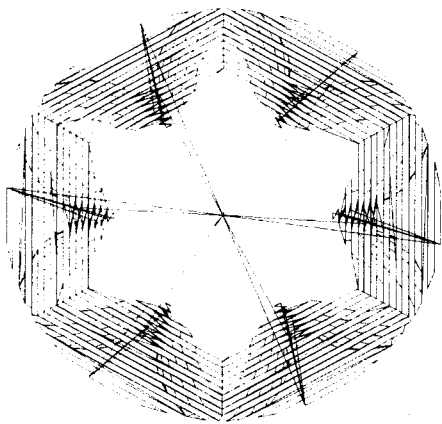


Fig. 7 coordinates in the modeling of tooth

NC 코드는 큐빅테크사의 오메가 Ver 3.51 모델을 이용하여 생성시켰다. 소재는 엔지니어링 플라스틱 종류인 MC(Monomer Casting Nylon)를 사용하였고, 황삭가공과 정삭가공으로 구분하여 작업했



a) side view



b) top view

Fig. 8 cutter path in the rough machining

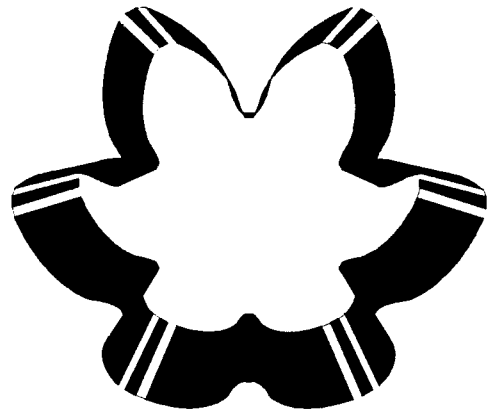


Fig. 9 Cutter path in the fine machining

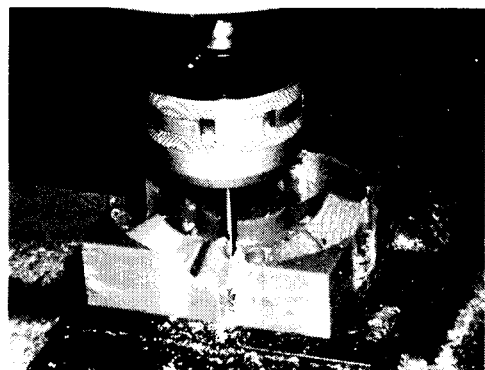
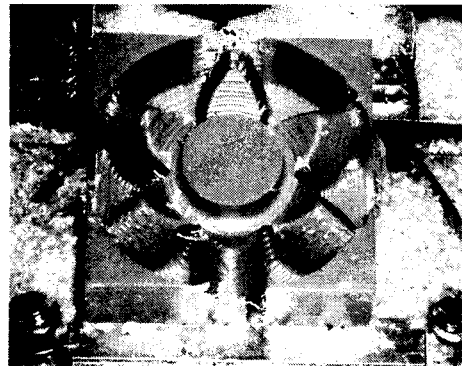


Fig. 10 Machining the bevel gear(above : after rough machining, below : in fine machining)

으며, 공구는 모두 지름이 6mm인 볼 엔드밀을 이용

했다. 황삭가공은 먼저 허브부분을 먼저 가공한 후에 치와 치사이의 골 부분을 가공하였다. 골 부분은 먼저 하나만 가공하고, 다음은 처음 가공한 곳의 CL(cutter location) 데이터를 회전 복사하여 전체 황삭가공을 완료하였다. Fig.8는 회전 복사된 골 부분 전체의 황삭 가공경로이다. 황삭의 Z방향의 스텝은 5mm로 하였고, 경로간 간격은 2mm, 정삭여유는 1mm, 이송속도는 300mm/min로 하였고, 가공시간은 2시간이 소요되었다.

정삭가공은 0.01mm의 정밀도를 가지도록 했고, 치면과 축 가공의 정밀도를 유지시키기 위하여 치대에서 소재의 이동없이 연속 가공을 하였다. 가공은 레디알 방향으로 지그재그로 가공했고, 공구경로간 간격은 0.2mm로 하였다. 이 값은 공구경로간 첨점의 높이(Cusp)를 1.67 $\mu$ m이하로 할 수 있다. 참고로 치폭은 20mm이고, 이송속도는 200mm/min로 했을 때에, 정삭가공시간은 약 5시간 정도 소요되었다. Fig.9은 정삭가공의 공구경로 모습이다. Fig.10는 실제 NC가공하는 모습으로 황삭작업이 끝난 뒤의 가공물의 모습과 정삭작업중의 모습이다.

### 3.3 치합전달오차의 측정

정확한 기어가 정상적으로 조립되어 있는 경우에는 구동기어와 피동기어의 회전각의 관계가

$$\theta^{(2)}(\theta^{(1)}) = \frac{Z^{(1)}}{Z^{(2)}} \cdot \theta^{(1)} \quad (9)$$

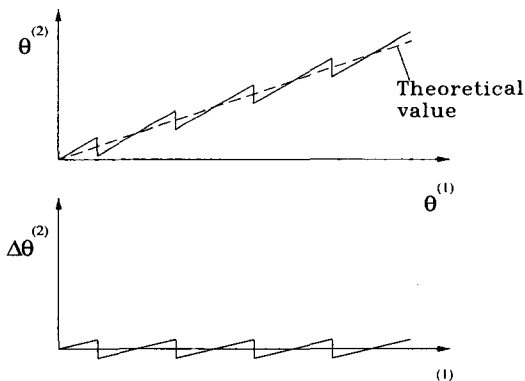


Fig. 11 Definition of transmission error

와 같이 피동기어는 구동기어 회전각의 선형적 함수이다. 이 결과는 이론적인 경우이고, 실제로는 치형이나 조립에서 결함이 있을 수 있기 때문에 실제의 회전각과 차이가 있을 수 있는데, 그 차이를 전달오차(Transmission Error)라 한다.<sup>(19-20)</sup> 즉, 식(1)과 같다.

이 실험에서 측정된 전달오차의 값의 비교 기준을 가지기 위하여 AGMA2000-A88에서 주어진 자료로 정밀도 Q10급(JIS3급)에서 모듈 12와 16에서 각각 프로파일(Profile) 공차가 24 $\mu$ m와 28 $\mu$ m이다.<sup>(21)</sup> 실험한 베벨기어의 상당 스피어기어에 대한 모듈은

$$m = \frac{2r \cdot \sin \theta_p}{Z} \quad (10)$$

이므로  $r=60\text{mm}$ ,  $\theta_p=45^\circ$  를 대입하면, 약14가 된다. 따라서 프로파일의 공차는 두 값의 중간인 26 $\mu$ m로 생각해도 좋겠다. 이 값은 기어치에 수직인 값이므로 작용원판상에 있는 것이다. 따라서 축의 각으로 환산하기 위해  $r \cdot \sin \theta_g$ 로 나누어서 그 값을 계산하면, 치합 전달오차는 0.04°로 간주할 수 있다. 기어와 피니언 모두 양쪽에서 이와 같은 결과를 내므로 최대 0.08°의 치합전달오차가 발생할 수 있다. 이것을 본 실험의 기준으로 삼고자 한다.

실험장치의 구성은 Fig.11과 같다. 입력축과 출력축의 각속도를 LVH(Laser Vibrometer Head)로 측정하고, LVC(Laser Vibrometer Controller)에서는 그 신호를 적분하고 평균각변위를 제거하여 각변위 변화값  $\Delta\theta$ 를 추출한다. FFT에서는 이 두 각변위 변화값  $\Delta\theta^{(1)}$ ,  $\Delta\theta^{(2)}$ 의 차를 계산하여 치합전달오차를 구한다. 여기서 사용한 LVH는 Polytec OFV-352이고, LVC는 Polytec OFV-2601이다. FFT는 8채널 SA-390이고 모타는 AC 서보모타로서 LG FMA-CN05로 500W용량이다. 구동속도는 가능한 동역학적 요인을 줄이기 위하여 70 - 80RPM의 저속으로 운전하며 치합전달오차를 측정하였다.

Fig.14은 입력축과 출력축의 각변위 변화량  $\Delta\theta^{(1)}$ ,  $\Delta\theta^{(2)}$ 를 나타낸 것이다. 이 그림에서 물결처럼 움직이는 것은 모타가 일정한 속도를 유지되지 못하기 때문에 나타나는 것이고 본 실험에서 의미있는 것은 이 두 값의 차이이다. Fig.15은 이 두 값

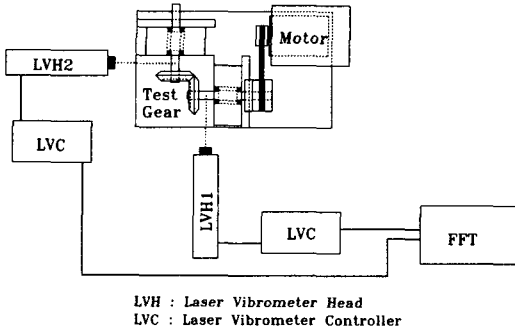


Fig. 12 Layout of test rig

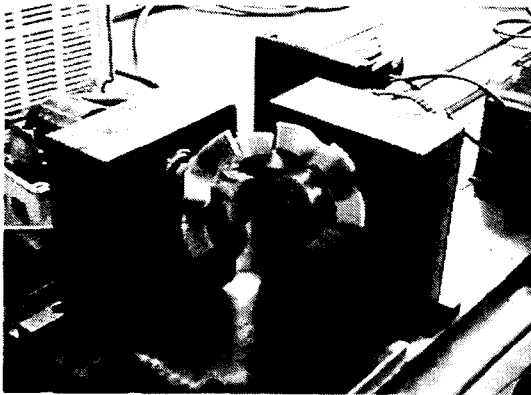


Fig. 13 photograph of test rig

의 차인 치합전달오차를 나타내고 있고, 실험한 기어의 잇수가 6개이므로 총6개의 주기를 가지도록 시간 영역을 0.8초로 주었고, 이 시간동안 한 기어치 부분에서만 치합전달오차의 최대,최소값 차가

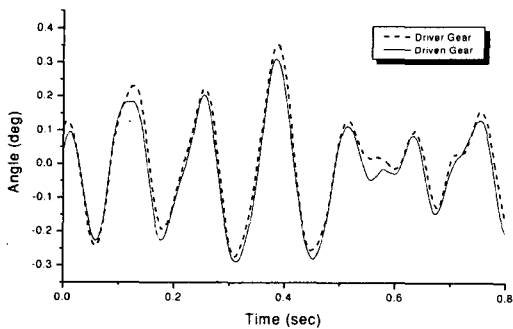


Fig. 14 Rotate angle deviations of input and output shaft

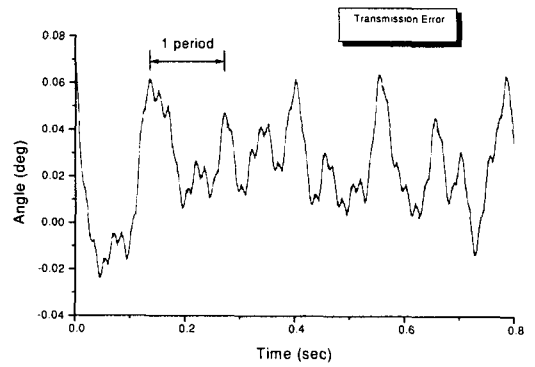


Fig. 15 The measured transmission error

0.08° 이상이고 대부분의 기어치에서는 0.06° 이하로 측정되었다. 정밀도 Q10급(JIS3급)에서 제시된 기준값 이내로 모두는 아니지만 대부분은 만족하는 것으로 확인되었다.

#### 4. 결론

이론적으로 표현되었던 구형 인볼루트 치형에 대해 컴퓨터 그래픽 및 실제 베벨기어를 제작하여 치합전달오차를 측정함으로써 상업적으로 활용가능성을 확인하고자 하여 다음과 같은 결과를 얻었다.

- 1) 컴퓨터 그래픽에 의해 기어가 회전 중에 서로 간섭은 일어나지 않는다는 것을 확인하였다.
- 2) 베벨기어에서의 기구학적 조건을 상당 스피어 기어로 가정하는 것은 불가능하다.
- 3) 이론적인 구형 인볼루트 베벨기어를 NC기계로 제작할 수 있었다.
- 4) 제작된 베벨기어로 치합전달오차를 측정하여 확인한 결과, AGMA Q10급(JIS3급)의 정밀도를 가진다는 것을 확인하였다.

#### 참고문헌

1. D. P. Townsend, Dudley's Gear handbook, 2nd Ed., McGraw-Hill, Chap. 20, Inc. 1992.
2. Litvin, F. L., and Gutman, y., "Methods of Synthesis and Analysis for Hypoid Gear-drivers of



- 'Formate' and 'Helixform', Parts 1, 2, and 3," ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 103, No. 1, pp. 83-113, Jan. 1981.
3. Huston, R. L., Lin, Y., and Coy, J. J., "Tooth Profile Analysis of Circular Cut Spiral-Bevel Gears," ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 105, pp. 132-137, March, 1983.
  4. Litvin, F. L., Goldrich, R. N., Coy, J. J., "Precision of Spiral-Bevel Gears," ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 105, pp. 310-316, September, 1983.
  5. Litvin, F. L., Kuan, C., Kieffer, J., Bossler, R., Handshuhm R. F., "Straddle Design of Spiral Bevel and Hypoid Pinions and Gears," Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design, Vol. 113, pp. 422-426, June, 1991.
  6. Litvin, F. L., Zhang, Y., Lundy, M., and Heine, C., "Determination of Settings of a Tilted Head Cutter for Generation of Hypoid and Spiral Bevel Gears," ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 110, pp. 495-500, Dec., 1988.
  7. Fong, Z. H., Tsay Chung-Biau, "A Mathematical Model for the Tooth Geometry of Circular-Cut Spiral Bevel Gears," Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design, Vol. 113, pp. 174-181, June, 1991.
  8. Fong, Z. H., Tsay Chung-Biau, "A Study on the Tooth Geometry and Cutting Machine Mechanism of Spiral Bevel Gears," Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design, Vol. 113, pp. 346-351, June, 1991.
  9. Litvin, F. L., Tsung, Wei-Jiung, Coy, J. J., and Heine, C., "Method for Generation of Spiral Bevel Gears With Conjugate Gear Tooth Surface," ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 109, pp. 163-170, June, 1987.
  10. Litvin, F. L., Zhang, Y., Kieffer, J., Handshuhm R. F., "Identification and Minimization of Deviations of Real Gear Tooth Surface," Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design, Vol. 113, pp. 55-62, March, 1991.
  11. Fong, Z. H., Tsay, C. B., "A Study on the Tooth Geometry and Cutting Machine Mechanism of Spiral Bevel Gears," Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design, Vol. 113, pp. 346-351, September, 1991.
  12. Fong, Z. H., Tsay, C. B., "A Mathematical Model for the Tooth Geometry of Circular-Cut Spiral Bevel Gears," Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design, Vol. 113, pp. 174-181, June, 1991.
  13. Tsai, Y. C., Chin, P. C., "Surface Geometry of Straight and Spiral Bevel Gears," Transactions of the ASME, Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 109, pp.443-449, December, 1987.
  14. Al-Daccak, M. J., Angels, J., Gonz les-Palacios, M. A., "The Modeling of Bevel Gears Using the Exact Spherical Involute," Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design, Vol. 116, pp. 364-368, June, 1994.
  15. 박노길, "구형 인볼류트 베벨기어쌍의 각속도비에 관한 연구," 한국정밀공학회지, 제12권 제5호 pp. 40 - 45, 1995년 5월.
  16. 박노길, "완전한 인볼류트 베벨기어쌍의 기구학적 고찰 및 형상모형화," 한국정밀공학회지, 제12권 제5호 pp. 46 - 56, 1995년 5월.
  17. 박노길, 정동현, "완전한 인볼류트 치형을 가진 베벨기어쌍의 기구학적 고찰," 한국기계학회논문집A권, 제23권 제10호 pp. 1668~1675, 1999.
  18. 정선모, 한동철, "표준기계설계학", 동명사, p.568-572, 1983.
  19. 주상훈, 노오현, 정동현, 배명호, 박노길, "치형 수정된 기어쌍의 치합전달오차 모델링," 한국소음진동학회지, 제8권, 제5호, pp. 841-848, 1998.
  20. D. P. Townsend, Dudley's Gear handbook, 2nd Ed., McGraw-Hill, Inc. p1.39 - p1.42, 1992.
  21. D. P. Townsend, Dudley's Gear handbook, 2nd Ed., McGraw-Hill, Inc. p7.16 - p7.17, 1992.