Historia Mathematica Vol. 13, No. 2, 2000, 133-144

모어-마스케로니의 정리에 대한 고찰

경상대학교 수학교육과 **한인기**
대현중학교 **강인주**

Abstract

We study on a Mohr-Mascheroni theorem, which is the followings: If a construction problem is solved by euclidean tools(compass and ruler), then it can be solved using only compass. Though it is known that Mohr-Mascheroni theorem was proved by Mascheroni, but we have not any materials concerned with Mascheroni's work.

In order to investigate Mohr-Mascheroni theorem, we analyze Euclid's *Elements*, and we draw some construction problems, which are essential for proving Mohr-Mascheroni theorem. We solve these problems using only compass. Though we don't solve all construction problems of Euclid's Elements, we can regard that Mohr-Mascheroni theorem is proved.

0. 서론

작도 문제는 그 해결 과정에서 학습자들이 다양한 분석적 활동을 경험할 수 있으며, 작도 활동을 통해 많은 비정형적인 수학적 아이디어를 발견할 수 있기 때문에, 수학 교수-학습에서 학습자의 인지 활동을 개발·육성하는 데 중요한 역할을 할 수 있다.

최근 들어, 수학 교수-학습에서 작도 문제의 활용에 대한 다각적인 연구가 이루어지고 있는데, 장혜원(1997)은 작도의 의미와 다른 수학 교과 영역과의 연계성에 대한 고찰을 수행했으며, 정창현(1992), 한인기(1999), 우정호(2000) 등의 연구에서는 작도 문제의 해결 방법에 대한 구체적인 논의가 제시되고 있다. 특히, 한인기(2000)는 1999년 개발된 중학교 수학과 영재 교육 과정 시안을 바탕으로 작도 문제를 활용하여 중학교 수학과 영재 교수-학습 자료 및 상응하는 교사용 지도서를 개발하여, 과학 영재 교육 센터에 투입한 결과 긍정적인 결과를 얻었다. 살펴본 작도 문제에 관련된 연구들에서는 작도 문제를 자와 컴퍼스를 사용하여 해결하는 방법, 그리고 상응하는 교수-학습 자료들이 개발되었다.

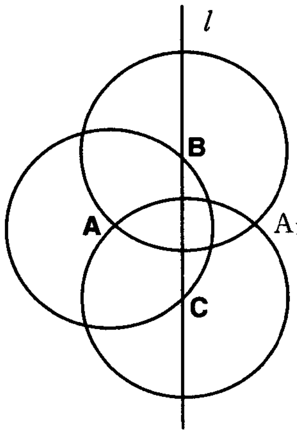
한편, 한인기(1999)의 논문에 보면, 다음과 같은 흥미로운 작도 문제가 하나 제시되어 있다. "직선 l과 직선 밖의 점 A가 주어졌다. 컴퍼스만을 이용하여 직선 l에 대한 점 A의 대칭점 A_1을 작도하여라." 그리고, 이 문제에 대한 풀이는 다음과 같다.

(1) 점 A를 중심으로 하고, 반지름이 점 A에서 직선 l까지 거리보다 큰 원을 작도하자.

(2) 작도한 원과 직선 l과 교점 B와 C를 표시하자.

(3) 각각 점 B와 C를 중심으로 하고, (1)에서 작도한 원과 반지름이 같은 원을 작도하자.

(4) (3)에서 작도한 두 원의 교점을 A_1이라 하면, 이 점이 구하는 점이다.



이 때, 발생할 수 있는 흥미로운 질문 중의 하나가, 과연 모든 작도 문제를 컴퍼스만을 사용하여 풀 수 있는가? 물론, 컴퍼스만을 사용하므로, 직선 자체를 작도할 수 없기 때문에, 우리는 다음과 같은 한 가지 약속을 해야 한다. "어떤 직선 l에 속하는 두 점을 표시하면, 직선 l은 작도된 것이며, 선분의 양 끝점을 작도하면, 선분을 작도한 것으로 간주한다."

이 약속에 의해, 작도 문제의 조건으로 직선이 주어질 때, 직선이 직접 주어지는 경우, 그리고 직선을 나타내는 두 점이 주어지는 경우의 두 가지가 가능한데, 이들은 서로 같게 취급할 수 있다. 위의 문제에서는 직선이 직접 주어지는 경우에 해당된다.

한편, 컴퍼스에 의한 작도 문제에 대한 연구는 이탈리아의 수학자 마스케로니(Mascheroni Lorenzo, 1750-1800)에 의해 행해졌으며, 그는 **컴퍼스 기하학**(Geometria del compasso)이라는 저술에서 "자와 컴퍼스를 사용하여 해결되는 모든 작도 문제는 컴퍼스만을 이용하여 해결된다."는 내용을 기술하였다(이종우, 1999). 한편, 1928년에 덴마크 수학자 히예름슬레프(Hjelmslev J., 1873-1950)는 1672년에 암스테르담에서 출판된 모어(Mohr Georg)가 쓴 **덴마크 원론**이라는 수학 책을 발견하였는데, 이 책의 제 1장에 컴퍼스만을 이용한 작도에 관한 내용이 마스케로니보다 125년 앞서 소개되고 있다.

본 논문에서는 "자와 컴퍼스를 사용하여 해결되는 모든 작도 문제는 컴퍼스만을 이용하여 해결된다."는 것이 무엇을 의미하며, 이 사실을 어떻게 보여줄 수 있는가에 대해 구체적으로 고찰할 것이며, 컴퍼스만을 이용한 몇몇 작도 문제에 대한 해결 방법들을 탐구할 것이다.

1. 모어-마스케로니의 정리

마스케로니는 컴퍼스만을 이용한 도형의 성질 탐구에서 **컴퍼스 기하학**이라는 표현을 사용했으며, 살펴본 바와 같이 마스케로니 이전에 컴퍼스만을 이용한 작도 문제를 탐구한 사람이 모어이다. 그래서 컴퍼스 기하학의 바탕인 "자와 컴퍼스를 사용하여 해결되는 모든 작도 문제는 컴퍼스만을 이용하여 해결된다."를 **모어-마스케로니의 정리**라고 부르며, **컴퍼스 기하학의 기본 정리라**고도 부른다.

모어-마스케로니의 정리에 대해 구체적으로 고찰하기 위해, 우선 유클리드의 **원론**에서 작도 문제에 대해 살펴보자. 우리는 흔히 작도 문제 해결에서 눈금이 없는 자와 컴퍼스만을 사용하는데, 유클리드 원론에 있는 모든 작도 문제들은 이 도구들만을 이용하여 해결된다. 그래서 우리는 눈금 없는 자와 컴퍼스를 '유클리드적 도구'라고 부르는데, 눈금 없는 자와 컴퍼스 사용의 근거는 원론에 제시된 공준들 중에서 작도와 관련된 다음 세 가지 공리에서 찾을 수 있다.

공준 1. 한 점에서 또 다른 한 점으로 직선을 그릴 수 있다.
공준 2. 유한 직선은 무한히 연장시킬 수 있다.
공준 3. 임의의 점을 중심으로 임의의 반지름으로 원을 작도할 수 있다.

공준 1과 2에서는 직선의 작도와 관련되며, 공준 3은 한 점을 중심으로 하고, 다른 한 점을 지나는 원을 그릴 수 있다는 것을 의미한다. 이 때, 우리는 원론의 공준 1, 2, 3을 통해, 작도 문제의 해결에 사용되는 도구로 직선을 그을 수 있는 도구인 자 그리고 원을 작도할 수 있는 컴퍼스를 규정할 수 있다. 이때, 공준 1과 2에서 선분의 길이에 대한 언급이 없기 때문에, 우리가 작도에서 사용하는 자에는 눈금이 표시되지 않은, 즉 곧은 선을 그을 수 있는 자이다.

이제, 모어-마스케로니의 정리의 타당성을 밝히기 위해, 공준 1, 2, 3을 만족시키기 위해 필요한 작도들이 무엇인가를 탐구해 보기로 하자. 공준 1을 다시 말하면, 두 점이 주어진 경우 직선을 그을 수 있다는 것을 의미한다. 이것을 컴퍼스 기하학에서의 작도 문제로 고치면, "두 점 혹은 직선이 주어진 경우에 이 직선에 속하는 두 점을 작도할 수 있다."라고 할 수 있다. 한편, 컴퍼스 기하학에서 공리 2는 아무런 문제를 발생시키기 않는데, 왜냐 하면 컴퍼스 기하학에서 무한 직선이나 유한 직선 모두 두 점으로 나타내어지기 때문이다. 그리고 공리 3은 컴퍼스를 이용하여 작도 가능하다.

한편, 컴퍼스 기하학에서 직선의 작도와 관련하여 고려해야 할 것들 중의 하나가 직선과 직선, 원과 원, 그리고 원과 직선의 교점 작도이다. 유클리드적 도구를 이용한 작도에서 평행하지 않은 두 직선을 작도하면, 자동적으로 그 교점이 작도되지만, 컴퍼스 기하학에서는 이러한 직선들이 점들로 표시되기 때문에, 그 교점을 찾는 것이 자명하지 않다.

살펴본 바와 같이, 유클리드적 도구에 의해 해결되는 작도 문제가 컴퍼스만을 이용하여

해결될 수 있다는 것을 보이기 위해선, 다음과 같은 기본 작도들이 컴퍼스만으로 작도 가능함을 보여야 한다.

- 두 점에 의해 주어진 직선에 속하는 두 점의 작도
- 두 점에 의해 주어진 두 직선의 교점 작도
- 주어진 원과 두 점에 의해 주어진 직선의 교점 작도

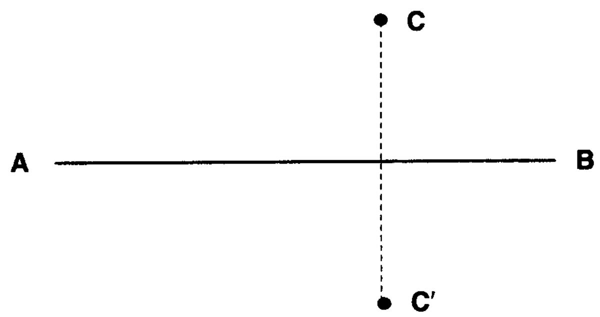
2. 컴퍼스 기하학에서의 작도 문제 해결

이제, 위에서 기술한 컴퍼스 기하학의 기초적인 몇몇 작도 문제들을 풀어보자.

보조 정리 1. 직선 AB가 주어졌을 때, 주어진 점 C의 대칭인 점을 작도하여라.

이 문제는 서론에서 하나의 예제로 살펴보았는데, 다른 풀이 방법을 하나 더 살펴보기로 하자. 직선 AB가 주어졌다는 것은 직선 AB 상의 두 점 A와 B가 주어졌다는 것을 의미하므로, 다음과 같은 분석 과정을 생각할 수 있다.

분석. 우선, 직선 AB, 점 C, 그리고 점 C의 대칭인 점 C′이 작도되었다고 가정하면, 다음 그림을 얻을 수 있다.



점 C′은 주어진 선분에 대한 점 C의 대칭점이므로, $\overline{AC}=\overline{AC'}$이고 $\overline{BC}=\overline{BC'}$이다. 이로부터, 점 C′는 A와 B를 중심으로 반지름이 각각 $\overline{AC}$와 $\overline{BC}$인 원을 작도하여 얻어진 교점임을 알 수 있다.

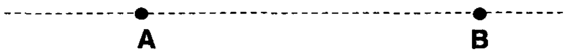
작도. (1) 점 A를 중심으로 반지름이 $\overline{AC}$인 원을 작도한다.

(2) 점 B를 중심으로 반지름이 $\overline{BC}$인 원을 작도한다.

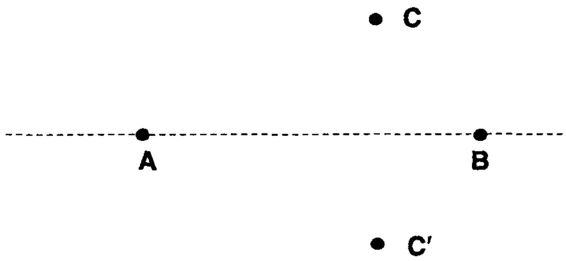
(3) (1)과 (2)에서 얻어진 원들의 교점이 구하는 점 C′이다.

정리 1. 두 점 A와 B로 주어진 직선에 두 개의 점을 표시하여라.

분석. 같은 직선에 속하는 두 점 A와 B가 주어졌다고 하자.



실제로는 직선이 보이지 않기 때문에, 직선에 속하는 점을 임의로 찍을 수가 없다. 이제, 직선 밖의 임의의 점 C를 표시하자. 그러면 점 C의 직선 AB에 대한 대칭점 C′을 작도할 수 있다.

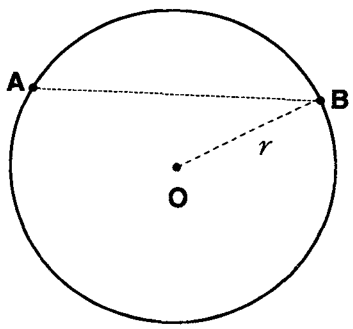


이로부터 직선 CC′을 얻을 수 있으며, 직선 CC′에 대해 점 A와 B의 대칭인 점 A′과 B′을 각각 작도하면, 직선 AB에 속하는 다른 점인 A′과 B′을 작도할 수 있다.

작도. (1) 직선 밖의 임의의 점 C를 표시하자.
(2) 점 C의 AB에 대한 대칭점 C′을 작도하자.
(3) 직선 CC′에 대해 점 A와 B의 대칭인 점 A′과 B′을 각각 작도하면, 이 점들이 직선 AB에 속하는 다른 점들이다.

보조 정리 2. 원 O에서 주어진 호 AB의 이등분점을 작도하여라[1].

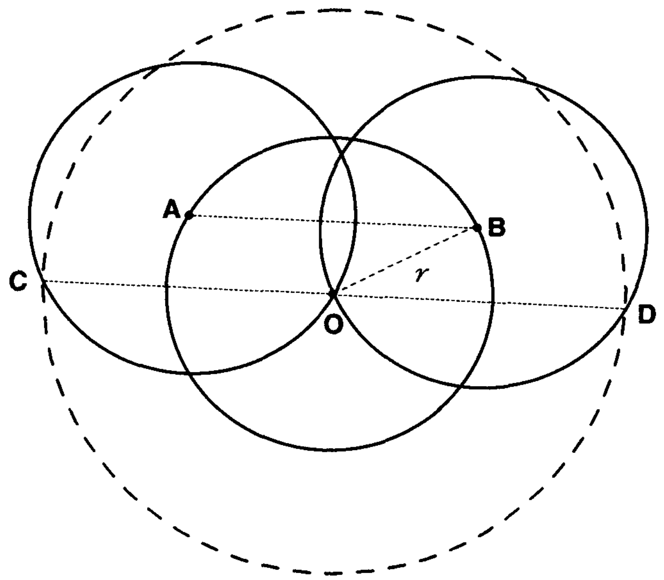
이 문제의 작도 과정을 상세히 살펴보기로 하자. 우선, 반지름이 r인 원 O와 호 AB가 주어졌다고 하자(그림 참조).



작도. (1) a를 선분 AB의 길이라 할 때, 점 O를 중심으로 반지름이 a인 원을 작도하자.

1) 이 문제의 증명은 꼬스토프스키 A.N.(1984)의 방법을 기초로 하였음.

(2) 점 A와 B를 중심으로 반지름이 r인 원들을 작도하여, (1)에서 작도한 원과의 교점을 각각 C와 D라 하자.



(3) 점 C와 D를 중심으로 반지름이 각각 $\overline{CB}$와 $\overline{AD}$와 같은 원을 작도하여, 그 교점을 E라 하자.

(4) 점 C와 D를 중심으로 반지름이 $\overline{OE}$와 같은 원들을 작도하여, 그 교점을 X와 X_1이라 하자. 그러면 X는 호 AB의 중점이고 X_1은 호 AB의 열호의 중점이 된다.

증명. 얻어진 점 X가 호 AB의 이등분점인지 확인하여 보자. 이를 위해, 첫째 $\overline{OX} \perp \overline{AB}$, 둘째 $\overline{OX} = r$을 증명해야 한다.

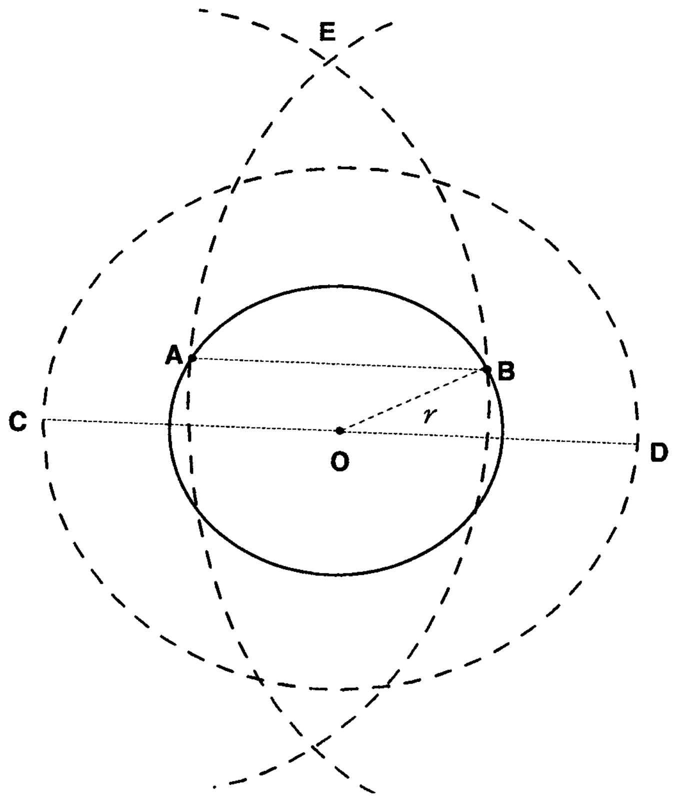
우선, $\overline{OX} \perp \overline{AB}$을 증명하자. 사각형 ACOB와 AODB가 평행사변형이므로, $\overline{AB} \,//\, \overline{CO}$, $\overline{AB} \,//\, \overline{OD}$이므로, 세 점 C, O, D는 한 직선에 속한다. 결국, $\overline{OX} \perp \overline{AB}$를 보이기 위해, $\overline{OX} \perp \overline{CD}$를 보이면 된다. 사각형 ACOB와 AODB가 평행사변형이므로 $\overline{CO} = \overline{OD}$이고, 삼각형 CXD가 이등변 삼각형이므로, $\overline{OX} \perp \overline{CD}$이다.

이제, $\overline{OX} = r$임을 보이자. 사각형 ABOC가 평행사변형이므로 다음이 성립한다.

$$\overline{AO}^2 + \overline{BC}^2 = 2\,\overline{OB}^2 + 2\,\overline{AB}^2, \quad r^2 + \overline{BC}^2 = 2r^2 + 2a^2$$

그러므로 $\overline{BC}^2 = 2a^2 + r^2$이다. 한편, 직각삼각형 COE로부터 다음을 얻는다.

$$\overline{CE}^2 = \overline{BC}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OE}^2 = a^2 + \overline{OE}^2$$

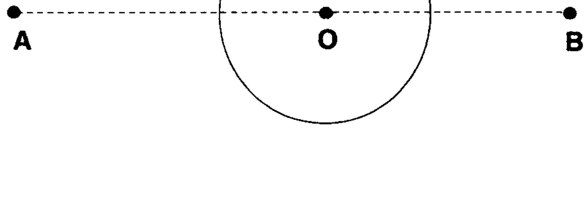


위에서 얻은 $\overline{BC}^2$의 두 값으로부터, $2a^2+r^2=a^2+\overline{OE}^2$, 즉 $\overline{OE}^2=a^2+r^2$이 성립한다. 결국, 직각삼각형 COX로부터 다음이 성립한다.

$$\overline{OX}=\sqrt{\overline{CX}^2-\overline{OC}^2}=\sqrt{\overline{OE}^2-\overline{OC}^2}=\sqrt{a^2+r^2-a^2}=r$$

정리 2. 중심이 O이고 반지름이 r인 원과 두 점 A와 B로 주어진 직선의 교점을 작도하여라.

분석. 이 문제의 작도는 원 (O, r)의 중심 O가 직선 AB에 속하는 경우와 그렇지 않은 경우로 나누어 생각할 수 있다. 우선 첫 번째 경우에 대해 살펴보자.



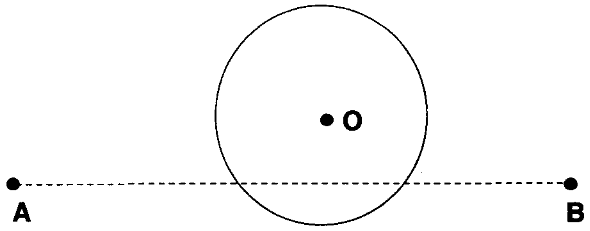
만약 점 A를 중심으로 하고 원 O와 만나는 원을 작도하면, 직선 AB와 원 O의 교점은 점 A를 중심으로 하고 원 O와 만나는 임의의 원과 원 O의 교점에 의해 생기는 호의 중점이다. 주어진 원에 대한 호의 중점은 작도 가능하므로, 다음과 같은 작도를 얻을 수 있다.

작도. (1) 점 A를 중심으로 하고 원 O와 만나는 원을 작도하자.

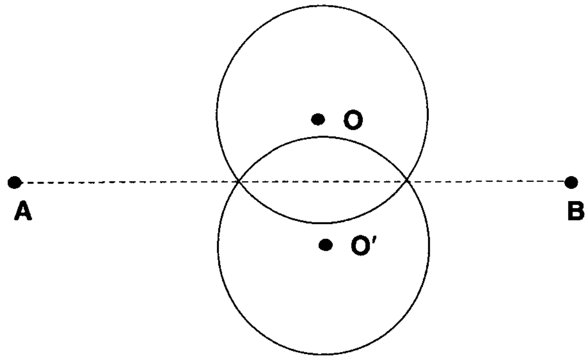
(2) 원 A와 원 O의 교점을 C와 D라 하면, 호 CD의 중점이 바로 구하는 직선과 원 O의 교점이다.

(3) 점 B에 대해서도 (1)과 (2)의 과정을 반복하면, 다른 교점을 구할 수 있다.

두 번째 경우의 분석. 원의 중심 O가 직선에 속하지 않는 경우를 살펴보자.



만약 직선 AB에 대해 점 O의 대칭인 점 O′을 작도하고, 다시금 점 O′을 중심으로 반지름이 r인 원을 작도하였다고 하자. 그러면 직선 AB와 원 O의 교점은 두 원 O와 O′의 교점임을 쉽게 알 수 있다.



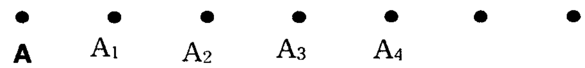
두 번째 경우의 작도. (1) 직선 AB에 대해 점 O의 대칭인 점 O′을 작도하자.

(2) 점 O′을 중심으로 반지름이 r인 원을 작도하자.

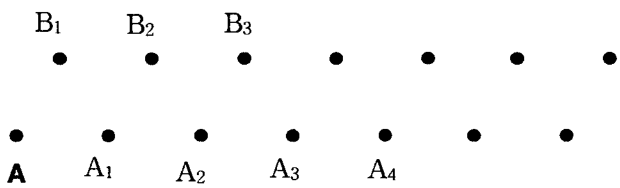
(3) 직선 AB와 원 O의 교점은 두 원 O, O′의 교점이다.

보조 정리 3. n을 임의의 자연수라 할 때, 주어진 선분 AA_1보다 2, 3, 4, ⋯, n배만큼 큰 선분을 작도하여라.

분석. 문제의 조건을 만족시키는 작도를 수행했다고 가정하자.



얻어진 작도로부터 $\overline{AA_1}=\overline{A_1A_2}=\cdots=\overline{A_{n-1}A_n}$ 등을 분석할 수 있지만, 문제는 자를 사용하지 않고 A_2, A_3, …를 선분 AA_1의 연장선에 작도하는 방법을 고안해야 한다는 것이다. 이를 위해, 한 변이 $\overline{AA_1}$인 정삼각형 AA_1B_1을 작도하여 보자.



그리고 작도된 삼각형 AB_1A_1의 한 변 $\overline{B_1A_1}$에 한 변이 $\overline{B_1A_1}$인 정삼각형 $B_1A_1B_2$를 작도하자. 또, 정삼각형 $B_1A_1B_2$에 한 변이 $\overline{A_1B_2}$인 정삼각형 $A_1B_2A_2$를 작도하자. 그러면 $\overline{AA_2}=2r$이고, 각 AA_1B_1은 $60°$이고, 각 $B_1A_1A_2$은 $120°$이므로, 같은 직선에 속한다. 즉, 점 A_2는 선분 AA_1의 연장선에 속하며, $\overline{AA_2}=2r$인 점이다. 한편, 마찬가지 방법으로 주어진 선분 AA_1보다 2, 3, 4, …, n배만큼 큰 선분을 작도할 수 있다.

작도. (1) 한 변이 $\overline{AA_1}$인 정삼각형 AB_1A_1을 작도하자.

(2) 한 변이 $\overline{B_1A_1}$인 정삼각형 $A_1B_1B_2$를 작도하자.

(3) 한 변이 $\overline{A_1B_2}$인 정삼각형 $A_1B_2A_2$를 작도하자.

(4) 얻어진 선분 AA_2는 주어진 선분 AA_1의 2배이다.

(5) 마찬가지 방법으로, 주어진 선분 AA_1보다 2, 3, 4, …, n배만큼 큰 선분을 작도할 수 있다.

보조 정리 4. 길이가 a, b, c인 선분이 주어졌을 때, $a:b=c:x$를 만족시키는 길이가 x인 선분을 작도하여라[2].

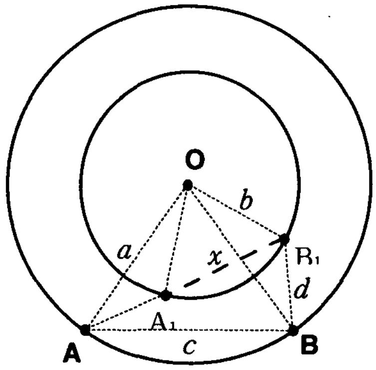
작도. (1) 임의의 점 O에 대해, 중심이 O이고 반지름이 각각 a와 b인 동심원을 작도하자.

(2) 중심이 O이고 반지름이 a인 원에 임의의 점 A를 표시하자.

2) 이 문제의 증명은 꼬스토프스키 A.N.(1984)의 방법을 기초로 하였음.

(3) 점 A를 중심으로 반지름이 c인 원을 작도하자.

(4) (1)와 (3)에서 얻어진 원의 교점을 B라 하자.



(5) 중심이 A이고 반지름으로 $d > |a-b|$인 d값을 가지는 원을 작도하자.

(6) 중심이 B이고 반지름이 d인 원을 작도하자.

(7) 중심이 O이고 반지름이 b인 원과 (5) 및 (6)에서 얻은 두 원과의 교점을 각각 A_1과 B_1이라 하면, $\overline{A_1B_1}$의 길이가 구하는 값 x이다.

증명. 삼각형 AOA_1과 BOB_1이 합동이므로, $\angle AOA_1 = \angle BOB_1$, $\angle AOB = \angle A_1OB_1$이다. 그리하여 이등변 삼각형 AOB와 A_1OB_1은 닮음이 되고, 이로부터 다음을 얻는다.

$$a : b = c : \overline{A_1B_1}$$

참고로, 살펴본 작도는 $c < 2a$인 경우이다. 만약 $c \geq 2a$인 경우에는 먼저, $c < 2na$가 되도록 선분 na를 작도한다(이 작도는 보조 정리 3에서 이루어짐). 그리고 나서, 세 선분 na, b, c에 대해 비례인 선분 y를 작도하면, 이 선분이 바로 구하는 선분이 된다.

$$na : b = c : y \Leftrightarrow a : b = c : ny$$

그러므로 길이가 a, b, c인 세 선분에 대해 비례하는 선분 x가 작도된다.

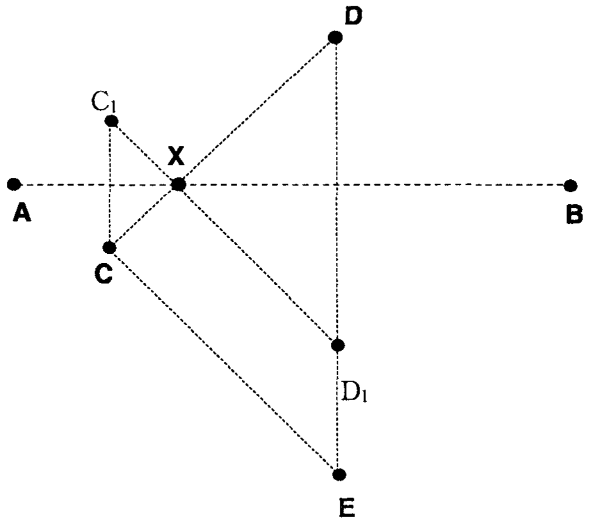
정리 3. 점들에 의해 주어진 두 직선 AB, CD의 교점을 작도하여라.

작도. (1) 주어진 직선 AB에 대해 점 C와 D의 대칭인 점 C_1과 D_1을 각각 작도하자.

(2) 점 D_1을 중심으로 반지름이 $\overline{CC_1}$인 원을 작도하자.

(3) 점 C를 중심으로 반지름이 $\overline{CD}$인 원을 작도하자.

(4) (2)와 (3)에서 얻어진 원의 교점을 E라 하자.



(5) $\overline{DE} : \overline{DD_1} = \overline{CD} : x$에서 길이가 x인 선분을 작도하자.

(6) 점 D를 중심으로 반지름이 x인 원을 작도하자.

(7) 점 D_1을 중심으로 반지름이 x인 원을 작도하자.

(8) (6)와 (7)에서 얻어진 원의 교점을 X라 하면, 이 점이 구하는 점이다.

3. 결론

작도 문제는 그 풀이 과정이 직관적 사고뿐만 아니라, 분석적 사고 과정과 긴밀하게 관련되어 있기 때문에, 학생들의 인지 활동의 개발 · 육성에 매우 중요한 역할을 한다. 그리고 그 풀이 방법의 우아함으로 인하여 많은 수학자들을 매혹시켰으며, 학습자들이 수학에 심미적 가치를 부여할 수 있는 기회를 제공해 준다.

중 · 고등학교에서는 대부분 자와 컴퍼스만을 이용하는 작도 문제를 다룬다. 그러나 작도의 도구를 제한하여 컴퍼스만을 이용하여도 작도 문제의 가해성은 보존되며, 그 풀이 과정은 더 깊은 수학적 사고와 우아한 아이디어를 요구한다.

"자와 컴퍼스를 사용하여 해결되는 모든 작도 문제는 컴퍼스만을 이용하여 해결된다."는 것이 모어-마스케로니의 정리인데, 이것에 대한 최초의 연구는 1672년에 모어가 쓴 **덴마크 원론**이라는 책에서 발견되었다. 한편, 이와는 독립적으로 이탈리아의 수학자 마스케로니도 이에 대한 깊은 연구를 수행하여, **컴퍼스 기하학**이라는 저술에서 모어-마스케로니의 정리를 증명되었다고 했는데, 그 구체적인 자료들은 구하는 것이 쉽지 않다.

본 논문에서는 모어-마스케로니의 정리의 타당성을 어떻게 보여줄 수 있는가에 대해 고

찰하였으며, 컴퍼스만을 이용한 몇몇 작도 문제에 대한 해결 방법들이 탐구되었다.

유클리드 **원론**에 나오는 작도 문제들은 그 작도 과정이 공준 1, 2, 3에 근거하고 있기 때문에, 자를 사용하지 않고 공준 1, 2, 3에 관련된 작도 문제들을 해결할 수 있다면, 모어-마스케로니 정리에 대한 타당성이 입증될 수 있다.

본 논문에서는 유클리드 **원론**에서 작도 문제에 대한 근거를 제시해 주는 원론의 공준 1, 2, 3을 분석하여, 모어-마스케로니의 정리에 대한 타당성을 부여할 수 있는 기본 작도 문제들로 첫째 두 점에 의해 주어진 직선에 속하는 두 점의 작도, 둘째 두 점에 의해 주어진 두 직선의 교점 작도, 셋째 주어진 원과 두 점에 의해 주어진 직선의 교점 작도 등을 추출하였다. 이 작도 문제는 정리로써 작도 방법에 대한 탐구가 이루어졌으며, 이 작도 문제와 관련된 몇몇 문제들은 보조 정리들로 함께 소개되어 있다.

참고 문헌

1. 우정호, **수학 학습-지도 원리와 방법**, 서울대학교 출판부, 2000.
2. 이종우 편저, **기하학의 역사적 배경과 발달**, 경문사, 1999.
3. 장혜원, "중학교 기하 영역 중 작도 단원에 관한 고찰," **대한수학교육학회논문집** 제 7 권 제 2 호(1997).
4. 정창현, "평면 도형의 작도에 관한 고찰," **수학교육**(한국수학교육학회 시리즈 A) 제 31 권 제 4 호(1992), 83-92.
5. 한인기, "작도 문제 해결 방법," **수학교육 논문집**(한국수학교육학회 시리즈 E) 9(1999), 153-164.
6. 한인기, "작도 문제를 활용한 심화학습 교재 개발에 관한 연구," **수학교육 학술지**(한국수학교육학회 시리즈 F) 5(2000), 게재 예정.

<러시아어 참고 문헌>

7. 꼬스토프스키 A.N. **컴퍼스를 이용한 기하학적 작도**. 과학 출판사, 모스크바, 1984.