*Historia Mathematica Vol. 13, No. 2, 2000, 95-104*

# Continuous Frames and Countably Approximating Frames

충북대학교 수학과 **이승온**

## Abstract

This paper is a sequel to [24]. It is well known that the order structure plays the important role in the study of various mathematical structures. In 1972, Scott has introduced a concept of continuous lattices and has shown the equivalence between continuous lattices and injective $T_0$ - spaces. There have been many efforts made to generalize continuous lattices and extend corresponding properties to them. We introduce another class of frames, namely countably approximating frames, generalizing continuous frames and study its basic properties.

## 0. 서론

수학적 구조는 대수적 구조, 위상적 구조와 순서 구조로 대별되고 또 이들의 복합 구조로 이루어졌다. 이 중에서 순서 구조는 그 자체의 연구뿐만 아니라 논리의 수학화와 다른 수학적 구조를 연구하는 데 필수적으로 쓰인다[7, 12, 13].

대수적 구조의 연구는 congruence relation과 부분대수의 격자적 구조를 통하여 이루어지고, 실수의 완비성은 실수가 Dedekind complete라는 사실과 동치이다. 또 거리공간의 구조도 실수의 순서 구조를 이용하여 밝혀지고 있다.

위상적 구조는 filter의 수렴, 즉 convergence structure에 의하여 결정되는데, filter는 순서구조에 의하여 정의된다. 격자(lattice)의 개념은 논리학자들에 의하여 처음 도입되었고, 그후 19세기 말과 20세기 초에 Dedekind[9]에 의하여 수학적으로 정의되어, 수학적 구조의 연구에 대단히 중요한 역할을 하였다. 그러나 1930년대까지는 제대로 인지되지 못하였고,

* 1991 Mathematical Subject Classification - 06A99, 54A99, 54D99

Birkhoff에 의하여 다시 정의되었다([6], [25] 참조).

1936년 Stone[22]은 Boolean logic을 수학화한 Boolean algebra와 zero-dimensional compact space 사이에 duality 관계가 있음을 밝힘으로써 위상적 구조와 순서 구조의 관계가 정립되기 시작하였다. 또 Wallman[23]이 위상 공간의 폐집합의 격자에서 maximal filter의 filter space로 위상 공간의 compactification을 구성하였다. 실제로 정칙 위상 공간인 경우, Wallman compactification은 Stone-Čech compactification과 같아진다. 따라서 extension theory도 폐집합의 격자를 통하여 연구가 진행되고 이는 clopen set, zero-set, regular open set의 격자 등으로 확장되었다.

1930년 Brouwerian logic(intuitionistic approach to Mathematics)의 수학화로 Heyting algebra가 도입되었고[14], 1958년 Bénabou에 의하여 complete Heyting algebra(=frame=pointfree topology)가 위상 구조를 연구하는데 적절한 격자임이 밝혀졌다[5].

1972년 Scott[21]은 continuous lattice를 정의하고, continuous lattice와 injective $T_0$-space는 서로 동치임을 보였다.

1973~1974년에 걸쳐 Hofmann과 Stralka에 의하여 continuous lattice는 재창조되었다. 이들은 Lawson semilattice로 알려진 compact topological semilattice에 관하여 연구한 결과, continuous lattice와 compact Lawson semilattice는 같다는 것을 발견하였다[10].

임의의 meet와 directed join에 관하여 algebraic lattice는 two point chain의 product의 sublattice인데, Lawson[18]은 continuous lattice가 unit interval의 product의 sublattice임을 증명하였다.

임의의 위상 공간 $X$의 topology $\Omega(X)$는 frame이 된다. 1970년 Day와 Kelly는 $X$가 locally quasicompact일 때, $\Omega(X)$는 continuous frame임을 보였다[8].

continuous lattice를 일반화시키고 그 일반화된 공간의 성질을 연구하려는 많은 시도가 행해졌으며[1, 2, 3, 11, 15, 16, 20], Banaschewski, Brümmer, Dowker, Ehresmann, Hoffmann, Isbell, Johnstone, Keimel, Mislove, Mulvey, Papert, Pultr, Simmons 등이 pointfree topology의 구조를 통하여 위상 구조를 연구하였다. 1981년 Johnstone[17]이 Tychonoff 정리가 frame의 setting에서 axiom of choice와 무관함을 증명함으로써 이 분야에 대한 연구가 급속히 확대되었고, 1990년대에 Banaschewski, Hong[4]은 frame의 convergence structure와 strict extension을 도입하여 frame의 extension을 정리하였다.

compact space의 일반화로 locally compact space와 Lindelöf space의 개념이 있다. 이들은 continuous frame과 Lindelöf frame으로 일반화되어 위상 공간과 다른 현상이 나타난다. 예를 들면, Lindelöf frame은 frame category의 coreflective subcategory를 이루고, 또한 coproductive임이 밝혀졌다[20].

이 논문에서는 1988년 locally Lindelöf space의 일반화로 도입한 countably way below relation과 countably approximating lattice의 개념[19]을 frame의 setting에서 정의한다. 즉, continuous frame의 일반화로 countably approximating frame의 개념을 도입한다.

## 1. Continuous Frames

이 절에서 우리는 Frame에서의 way below relation을 정의하고, continuous frame을 소개한다.

1.1 **정의.** $(X, \leq)$는 순서집합(partially ordered set 혹은 poset)이고, 특별히 혼동할 염려가 없을 때 우리는 순서집합 $(X, \leq)$를 간단히 $X$로 표시한다.

1) 순서집합 $(X, \leq)$에 대하여, $\leq^{op}$을 $(x \leq^{op} y \Leftrightarrow y \leq x)$로 정의하면 $(X, \leq^{op})$ 또한 순서집합이 된다. $(X, \leq^{op})$을 $X^{op}$이라고 표시한다.
   $(\leq^{op})^{op} = \leq$이므로, 순서집합은 쌍대의 원리(duality principle)를 갖는다.

2) 두 순서집합 $X$와 $Y$ 사이의 함수 $f: X \to Y$가 $a \leq b$에 대하여 $f(a) \leq f(b)$를 만족시킬 때 $f$를 증가함수(isotone 혹은 increasing map)라 한다.
   임의의 순서집합 $X$에 대하여 항등함수 $1_X: X \to X$는 증가함수이고, 증가함수의 합성 또한 증가함수이다.

3) $S$는 순서집합 $(X, \leq)$의 부분집합이고, $u \in X$이다.
   (1) 임의의 $s \in S$에 대하여 $s \leq u$를 만족시키는 $u$를 $(X, \leq)$에서 $S$의 상계(upper bound)라 하고, $(X, \leq^{op})$에서 $S$의 상계를 $(X, \leq)$에서 $S$의 하계(lower bound)라 한다.
   (2) $u$가 $S$의 상계이고, $S$의 임의의 상계 $v$에 대하여 $u \leq v$일 때 $u$를 $(X, \leq)$에서 $S$의 join이라 하고, $(X, \leq^{op})$에서 $S$의 join을 $(X, \leq)$에서 $S$의 meet라 한다.
   (3) $S$의 임의의 유한부분집합의 상계가 $S$ 안에 존재할 때, $S$를 directed라 한다.
   (4) $S$의 임의의 가산부분집합의 상계가 $S$ 안에 존재할 때, $S$를 countably directed라 한다.
   (5) $S = \downarrow S$일 때, $S$를 lower set이라고 한다.
   (6) $S$가 directed lower set일 때 ideal이라 하고, ideal 전체의 집합은 $\mathrm{Id}(X)$로 표시한다.
   (7) $S$가 countably directed lower set일 때 $\sigma$-ideal이라 하고, $\sigma$-ideal 전체의 집합은 $\sigma\mathrm{Id}(X)$로 표시한다.

1.2 **표시법.** 1) 순서집합 $X$의 부분집합 $S$에 대하여 $S$의 join은 $\bigvee S$, $S$의 meet는 $\bigwedge S$로 나타낸다. $S = \{a, b\}$일 때, $\bigvee S = a \vee b$, $\bigwedge S = a \wedge b$로 나타낸다.

2) 순서집합 $X$의 최대원(top element)은 $1$, 최소원(bottom element)은 $0$으로 나타낸다. 만약 이들이 존재하면 $\bigwedge \varnothing = 1$이고 $\bigvee \varnothing = 0$이다.

**1.3 정의.** 1) 순서집합 $L$의 모든 유한부분집합이 join과 meet를 가질 때, $L$을 격자(lattice)라고 한다.

2) 격자 $L$의 임의의 원소 $a$, $b$, $c$에 대하여 다음이 성립할 때 $L$을 분배격자(distributive lattice)라 한다

$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$ 또는 동치 조건으로 $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$

3) 격자 $L$의 원소 $a$에 대하여 $x\wedge a=0$, $x\vee a=1$을 만족시키는 $L$의 원소 $x$를 $a$의 complement라 한다.

4) 분배격자 $L$의 모든 원소가 complement를 가질 때, $L$을 Boolean algebra라고 한다.

5) $S$와 $T$는 순서집합이고, $f:S\to T$와 $g:T\to S$는 증가함수이다.

$x\in S$와 $y\in T$에 대하여 $f(x)\leq y \Leftrightarrow x\leq g(y)$일 때,

$(f, g)$를 $S$와 $T$ 사이의 adjunction 또는 Galois connection이라 한다.

이 때, $f$를 $g$의 left adjoint, $g$를 $f$의 right adjoint라 하고, $f\dashv g$로 나타낸다.

6) 순서집합 $L$의 모든 부분집합이 meet와 join을 가질 때 $L$을 완비격자(complete lattice)라고 한다.

7) 격자 $L$의 임의의 $a$와 $b$에 대하여 $c\wedge a\leq b \Leftrightarrow c\leq a\to b$인 $a\to b$가 $L$에 존재할 때, $L$을 Heyting algebra라고 한다.

8) Heyting algebra $L$의 원소 $a$에 대하여, $a\to 0$을 $a$의 pseudocomplement라 하고, 이를 $a^*$로 표시한다.

9) 완비격자 $L$이 Heyting algebra일 때, $L$을 frame이라고 한다.

집합 $X$의 멱집합 $2^X$는 $\subseteq$에 관하여 frame을 이룬다. $\mathrm{Fin}(X)=\{F\mid F$는 $X$의 유한부분집합$\}$는 $2^X$의 ideal이고, $\mathrm{Count}(X)=\{C\mid C$는 $X$의 가산부분집합$\}$는 $2^X$의 $\sigma$-ideal이다. 만약 $X$가 무한집합이면, Fin($X$)는 directed이지만 countably directed는 아니다.

**1.4 Remark.** 1) $S$와 $T$가 순서집합일 때, left adjoint는 join을 보존하고, right adjoint는 meet를 보존한다. 만약 $S$와 $T$가 complete이면, 증가함수 $g:S\to T$가 left adjoint를 갖기 위한 필요충분조건은 $g$가 임의의 meet를 보존하는 것이다.

2) 격자 $L$이 Heyting algebra가 되기 위한 필요충분조건은 $L$의 임의의 원소 $a$에 대하여 함수 $a\wedge_:L\to L$이 right adjoint를 갖는 것이다.

따라서 $a\wedge_ \dashv a\to_$이고, $a\wedge_:L\to L$은 join을 보존한다. 즉, 임의의 $S\subseteq L$에 대하여 다음을 만족한다.

$a\wedge(\bigvee S)=\bigvee\{a\wedge s\mid s\in S\}$

**1.5 예.** 1) 완비 Boolean algebra는 frame이다.

2) 완비 chain은 frame이다.

3) 유한분배격자는 frame이다.
4) 위상 공간 $X$의 topology $\Omega(X)$는 frame이며, 이를 $X$의 open set frame이라고 부른다.
임의의 $U \in \Omega(X)$에 대하여, $U^{*}=(\complement U)^{\circ}=\complement(\mathrm{cl}U)$ ( $(\complement U)^{\circ}$는 $U$의 여집합의 interior, $\mathrm{cl}U$는 $U$의 closure)이고, $U$가 dense이기 위한 필요충분조건은 $U^{*}=0$이다.

**1.6 정의.** $x$와 $y$는 frame $L$의 원소이고, D는 $L$의 directed 부분집합이다. $y \le \bigvee \mathrm{D}$일 때, $x \le d$인 $d$가 D 안에 존재하면, $x$는 way below $y$라 하고 $x \ll y$로 나타낸다. 만약 $x \ll x$이면, $x$를 compact 원소라고 한다.

**1.7 예.** $x$와 $y$가 완비 chain $L$의 원소일 때 다음을 만족한다.
1) $x<y \Rightarrow x \ll y$.
2) $x \ll y \Rightarrow x<y$ 또는 $x=0$ 또는 $x \ll x=y$.
3) $L^{I}$의 원소 $a=(a_i)_{i\in I}$, $b=(b_i)_{i\in I}$에 대하여, 다음은 서로 동치이다.
(1) $a \ll b$
(2) 모든 $i \in I$에 대하여 $a_i \ll b_i$이고, 유한 개를 제외한 모든 $j \in I$에 대하여 $x_j=0$이다.
4) $A$가 ring일 때, $A$의 two-sided ideal 전체의 집합 $\mathrm{Id}(A)$는 완비격자를 이룬다.
임의의 $I \in \mathrm{Id}(A)$에 대하여 다음이 성립한다.
$I=\bigvee\{I_J \mid J \in \mathrm{Fin}I$, $I_J$는 $J$에 의하여 생성된 ideal$\}$
$=\bigcup\{I_J \mid J \in \mathrm{Fin}I$, $I_J$는 $J$에 의하여 생성된 ideal$\}$
그러므로 $I \ll K$이기 위한 필요충분조건은 $I \ll F \ll K$인, 유한 개의 원소에 의하여 생성된 ideal $F$가 존재하는 것이다.
5) $L$이 위상공간 $X$의 open set frame $\Omega(X)$일 때, $U, V \in L$에 대하여 다음을 만족한다.
(1) $U \subseteq F \subseteq V$인 $X$의 quasicompact 부분집합 $F$가 존재하면, $U \ll V$이다.
(2) $X$의 임의의 점 $x$가 $\{V \mid V$는 $x$의 quasicompact neighborhood$\}$를 local base로 가질 때, 즉 $X$가 locally quasicompact일 때, $U \ll V$이면, $U \subseteq F \subseteq V$인 $X$의 quasicompact 부분집합 $F$가 존재한다.

**1.8 정리.** frame $L$의 원소 $x$와 $y$에 대하여 다음은 서로 동치이다.
1) $x \ll y$.
2) $y=\bigvee X$ $(X \subseteq L) \Rightarrow x \le \vee F$인 $X$의 유한부분집합 $F$가 존재한다.
3) $y=\bigvee I$ $\quad (I \in \mathrm{Id}(L)) \Rightarrow x \in I$

**1.9 정의.** frame $L$의 임의의 원소 $x$를 $x=\bigvee \Downarrow x$로 나타낼 수 있을 때, $L$을 continuous frame이라고 한다.

**1.10 예.** 1) 모든 완비 chain은 continuous frame이다.

2) $L$이 완비 chain일 때, $L^I$는 continuous frame이다.

3) $A$가 ring일 때, Id($A$)는 continuous frame이다.

4) $X$가 locally quasicompact일 때, $\Omega(X)$는 continuous frame이다.

5) $X$가 regular이고 $\Omega(X)$가 continuous frame이면, $X$는 locally quasicompact이다.

## 2. Countably Approximating Frames

이 절에서 우리는 countably way below relation을 이용하여 continuous frame을 일반화시킨 countably approximating frame을 정의한다.

**2.1 정의.** $x$와 $y$는 frame $L$의 원소이고, $D$는 $L$의 countably directed 부분집합이다. $y \le \bigvee D$일 때, $x \le d$인 $d$가 $D$ 안에 존재하면, $x$는 countably way below $y$라 하고 $x \ll_c y$로 나타낸다. 만약 $x \ll_c x$이면, $x$를 Lindelöf 원소라고 한다.

**2.2 정리.** frame $L$의 원소 $x$와 $y$에 대하여 다음은 서로 동치이다.

1) $x \ll_c y$.

2) $y = \bigvee X$ $(X \subseteq L)$ $\Rightarrow$ $x \le \bigvee K$인 $X$의 가산부분집합 $K$가 존재한다.

3) $y = \bigvee I$ $\quad (I \in \sigma\mathrm{Id}(L))$ $\Rightarrow$ $x \in I$

**증명.** 1) ⇒ 2) $D = \{\bigvee K \mid K \in \mathrm{Count}(X)\}$는 countably directed이고 $\bigvee D = \bigvee X$이다. 1)에 의하여 $x \le d$인 $d$가 $D$에 존재하고, 적당한 $K \in \mathrm{Count}(X)$에 대하여 $d = \bigvee K$가 된다.

2) ⇒ 3) $y = \bigvee I$인 $\sigma$-ideal $I$에 대하여 2)에 의해 $x \le \bigvee K$인 $I$의 가산부분집합 $K$가 존재한다. $I = \downarrow I$이고 countably directed이므로 $\bigvee K \in I$이고, $x \in I$이다.

3) ⇒ 1) $D$가 $y \le \bigvee D$인 countably directed 집합일 때, $I = \downarrow D$는 $\sigma$-ideal이고 $\bigvee D = \bigvee I$이다. 또한 $L$이 frame이므로 $y = y \wedge (\bigvee D) = \bigvee \{y \wedge x \mid x \in D\}$가 되어 $y = \bigvee (I \cap \downarrow y)$이다. 따라서 3)에 의하여 $x \in I \cap \downarrow y = \downarrow D \cap \downarrow y$이다. 즉 $x \le d$인 $D$의 원소 $d$가 존재한다.

**2.3 예.** 1) $L$은 집합 $X$의 멱집합 frame인 $2^X$이다. $A$와 $B \in L$에 대하여 $A \ll_c B$가 되기 위한 필요충분조건은 $A \subseteq K \subseteq B$인 $X$의 가산부분집합 $K$가 존재하는 것이다.

2) $L$은 unit interval [0, 1]에 usual order $\leq$가 주어진 frame이다. $L$의 임의의 원소 $x$는 Lindelöf 원소이다. 그러나 compact 원소는 0밖에 없다.

3) $x$와 $y$가 완비 chain $L$의 원소일 때 다음을 만족한다.

(1) $x < y \Rightarrow x \ll_c y$.

(2) $x \ll_c y \Rightarrow x < y$ 또는 $x=0$ 또는 $x \ll_c x = y$.

4) $L^I$의 원소 $a=(a_i)_{i \in I}$, $b=(b_i)_{i \in I}$에 대하여, 다음은 서로 동치이다.

(1) $a \ll_c b$

(2) 모든 $i \in I$에 대하여 $a_i \ll_c b_i$이고, 가산 개를 제외한 모든 $j \in I$에 대하여 $x_j=0$이다.

**2.4 정의.** 위상 공간 $X$의 임의의 점 $x$가 $\{V \mid V$는 $x$의 Lindelöf neighborhood$\}$를 local base로 가질 때, $X$를 locally Lindelöf라고 한다.

**2.5 예.** 1) locally compact 공간은 locally Lindelöf 공간이다.

2) 유리수의 집합 $Q$에 usual topology가 주어진 경우의 open set frame $\Omega(Q)$는 locally Lindelöf 공간이지만, locally compact 공간은 아니다.

**2.6 정리.** $L$이 위상 공간 $X$의 open set frame $\Omega(X)$일 때 $U$, $V \in L$에 대하여 다음을 만족한다.

1) $U \subseteq K \subseteq V$인 $X$의 Lindelöf 부분집합 $K$가 존재하면, $U \ll_c V$이다.

2) $X$가 locally Lindelöf일 때, $U \ll_c V$이면, $U \subseteq K \subseteq V$인 $X$의 Lindelöf 부분집합 $K$가 존재한다.

**증명.** 1) $U \subseteq K \subseteq V$인 $X$의 Lindelöf 부분집합 $K$가 존재하면, $V$의 임의의 open cover $\mathscr{C}$는 $K$의 open cover가 된다. $K$는 $X$의 Lindelöf 부분집합이므로 $\mathscr{C}$의 가산부분집합 $\mathscr{C}'$이 존재하여 $\mathscr{C}'$도 $K$의 open cover가 되고, 따라서 $\mathscr{C}'$은 $U$의 가산 open cover이다. 즉, $U \ll_c V$이다.

2) $X$가 locally Lindelöf일 때, $U \ll_c V$이면, $V$의 임의의 원소 $b$는 $Q_b \subseteq V$인 Lindelöf neighborhood $Q_b$를 갖는다. 따라서 $V = \cup\{Q_b{}^{\circ} \mid b \in \mathrm{V}$, 여기서 $Q_b{}^{\circ}$는 $Q_b$의 interior$\}$가 된다. $U \ll_c V$이므로, $U \subseteq \cup\{Q_{bn}{}^{\circ} \mid n \in N\}$인 $V$의 가산부분집합 $\{b_n \mid n \in N\}$이 존재한다. 이 때, $K = \cup\{Q_{bn} \mid n \in N\}$은 $X$의 Lindelöf 부분집합이고, $U \subseteq K \subseteq V$가 된다.

**2.7 정리.** frame $L$의 원소 $x$, $y$, $u$, $v$, $x_n$ $(n \in N)$에 대하여 다음을 얻는다.

1) $x \ll_c y \Rightarrow x \leq y$.

2) $u \leq x \ll_c y \leq v \Rightarrow u \ll_c v$.

3) $x_n \ll_c y \ \forall n \in N \Rightarrow \bigvee\{x_n \mid n \in N\} \ll_c y$.

4) $0 \ll_c x$.

5) $x \ll y \Rightarrow x \ll_c y$.

frame $L$의 원소 $x$에 대하여 $\downarrow_c x = \{y \in L \mid y \ll_c x\}$는 정리 2.7의 2), 3), 4)에 의하여 $L$의 $\sigma$-ideal이 된다.

**2.8 정의.** frame $L$의 임의의 원소 $x$를 $x = \bigvee \downarrow_c x$로 나타낼 수 있을 때 $L$을 countably approximating frame이라고 한다.

**2.9 정리.** frame $L$에 대하여 다음은 서로 동치이다.

1) $L$은 countably approximating frame이다.

2) $L$의 원소 $x$와 $y$에 대하여 $x \not\leq y$이면, $u \ll_c x$이고 $u \not\leq y$인 $L$의 원소 $u$가 존재한다.

**증명.** 1) $\Rightarrow$ 2). $x \not\leq y$이고 $u \ll_c x$인 $L$의 모든 원소 $u$는 $u \leq y$가 된다고 가정하자. 1)에 의하여 $x = \bigvee\{u \mid u \ll_c x\}$이므로 $x \leq y$가 되어 모순이다.

2) $\Rightarrow$ 1). 정리 2.7의 1)에 의하여 $x \geq \bigvee\{u \mid u \ll_c x\}$이다. $x \not\leq \bigvee\{v \mid v \ll_c x\} = y$라고 가정하면, 2)에 의하여 $u \ll_c x$이고 $u \not\leq y$인 $L$의 원소 $u$가 존재한다. 그러나 $y$의 정의에 의하여 $u \leq y$이므로 모순이다.

**2.10 예.** 1) continuous frame은 countably approximating frame이다.

2) 가산 frame은 countably approximating frame이다.

3) locally Lindelöf 공간 $X$의 open set frame $\Omega(X)$는 countably approximating frame이다.

4) countably approximating frame은 일반적으로 continuous frame이 아니다. 예를 들어 유리수의 집합 $Q$에 usual topology가 주어진 경우의 open set frame $\Omega(Q)$는 countably approximating frame이나, continuous frame은 아니다.

정리 2.7의 2)에 의하여, countably approximating frame $L$의 원소 $x$와 y는 다음을 만족시킨다.

$$x \leq y \Leftrightarrow \downarrow_c x \subseteq \downarrow_c y$$

**2.11 정리.** $X$는 정칙 공간이고 $\Omega(X)$가 countably approximating frame이면, $X$는 locally Lindelöf 공간이다.

**증명.** $x$는 $X$의 임의의 점이고, $V$는 $x$의 open neighborhood이다. $\Omega(X)$가 countably approximating frame이므로 $x \in U \ll_c V$인 $U$가 $\Omega(X)$에 존재한다. $X$는 정칙 공간이므로 $\mathrm{cl}W \subseteq U$가 되는 $x$의 open neighborhood $W$가 존재한다. $\mathcal{L} = \{G_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$가 $\mathrm{cl}W$의 임의의 open cover일 때, $\mathcal{L} \cup \{X - \mathrm{cl}W\}$도 $V$의 open cover가 된다. $U \ll_c V$가 되므로 $\mathcal{L} \cup \{X - \mathrm{cl}W\}$의 가산부분집합이 존재하여 $U$를 cover한다. 따라서 $\mathcal{L}$의 가산부분집합이 $\mathrm{cl}W$의 cover가 된다. 즉 $\mathrm{cl}W$는 $x$의 Lindelöf neighborhood이고, $V$에 포함된다.

예 2.10의 3)과 정리 2.11에 의하면, 정칙 공간 $X$가 locally Lindelöf가 되기 위한 필요충분조건은 open set frame $\Omega(X)$가 countably approximating frame이 되는 것이다.

## 3. 결론

우리는 앞에서 way below relation을 일반화시킨 countably way below relation과 continuous frame을 일반화시킨 countably approximating frame을 정의하였다. 또한 pointfree topology에서 locally Lindelöf space를 소개하고, 정칙공간 $X$가 locally Lindelöf가 되기 위한 필요충분조건은 open set frame $\Omega(X)$가 countably approximating frame임을 보였다.

## 참고 문헌


1. Banaschewski, B., "Hulls, kernels, and continuous lattices," *Houston J. Math.* 4(1978), 517-525.
2. Banaschewski, B., "Coherent frames," *Lect. Notes in Math.* 871(1981), Springer-Verlag, 1-11.
3. Banaschewski, B., "The duality of distributive-continuous lattices," *Lect. Notes in Math.* 871(1981), Springer-Verlag, 12-19.
4. Banaschewski, B. and S.S. Hong, "Filters and Strict Extensions of Frames," *Kyungpook Math. J.* 39(1999), 215-230.
5. Bénabou, J., "Treillis locaux et paratopologies," *Séminaire Ehresmann*(Topologie et Géométrie Différentielle), 1re année(1957-8), exposé 2.
6. Birkhoff, G., "On the combination of subalgebras," *Proc. Camb. Phil. Soc.* 29, 1933, 441-464.
7. Birkhoff, G., *Lattice Theory*, 3rd ed., Amer. Math. Soc., Providence, 1967.

8. Day, B.J. and G.M. Kelly, "On topological quotient maps preserved by pull-backs or products," *Proc. Cambridge Philos.* 67(1970), 553-558.
9. Dedekind, R., "Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre grössten gemeinsamen Teiler," *Festschrift Techn. Hoch. Braunschweig*(1897), and Ges. Werke, Vol. II, 103-148.
10. Gierz, G., K.H. Hofmann, K. Keimel, J.D. Lawson. M. Mislove, and D.S. Scott, *A Compendium of Continuous Lattices*, Springer-Verlag, New York, 1980.
11. A. Gilmour, C.R.A., "Realcompact-fine Alexandroff spaces," session on *Cat. Alg. and Top.*, Univ. of Cape Town, 65-77.
12. Grätzer, G., *General Lattice Theory*, Birkhäuser, Basel, 1978.
13. Grätzer, G., *Universal Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1979.
14. Heyting, G., *Studies in Logic and the foundations of Mathematics*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1980.
15. Hoffmann, R.-E., "Continuous posets and adjoint sequences," *Semigroup Forum* 8 (1979), 173-188.
16. Hoffmann, R.-E., "Continuous posets, prime spectra of completely distributive complete lattices, and Hausdorff compactifications," *Lect. Notes in Math.* 871(1981), Springer-Verlag, 159-208.
17. Johnstone, P.T., *Stone Space*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982.
18. Lawson, J.D., "Topological semilattices with small semilattices," *J. London Math. Soc.* 2(1969), 719-724.
19. Lee, S.O., "On Countably Approximating Lattices," *J. of KMS* 25(1988), 11-23.
20. Madden, J. and J. Vermeer, "Lindelöf locales and realcompactness," *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* 99(1986), 473-480.
21. Scott, D.S., "Continuous lattices," *Lect. Notes in Math.* 274(1972), Springer-Verlag, 97-136.
22. Stone, M.H., "The theory of representations for Boolean algebras," *Trans. Amer. Math. Soc.* 40(1936), 37-111.
23. Wallman, H., "Lattices and topological spaces," *Ann. Math.* 3a(1938), 112-126.
24. 이승온, "직관주의 논리," 한국수학사학회지 제 12 권 제 1 호(1999), 32-44.
25. 홍영희, "격자론의 기원," 한국수학사학회지 제 12 권 제 2 호(1999), 15-23.