

# 하이퍼미디어를 활용한 수학 교수자료의 개발과 활용 — interactive 수학 소프트웨어와의 연결성 — \*

건국대학교 수학교육과 장경윤

## Abstract

This paper introduces an hypermedia program supportable for teaching secondary and upper secondary level geometry. This program links users to files written in other softwares and internet web sites to provide information and exploratory environments with softwares. The linkage with the interactive dynamic software(GSP) files to teach hyperbolic geometry is illustrated with sample screens.

## 0. 서론

현대는 정보화사회로 불리며 이를 주도하고 있는 것이 컴퓨터이다. 학생들 주변의 상황은 정보통신망의 광범위한 보급, 통신속도와 컴퓨터의 자료 처리 속도의 증대, 학교 교단 선진화를 위한 정부차원에서의 학교현장 지원 등으로 컴퓨터 활용을 위한 하드웨어 방면의 지원은 학생들의 심리적인 요구에 부응할 수 있는 소프트웨어와 코스웨어의 공급이 절실한 실정이다. 하이퍼미디어(Hypermedia)는 텍스트, 그래픽, 사운드, 비디오 등의 정보를 하나로 조직할 수 있게 하는 것으로서 대화형 멀티미디어의 하나이다. 본 연구는 하이퍼미디어 저작도구의 하나인 Visual Basic을 사용하여 수학 교육에 활용 가능한 교수-학습자료를 개발하고 그 활용방안을 제시하기 위하여 설계되었다.

## 1. 이론적 배경

---

\* 이 논문은 1997년도 건국대학교 교내학술진흥 연구비에 의하여 연구되었음.

### 1-1. 하이퍼미디어

하이퍼미디어(Hypermedia)는 그래픽이나 동화상, 정지화면, 비디오를 포함하여 텍스트를 넘어서 상징적인 표현들을 다룬다는 점에서 멀티미디어(multimedia)와 유사하나 정보 덩어리들 사이에 내재된 구조나 연결된 망이 존재한다는 점에서 멀티미디어와 근본적인 차이점이 있다. 각 덩어리들은 노드(node)라고 불리며 노드들은 여러 가지 다양한 방법으로 다른 것들과 연결되어 있다. 이런 구조의 유형을 하이퍼미디어라 하며 사용자는 정보가 상호 연결되어 있거나 조직되어 있는 방법에 따라 여러 가지 비선형적(non-linear)인 경로로 정보에 접할 수 있게 된다. 또한 기존의 정보체계에 새로운 모듈을 쉽게 추가할 수 있다는 점이 하이퍼텍스트의 장점이다[8].

교육 영역에서 하이퍼미디어는 대략 두 가지 목적으로 활용되고 있다(Wisnudel, 1994). 한 가지는 Russell과 Dromsky(1995)에서와 같이 주로 강의를 위하여 제시용으로 사용하는 것이다. 이미 많은 컴퓨터 소프트웨어의 설치 및 사용법이 하이퍼텍스트로 제작되어 매뉴얼로 제공하고 있는 것이 그와 같은 예이다. 다른 한 가지는 학습자가 직접 자신의 가공적인 하이퍼미디어 세계를 구축하도록 하는 것으로 수학 및 과학교육 영역에서 프로그래밍과 같은 것이다.

Russell과 Dromsky(1995)는 컴퓨터 강의를 위하여 HYPERCOMP라는 하이퍼텍스트 도구를 개발하여 과제제시, 독서목록제시, 설명, 복습, 개인교습용으로 사용하였다. 이 프로그램은 텍스트를 훈련과 연습을 결합할 수 있도록 제시하고, 동화상, 모의실험 등을 할 수 있도록 고안하여 컴퓨터보조수업의 도구로 활용되고 있다. 학생들로 하여금 그들 자신의 하이퍼미디어 가공물을 구성하게 하는 것은 동기유발, 프로그래밍을 통한 수학적 사고의 학습, 그리고 구성주의와 개념적인 이해를 촉발한다는 점에서 이점이 있다[12]. Winudel[12]은 학생들에게 하이퍼미디어 가공물을 계획하고 만들도록 함으로써 그들을 학습과정에 참여시킬 수 있으며, 그들이 색다른 학습경험에 참여하고 있다는 사실 때문에 동기유발이 될 수 있다고 하였다. 하이퍼미디어 가공물 구축은 Papert가 언급한 수학과 과학교육 영역에서의 프로그래밍이 줄 수 있는 장점, 즉 학생들의 모의실험 제작을 통해 그들을 모델링과 설계 과정에 몰입하게 하며 프로그램에서의 오류수정 과정에서 자신의 이론을 수정해 가고 설계해 가는 과정에서 학습을 구조화해 가는 과정과 동일한 경험을 제공할 수 있다. 학습을 의미의 구성이라 믿는 구성주의 인지심리학의 입장에서 볼 때, 학생들 자신의 가공물 설계와 구성은 개념적인 이해를 개발하기 위해 그들은 자신들이 이미 가지고 있던 아이디어와 신념을 새로운 정보에 동화시키는 일을 하는 것으로 생각할 수 있다.

위의 두 가지 용도 외에 기하 문제해결을 위한 정보를 제공하며 동시에 문제해결과정에서의 추론 연구에 각각 HyperCard와 Visual Basic 등의 하이퍼미디어 프로그래밍 프로그램의 유용성을 확인된 바 있다[1]. 본 연구에서는 강의를 위한 제시용으로 하이퍼미디어를 활용되 상호작용을 허용하는 역동적 소프트웨어(GSP)와 프로그램을 연계하여 단순한 정보 제시를 넘어서 학습자에게 탐구활동의 기회를 제공하고자 한다.

## 1-2. 수학교육을 위한 컴퓨터 소프트웨어

수학교육을 위해 사용되는 소프트웨어로는 C나 PASCAL 등 프로그래밍 언어, 그래프나 함수 등을 그리거나 도형을 그리는 그래픽 패키지, 수학적 개념 또는 문제들을 예시, 실연, 또는 모의실험하는 소프트웨어들, 수학적인 목적을 위해서 사용이 가능한 스프레드시트 같은 도구 프로그램들, 사용자가 대상들을 조정할 수 있도록 하는 소우주(micro world) 형태의 소프트웨어 등이 있다. 컴퓨터의 역할을 개인교수, 학습자(tutee), 도구로 분류한 Taylor 사용 미리 고안된 일련의 질문과 시험을 통해 학습자로 하여금 정해진 과정을 따르게 하는 '개별 학습용'의 컴퓨터보조학습(Computer Aided Instruction, CAI)이 수학교육에서의 컴퓨터 활용의 초기는 전통적으로 학교 수학에서 컴퓨터가 활용되는 방법이다. 수학교육에서 컴퓨터는 강의, CAI, 모의실험, 문제해결의 도구, 또는 탐구에 활용될 수 있으며, 강의를 위한 프로그램은 대부분 문제풀이와 연결되어 컴퓨터보조학습 형태에 통합되어 나타나게 되는데 이러한 프로그램 내에서 허용하고 있는 사용자의 반응은 매우 제한적이다.

## 1-3. 사용자와 상호작용을 하는 기하 소프트웨어들

Geometer's Sketchpad[3]나 Cabri Geometry[4]는 사용자와 소프트웨어의 상호작용을 전제로 하는 기하소프트웨어들이다. 이 둘은 기능이 유사하며 기본적으로 기하 작도도구로 제공되기도 하며 선분, 각, 면적 등 측정기능이 있고, 대상을 숨기거나 드러나도록 색깔 또는 선의 굵기 등을 조정할 수 있으며, 궤적 또는 동화상을 구현하기도 한다. 그러나 이 소프트웨어들의 강점은 평면에서 점, 선, 원, 평행 또는 수직선 등의 작도기능을 수행하며 도형의 작도과정을 갈무리하여 초기 기본도형의 위치나 형태를 변형하면 이와 관련된 도형들이 작도과정에서의 관계를 그대로 유지한 채 역동적인 변화를 시각적으로 보여줄 수 있다는 점이다. 즉, 이 둘은 사용자의 조작에 따라 작도 도구의 기능을 수행하며 도형의 작도과정을 갈무리함으로써 도형의 역동적인 변화를 사용자가 주도하며 이를 관찰함으로써 도형의 개념과 성질을 발견할 수 있게 하는 컴퓨터 프로그램으로써, 최근 이를 이용한 수학활동들[5, 9]이 활발히 개발되고 있다. 따라서 Cabri 등은 사용자의 능력에 따라 얼마든지 다른 수준에서 활용될 수 있는 탐구용 소프트웨어이며 사용자의 적극적인 참여를 전제로 한다는 점에서 프로그래밍 언어와 유사한 면이 있다.

## 1-4. van Hiele 모델과 기하교육

P.M. van Hiele와 D.G. van Hiele는 기하사고에 있어서 질적으로 다른 5개의 위계적인 수준이 있으며 각 수준마다 고유한 언어와 망(network)이 있다고 하였다. van Hiele 모델에 의하면 서로 다른 수준에서 사고하는 사람들 사이에는 의사소통에 문제가 있게 되며 이것이 기하학습의 장애로 작용한다고 보았다[13]. 즉, 도형을 시각적이고 전체적으로 인식하는 수준 1, 도형의 요소에 주목할 수 있게 되며 비로소 도형의 요소들 사이의 성질의 인식이 가

능한 수준 2, 정의를 바로 사용할 수 있고, 도형들 사이의 포함관계를 이해하게 되며 비형식적인 수준의 증명이 가능한 수준 3, 형식적 증명이 가능한 수준 4, 그리고 수학자의 엄밀성을 갖게되어 공리체계를 이해하고 창조도 가능한 수준 5로 발전된다는 것이다.

van Hiele 모델을 수학 교수-학습에 적용시키면 형식적인 증명의 지도에 앞서서 도형의 포함관계나 성질들을 파악할 수 있는 충분한 비형식적 기하경험의 중요성이 크게 부각되며 D.G. van Hiele는 이러한 기하 사고수준모델을 반영하는 교수활동들을 고안하여 실질적으로 수학수업을 시행하고 이를 서술한 바 있다. van Hiele 모델의 위계성은 이미 여러 연구[10, 11]에 의해 확인된 바 있으며 이러한 입장을 반영하여 구러시아와 미국에서는 비형식적 기하활동의 비중을 크게 한 기하교과서[2]가 제작되기도 하였다. van Hiele의 모델에 비추어 학습자들이 기하학습에서 겪고 있는 장애를 학습자와 학습과제가 요구하는 사고수준의 차이로 인식한다고 하면 기하학습을 돕기 위해 학생들에게 제공되어야 하는 우선적인 과제는 비형식적 탐구환경의 제공이라 할 수 있다.

비형식적인 탐구환경은 구체물이나 주변환경을 통해 제공될 수 있다. 그러나 탐구용 소프트웨어를 통한 학습자 주도적인 탐색환경은 구체물보다 상징적인 단계에 보다 가까우며 연속적인 기하학습과 구체물 사이의 간격을 좁혀 줄 수 있는 바람직한 환경이라 하겠다. 예를 들면 삼각형의 무게중심과 관련된 성질에 대한 증명에 앞서서 도형의 성질 자체를 귀납적 방법으로 추론해 내고 이를 연역적으로 증명할 필요성을 느껴서 증명에 임하게 될 때, 학습자들은 증명의 의미를 더 잘 이해할 수 있게 되며 그것이 곧 연역의 수준을 넘어 수학자의 엄밀성에 이르게 하는 과정이기도 한 것이다. 탐구형 소프트웨어는 이러한 비형식적 탐구환경을 제공한다는 점에서 기하학습을 도울 수 있다.

## 2. 하이퍼미디어를 활용한 기하 프로그램

본 연구를 위하여 하이퍼미디어 환경을 기본으로 하여 기하의 내용들을 담은 text 간에 이동이 가능할 뿐 아니라, 필요에 따라 기하 탐구용 소프트웨어인 Geometer's Sketchpad(이하 GSP)를 연결하여 탐색환경으로도 갈 수 있도록 프로그램을 제작하였다. 본 연구에서 하이퍼미디어 환경을 구축하기 위해서 사용한 소프트웨어는 MicroSoft사의 Visual Basic 5.0이다.

### 2-1. 프로그램 내용과 구성

본 연구에서 기하는 종합적 관점에서 접근한 유클리드 기하와 비유클리드 기하 영역이며 기하의 대수적인 접근이라 할 수 있는 해석 기하 부분은 본 연구에서 제외하였다. 본 연구에서는 기하의 전반적인 영역을 통합적으로 다루는 교수-학습 프로그램 제작의 첫 단계로서 프로그램 전체의 윤곽을 설계하고 하이퍼미디어 프로그램으로 작성하였다. 사용자들은

하이퍼미디어 상에서 해당 정보를 얻기도 하지만 필요에 따라 한글 파일이나 웹 페이지로 연결하여 추가적인 정보를 얻기도 하며, 실연과 탐구를 목적으로 제작된 GSP 파일로 이동하여 탐색을 할 수 있다.

초기 화면에서 기하의 뜻과 개괄적인 역사, 몇 가지 관점에서의 본 기하 분류 등이 제공되며 여기에서 사용자의 요청에 따라 한글 문서와 인터넷 홈페이지로 연결된다. 그 중에 유클리드 기하와 비유클리드 기하에 초점을 맞추어 내용을 전개한다. 프로그램 전체의 윤곽을 도해하면 다음 그림 1과 같다.

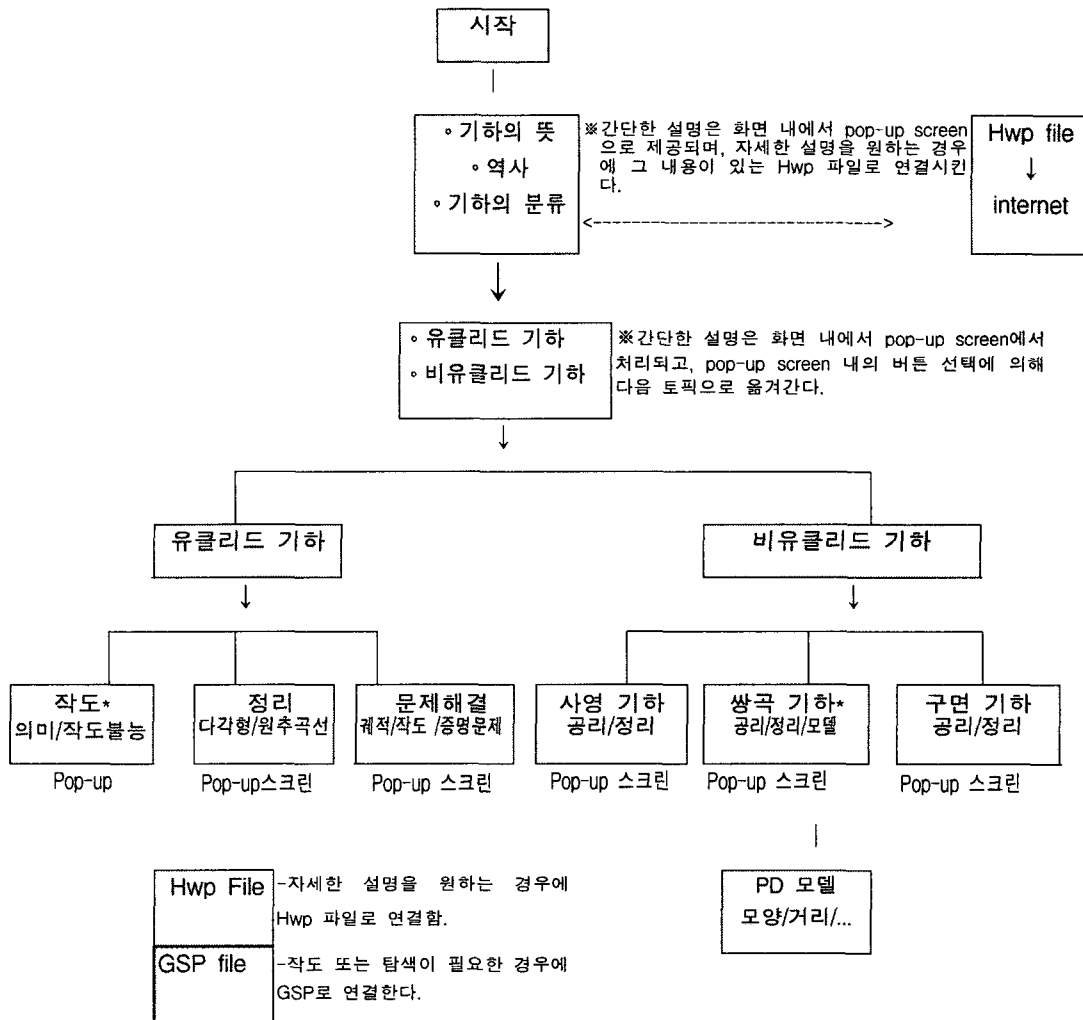


표 1 하이퍼미디어를 활용한 수학 교수 자료 개관

본 연구에서 제작한 프로그램은 유클리드 기하에서는 작도, 정리, 문제해결을 주요 토픽으로 하며 우선 작도 부분에 초점을 맞추었다. 작도에서는 작도 방법과 작도 방법의 타당성을 제시하도록 학생들에게 요구하며 여기에서 학생들은 문서 또는 GSP 파일로 문제해결에 도움을 받을 수 있다. 비유클리드 기하에서는 사영 기하, 쌍곡 기하, 구면 기하에서의 공리, 정리, 모델을 통한 탐색을 포함하되, 비유클리드 기하의 역사와 공리들, 특히 쌍곡 기하에 초점을 맞추고 직관적으로 자명하지 않은 쌍곡 기하의 성질들을 이해할 수 있게 하기 위하여 고안된 모형 세 가지(반평면 모델, 사영모델, 푸앵카레 디스크(PD) 모델)를 소개하며 특히 푸앵카레 모델을 중심으로 정리의 이해, 모델 내에서의 작도를 다루는 것으로 하였다. 나머지 부분들은 하이퍼미디어의 특성상 후에 언제든지 기존의 모듈에 추가 확장될 수 있다.

## 2-2. 프로그램 연결 구성

본 연구에서 개발한 프로그램은 하이퍼미디어용 제작도구인 MicroSoft사의 Visual Basic 6.0으로 제작되었다. Visual Basic은 자체 내에서 그림, 이미지, 텍스트, 목록, 명령버튼 제작을 용이하게 할 수 있으며 pop-up 화면에도 얼마든지 다양한 정보를 담을 수 있도록 하는 장점이 있다. 그러므로 간단한 설명이나 (동영상을 포함하여) 그림 등은 가능한 한 pop-up 화면을 활용하여 정보를 제공하되 경우에 따라 크게 두 가지 종류의 다른 소프트웨어와 연결이 될 수 있게 고안되었다. 즉, 어떤 주제에 관한 매우 자세한 설명을 원하는 경우에는 사용자의 요청에 따라 텍스트와 그림이 제공되는 한글(Hwp) 파일로 연결되고, 기하원리나 성질을 관찰이나 탐색을 원하는 경우, 또는 작도(construction)를 하려는 경우에는 기하 탐색용 소프트웨어인 GSP로 연결이 되도록 하였다. 예를 들면 정리의 증명이나 평행선 공준에 관한 상세한 역사 등을 위해서는 한글(Hwp) 파일을 열도록 하였고 작도나 궤적에 관한 문제해결, 다각형의 성질의 탐색, 또는 푸앵카레 디스크 모델에서의 직선 이해 등을 위해서는 사용자가 직접 작도나 조작에 참여할 수 있도록 상호작용이 허용되는 GSP 화일로 연결하였다. Hwp나 GSP로 연결된 경우 그 프로그램이 끝나면 자동적으로 직전의 Visual basic화면으로 환원하게 된다. 사용자는 pop-up 화면이나 본 화면의 특정 부분이나 버튼을 누름으로써 얼마든지 다른 비선형의 경로로 탐색할 수 있으며 Hwp 또는 GSP에서도 사용자가 원하는 만큼의 탐색이 가능하다.

### (1) 초기 화면

초기 화면에서 기하(geometry)의 뜻과 유래가 간단하게 화면에 텍스트로 나타나고 기하의 여러 영역에 관한 분류와 간단한 설명이 제시되며 사용자의 선택에 따라 다음과 같이 몇 가지 다른 경로로 관심 있는 자료들을 접할 수 있게 된다. 기하의 각 영역 부분(단어)을 클릭하면 그 특정 기하에 관한 설명이 pop-up 화면에 추가선택버튼과 함께 제시된다. 여기에서 '유클리드 기하와 비유클리드 기하'를 선택하면 다음 화면인 '유클리드 기하와 비유클리드 기하'로, 그 밖의 용어(아핀 기하, 위상 기하, 미분 기하, 해석 기하)에 관한 설명 화면에

서 '더 자세히'를 선택하면 해당 기하에 관한 내용을 담은 한글 파일로 연결된다.

## (2) 유클리드 기하와 비유클리드 기하

### 1) 유클리드 기하

유클리드 기하의 역사, 여러 가지 정리들, 작도, 문제해결에 대하여 간단한 설명은 pop-up 화면, 그림박스, 또는 목록상자 등으로 제시되며 각각을 다시 선택하는 경우 상세한 탐색화면으로 이동한다.

- 역사(Euclid 원론): 그림상자에 원론에 관한 간단한 설명이 제시되며 상세한 설명을 원하는 경우에 Hwp 파일 또는 관련 웹페이지로 연결된다.
- 여러 가지 정리: 2차원 공간에서의 도형(다각형, 원추곡선 등)의 성질과 관련된 정리가 목록상자에 나열되며 각 정리를 선택하는 경우에 해당 정리의 내용을 설명하는 그림으로, 그 설명화면에서 사용자가 원하는 경우에 GSP 파일로 연결되어 탐색이 가능하도록 한다. 어느 시점에서든지 직전 화면으로 환원 가능하다.
- 작도: 작도의 의미를 제시하고 여러 가지 작도 문제를 제시한다. 소프트웨어를 활용한 작도를 원하는 경우 GSP로 연결시키며 작도의 타당성을 생각하게 한다.
- 문제해결: 여러 가지 유형(작도, 궤적, 증명)의 기하문제를 제시한다. 작도나 궤적을 구하는 문제들은 GSP로 이동할 수 있도록 고안하였다.

### 2) 비유클리드 기하

비유클리드 기하의 평행선 공준과 세 가지 종류의 비유클리드 기하가 간략히 소개된다.

- 구면 기하: 구면 기하의 평행선 공준, 역사, 정리 등이 그림상자나 목록상자 pop-up 화면으로 제시된다.
- 쌍곡 기하: 쌍곡 기하의 평행선 공준, 역사, 정리, 모델 등이 그림상자나 목록상자 pop-up 화면으로 제시된다. 쌍곡 기하의 세 가지 모델(반평면모델, Poincare Disk 모델, 사영모델)이 제시되며 특히 Poincare 모델을 사용하여 깊이 있는 탐색이 가능하도록 하였다.
- 사영 기하: 구면 기하의 평행선 공준, 역사, 정리 등이 그림상자나 목록상자 pop-up 화면으로 제시된다.

## 2-3. 프로그램 화면 예시

본 연구에서 개발된 프로그램을 작도와 PD모델을 통한 쌍곡 기하의 탐색의 경우를 중심으로 몇 개의 화면을 제시하면 다음과 같다.

(1) 작도

작도를 선택한 경우 나타나는 초기 화면은 5개의 메뉴로 구성되어 있다.

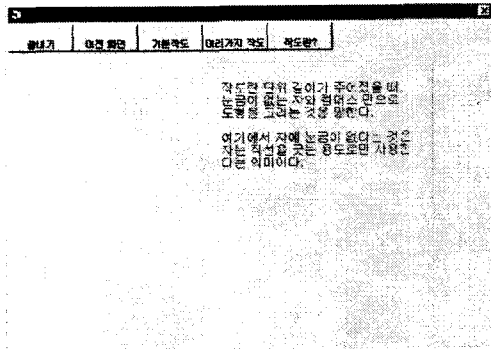


그림 2는 5개의 메뉴 중 오른쪽 끝에 '작도란?'을 클릭할 때 나타나는 pop-up 메뉴를 보여준다. 동일한 메뉴를 다시 클릭하거나 pop-up 화면을 다시 클릭하면 작도에 대한 설명부분이 화면에서 사라진다.

그림 2 작도의 뜻

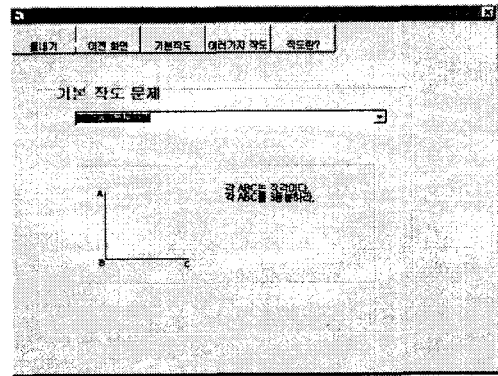
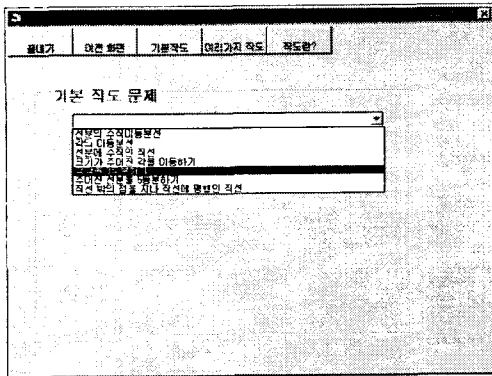


그림 3 기본작도 문제 제시

그림 4 기본작도 문제 선택(2)

그림 3은 그림 2의 화면에서 '기본 작도'를 선택할 때 나타나는 pull down 메뉴를 보여준다. 그림 4는 '직각을 3등분하기'를 선택하는 경우를 보여주며 이 부분을 선택하면 작도 상황을 나타내는 그림과 작도 문제 전체가 제시된다. 작도의 뜻과 기본 작도, 여러 가지 작도의 3가지 메뉴 외에 이전 화면으로 돌아가거나 프로그램을 끝낼 수 있다.

(2) 쌍곡 기하

쌍곡 기하의 초기 화면에서는 '쌍곡 기하의 평행선공리', '쌍곡 기하의 모델', '쌍곡 기하의 정리'를 선택할 수 있다(그림 5).



1) 쌍곡 기하의 평행선 공리

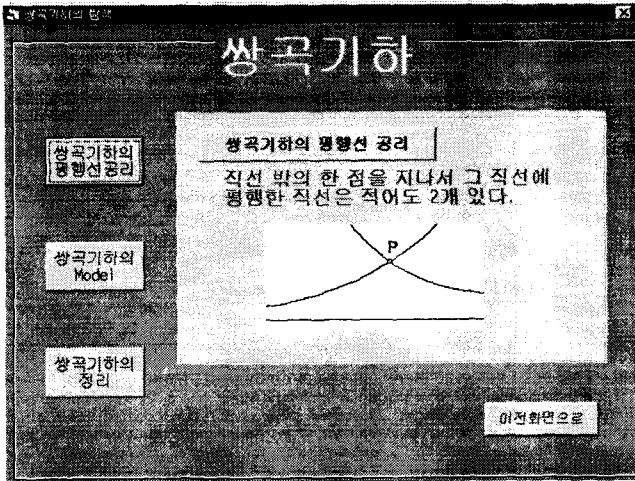


그림5 쌍곡기하의 탐색 화면 1

기하의 정리'를 클릭하면 그림 11의 화면으로 이동한다.

2) 쌍곡 기하의 모델



그림6 쌍곡기하의 3가지 모델들

그림 5는 쌍곡 기하의 평행선 공리를 요구한 경우에 나타난 pop-up 화면에 그림과 함께 나타난 평행선 공리이다. 다시 한번 '평행선 공리'를 클릭하거나 해당 pop-up 화면을 클릭하면 pop-up 메뉴가 화면에서 제거된다. 화면 하단의 '이전화면으로' 부분을 클릭함으로써 쌍곡 기하 직선의 탐구 상황으로 돌아갈 수 있다. 그림 5의 화면에서 '쌍곡기하의 모델'을 클릭하면 그림 6과 같이 pop-up 화면에 쌍곡 기하의 3가지 모델에 관한 간략한 설명이 나타나며, '쌍곡

그림 6의 pop-up 화면에 나타난 세 가지 모델들 각각에 대한 자세한 설명은 각 모델 하부에 '자세히' 단추를 클릭함으로써 얻어진다. 푸앵카레 모델 아래의 '자세히'를 클릭하면 푸앵카레 디스크(PD)에 대한 탐색화면(그림 7)으로 이동한다. 여기에서 푸앵카레 원판(PD)의 정의와 PD 내에서의 측도(그림 7), PD에서의 직선(geodesic)에 대한 설명과 관련 그림이 pop-up 화면으로 제시되고(그림 8), 또 GSP를 사용하여 직선을 탐색할 수 있는 환경으로의 연결(그림 9)이 가능하다.

PD 모델 내에서 측도 정의에 의하면 원점 부근의 두 점 사이의 거리는 유클리드 거리의 2배이며 PD의 경계 부근의 두 점 사이의 거리는 무한히 커지게 되는데, PD 상의 두 점 사이의 거리에 대한 이와 같은 탐구가 이루어질 수 있도록 질문을 제시하는 단추를 추가하여 질문 형식으로 제시하여 학생들이 측도에 대한 이해를 심화시키도록 할 수 있다.

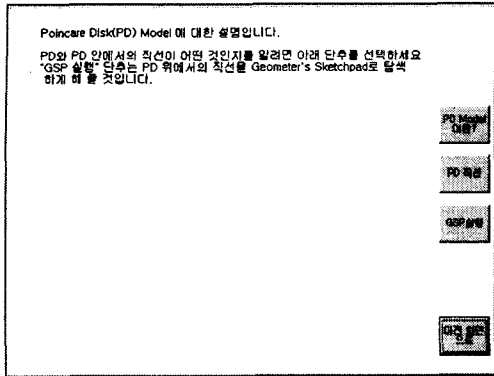


그림7 푸앵카레 모델 초기화면

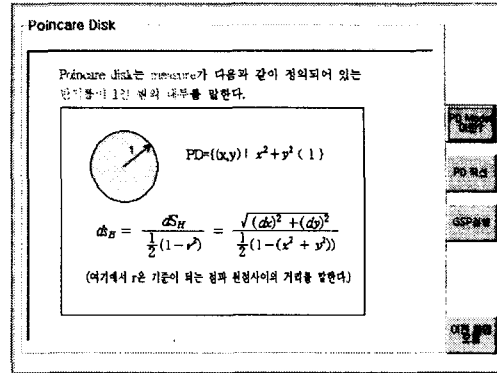


그림8 PD의 정의와 그 안에서의 측도

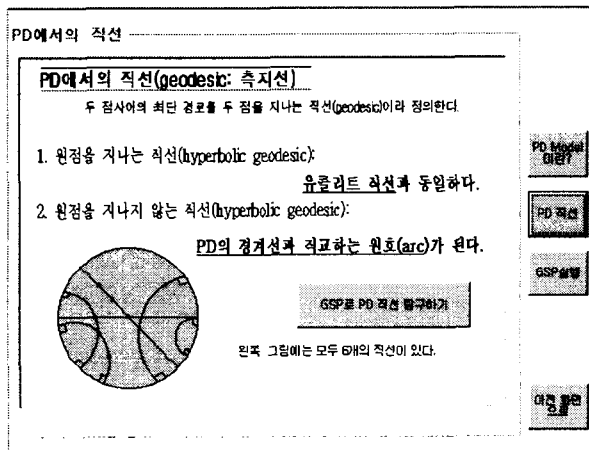


그림9. PD에서의 직선

그림 9는 PD에서의 직선에 관한 설명 부분이다. 두 점을 지나는 직선이 원호가 되는 경우 경계와 직각을 이루는 원호가 오직 한 개라는 사실은 학생들에게 기이하게 여겨질 수 있다. 이 때 GSP 상에서 임의의 두 점을 지나는 직선을 역동적으로 그려서 확인하는 것은 PD를 통한 쌍곡 기하 탐색에 앞서서 학생들에게 모델에 대한 안정감을 갖게 해줄 것이다. 그림 9의 직선에 대한 설명 하단의 “GSP로 PD직선 탐구하기”는 PD 직선을 GSP로 탐구할 수 있도록 GSP 파일로 연결한다(그림 10).

GSP 파일에서 학생들은 점 A, B, C를 임의로 조작하여 임의의 두 점을 지나는 직선(geodesic)이 두 가지 형태를 가지며 그러나 유일하게 결정된다는 사실을 발견하게 된다.

GSP를 통한 직선의 탐구를 통해 학생들은 푸앵카레 디스크에서 직선이 무엇을 의미하는가에 관한 이해(그림 10의 질문)를 넘어 원에 수직인 원호를 어떻게 작도할 수 있는가(그림 10의 탐구 문제)를 생각하게 되어, 여기에서 작도, 원과 직선과 관련된 성질의 탐구가 자연스럽게 새로운 학습 주제로 부각될 수 있다.

### 3) 쌍곡 기하의 정리

앞의 그림 6의 화면에서 쌍곡 기하의 정리를 선택하면 여러 가지 정리의 목록들이 나타난

다(그림 11). 여기에서 학생들은 GSP를 이용하여 모델 안에서 조작하여 정리의 내용을 확인할 수 있으며, 이때 오작동으로 인해 GSP로 이동하는 것을 방지하기 위해 GSP로의 이동을 재확인하는 절차(그림 12)를 거쳐 GSP 파일로 이동한다. 그림 14는 “삼각형의 세 내각의 합이 180도 보다 작다.”는 것을 조작을 통해 확인하게 하는 GSP 파일의 화면이다.

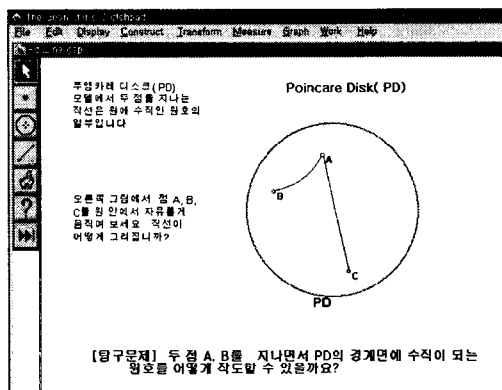


그림 10. GSP로 작도한 PD직선

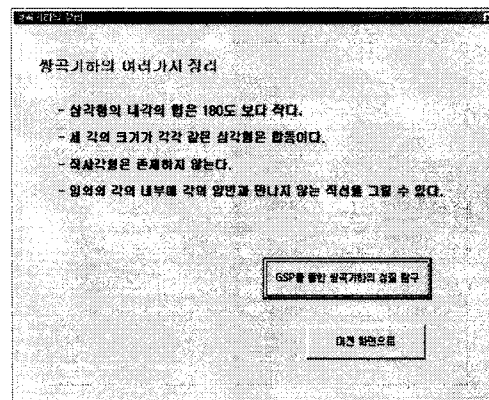


그림 11. 쌍곡기하의 여러 가지 정리

GSP 화면에서의 탐색은 얼마든지 가능하다. 즉 다른 파일을 열 수도 있고 새로운 파일을 열어서 사용자가 임의로 작도를 시도할 수도 있다. GSP 파일을 닫으면 자동적으로 이전 화면(화면 6)으로 되돌아간다.

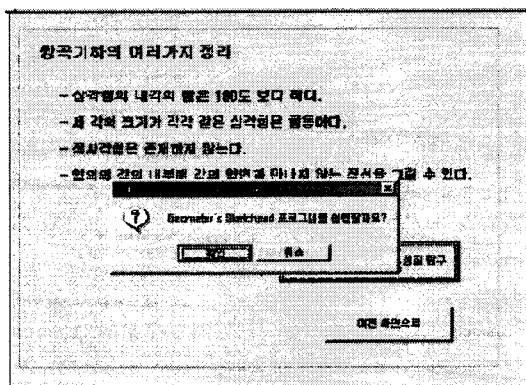


그림 12 정리 탐색을 위한 GSP 실행 확인

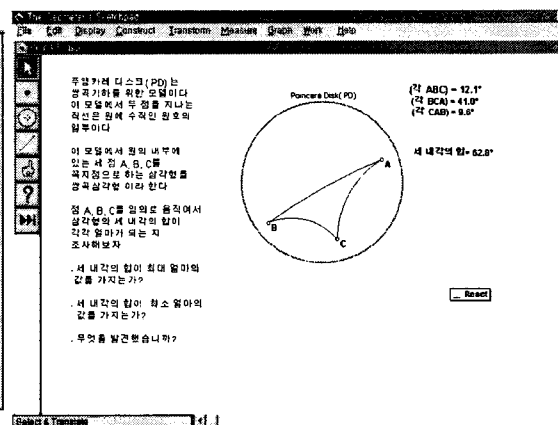


그림 13. PD에서의 삼각형의 내각의 합 탐색

지금까지 유클리드 기하의 작도 부분과 쌍곡 기하의 평행선 공리와 모델, 정리 등을 텍스트와 그림을 수반한 정보 제시 그리고 상호작용을 허용하는 GSP와의 연결을 통한 성질의 발견과 확인이 가능하도록 하는 교수 자료를 예시 화면과 함께 서술하였다. 이는 중등학교 이후 대학 수준까지 포괄하는 기하 교육의 틀 안에서 그 일부에 해당하는 교수 자료로서 지속적으로 보완을 해나가면 이 교수 자료로 기하 교육의 상당 부분을 역동적으로 다룰 수 있게 될 것이다.

### 3. 논의 및 제언

본 연구에서 설계한 기하 프로그램은 기하의 전 영역 중 일부를 컴퓨터를 정보 제공과 탐색의 도구로 활용할 수 있도록 한 교재이다. 하이퍼미디어의 특성상 텍스트, 그림, 소프트웨어 등 여러 방향으로 연결될 수 있으며, 또 어느 시점에서든 지속적인 보완이 가능하다. 본 연구에서 개발한 프로그램은 수학교수에서 컴퓨터의 활용을 전통적인 컴퓨터보조수업(CAI)이 아니라 컴퓨터에 기초한 수업(Computer Based Instruction, CBI)의 구체적인 형태가 지향해야 할 방향에 대한 지침이 될 수 있을 것이며 특히 멀티미디어에 기반을 둔 수학 교수 학습자료의 개발을 촉진시키는 계기가 될 수 있을 것이라 판단된다.

본 연구에서 개발된 프로그램은 크게 두 가지 특징을 갖는다. 하나는 사용자의 관심과 능력에 따라 얼마든지 비선형으로 자료에 접할 수 있다는 점이다. 이는 하이퍼미디어가 가지고 있는 본질적인 특징이기도 하다. 두 번째는 여러 종류의 소프트웨어와의 연결을 시켜준다는 점이다. 즉, 하이퍼미디어 프로그램을 많은 분량의 텍스트와 그림을 담은 한글(Hwp)파일과 웹페이지, 기하 탐색 환경을 사용자에게 제공하는 소프트웨어인 GSP와의 연결을 하고 있다는 점이다. 웹페이지와의 연결은 역사적 배경에 관한 다양한 자료들을 입수 가능하게 해준다. 특히 GSP 같은 탐구용 소프트웨어와의 연결은 기존의 CAI 형태의 컴퓨터 교육프로그램이 학습자에게 일방적으로 방향을 제시하고 학습자는 사전 처방에 따라 수동적인 학습경로를 밟는 것과 비교할 때, 학습자의 역할을 보다 적극적인 탐색자로 바꾸어 준다는 점에서 교수학적 의의가 크다고 하겠다. van Hiele의 지적대로 사고수준의 차이가 기하 학습장애의 하나로 작용한다면, 형식적인 증명에 앞서 기하학적 성질의 경험은 매우 중요하며 여기에서 탐구용 소프트웨어의 역할은 결정적인 것이라 할 수 있다. 또 탐구용 소프트웨어를 학습의 계열에서 수시로 활용할 수 있게 함으로써 학생 스스로 수학적인 개념이나 원리를 적극적으로 구성해 갈 수 있는 환경이 제시되고 있기 때문에 수학에 대한 학생들의 태도를 긍정적으로 바꿀 수 있을 것으로 보여 진다.

본 연구와 관련하여 수학교육을 위한 컴퓨터의 활용 측면에서 다음과 같은 점들이 보완되고 적절한 후속연구들이 이루어져야 한다. 첫째, 이러한 하이퍼미디어를 활용한 코스웨어들

을 개발하고 그 학습효과를 경험적으로 검증하는 연구가 이루어져야 할 것이다. 둘째, 수학 교육과정 중의 기하 이외에 어떤 부분이 하이퍼미디어 프로그램으로 효율적으로 제작되고 학습에 기여할 수 있을 것인지에 관한 수학적, 교수학적 연구가 이루어져야 한다. 셋째, 최근 전자교과서의 개발이 활발히 이루어지고 있는데 교과서나 참고서의 내용을 단순히 컴퓨터 디스켓에 담은 프로그램이 아니라 학생들에게 적극적인 탐구환경을 제공할 수 있는 수학 소프트웨어의 형태에 관한 논의와 구체적인 소프트웨어 개발이 이루어져야 할 것이다. 넷째, 2000학년도부터 점진적으로 시행되고 있는 단계형 수준별 교육과정의 운영에 있어서 동일 단계의 학생들에게 수준을 달리한 학습지 형태의 자료 이용에서 탈피하여 수준에 따라 적합한 수학탐구환경을 제공할 수 있는 소프트웨어 지원 방안이 연구되어야 할 것이다.

### 참고 문헌

1. 장경윤, “수학교육에서의 Hypermedia의 활용에 관한 연구: 문제해결 지원체계로서의 효율성을 중심으로,” 대한수학교육학회논문집 7(2), 73-90, 1997.
2. Hoffer, A., *Geometry: A Model of the Universe*, Addison-Wesley Pub. Co. Reading, 1979.
3. Klotz, E., *The Geometer's Sketchpad* [Software], Key Curriculum Press, Berkeley, 1991.
4. Larborde, J-M., *CABRI Geometry* [Software], Université de Grenoble 1, France, 1990.
5. Lufkin, D., “The Incredible Three-by-Five Card!,” *Mathematics Teacher* vol 89(2), 96-98, 1996.
6. MicroSoft Corp., *MicroSoft Visual Basic 4.0* [Software], 1995.
7. Neuwirth, E., “The Impact of Computer Algebra on the Teaching of Mathematics,” *Informatics and the teaching of mathematics*. eds. D. Johnson and F. Lovis (eds.), Elsevier science publishers, Amsterdam, 1987, 49-54.
8. Russell, C. R. and Dromsky, L., “A Hypertext Tool for Student Exploration of Fundamental Computer Concepts,” *Proceedings of the Sixth Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics*, Parsippany, N. J., Nov. 4-7, 1993), ed. L. Lum, 1995, 667-671.
9. Scher, D., “Theorems in Motion: Using Dynamic Geometry to gain Fresh Insights,” *Mathematics Teacher* vol 89(4), 1996, 330-332.
10. Usiskin, Z. *van Hiele levels in secondary school geometry* (ERIC document Reproduction Service No. ED 220 288), 1982.

11. Wirzup, I., "Breakthoghts in the Psychology of Learning and Teaching Geometry,"  
*Space and geometry*, ed. L. Martin, ERIC Center, OH, 1976, 75-98.
12. Wisnudel, M., "Constructing HyperMedia Artifacts in Math and Science Classrooms,"  
*Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching* 13(1), 1994, 5-15.
13. van Hiele, P. M., *Structure and insight*, Academic Press, New York, 1986.