

## 미국 NCTM의 “Principles and Standards for School Mathematics”에 대한 안내

김 용 환<sup>1)</sup> · 오 세 열<sup>2)</sup>

### 1. 서 론

최근 2000년 4월 13일에 미국의 전미교사 협의회(NCTM)는 그 동안 추진해오던 학교 수학의 교육과정에 대한 전반적인 연구과제인 standards 2000 project의 최종 결과로서 “학교수학의 원리와 기준(Principles and Standards for School Mathematics)”을 발표하였다.

이 학교수학의 원리와 기준은 유치원에 들어가기 전부터 12학년까지의 모든 학생의 수학교육에 영향을 줄 수 있는 모든 결정을 내리는 사람들을 위한 기초자료와 안내를 목적으로 하고 있다. 이 원리와 기준의 추천사항은 모든 학생이 이해를 동반한 중요한 수학적 개념과 과정을 배워야한다는 믿음을 기초로 하고 있다. 이 학교수학의 원리와 기준은 특별한 이해의 중요성을 논의하고 있으며 학생들이 그것을 얻을 수 있는 방법들을 묘사하고 있다.

NCTM(the National Council of Teachers of Mathematics)은 이미 몇 년 전에 기준에 대한 3가지 중요한 책- 학교수학의 교육과정과 평가기준(Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, 1989), 수학교수를 위한 전문적 기준(Professional Standards for

Teaching Mathematics, 1991), 학교수학의 평가기준(Assessment Standards for School Mathematics, 1995)을 발간한 바 있다. 이들 3종류의 출판물은 교사들과 정책입안자들을 위한 명료하고 숨김없는 광범위한 목적을 개발하기 위하여 전문단체에 의해 역사적으로 처음 시도된 것이다. 이들이 출판된 이래 이들은 수학교육을 증진시키기 위한 노력에 대한 관심점과 통일성 그리고 새로운 아이디어를 제공해 왔다.

본 연구에서는 NCTM이 2000년 4월 발표한 “학교수학의 원리와 기준”의 일련의 소개와 검토를 통하여 현재 미국에서 추구하고 있는 중등수학교육에 대한 활동과 자료를 안내함으로써 우리의 제7차 수학교육과정을 성공적으로 수행하고 우리나라의 학교수학의 발전을 위한 참고자료로 활용할 수 있도록 하는데 그 목적을 두었다.

### 2. NCTM의 학교수학의 원리와 기준의 개요

학교수학의 원리와 기준의 내용을 개괄적으로 차례로 살펴보기로 한다.

#### 제1장 학교수학에 대한 비전

모든 학생들은 학급이나 학교에서 질 높은 수학교육을 받고자 한다. 지식이 많은 교사는 그들의 작업을 지원할 적절한 자료를 축

1) 공주대학교 수학교육과

2) 경문대학교

적하고 계속적으로 그들의 전문성을 키워나간다. 교육과정은 수학적으로 풍성해지고 학생들에게 이해를 통한 과정과 중요한 수학적 개념을 배우기 위한 기회를 제공한다. 기술 또한 환경을 구성하는 본질적인 요소가 되고 있다. 학생들은 교사들에 의해 조심스럽게 선택된 복잡한 수학과제를 접하게 된다.

학생들은 스스로 아니면 그룹으로 기술(technology)에 접촉하고, 유능한 교사의 안내를 받으며 생산적이고 효율적인 공부를 한다. 말하기와 쓰기를 통하여 효과적으로 그들의 아이디어와 결과를 상호 교환을 한다.

학교수학의 원리와 규준에서 수학교육에 대한 비전은 상당히 야심적이다. 이러한 비전을 성취하기 위해서는 견실한 교육과정과 평가와 함께 교육을 집적할 수 있는 지식이 많은 교사와 평등과 수월성을 함께 추구하고 기술에 접근 가능한 교실과 학습을 지원하고 고무하는 교육정책들이 그것이다. 학생들은 가능한 한 최상의 수학교육을 요구하고 받아야 한다.

수학의 교사들을 대표하는 단체로서 NCTM은 1989년에 학교수학의 교육과정과 평가규준(Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, 1989)을 발간하였고, 이어서 1991년에는 수학교수를 위한 전문적 규준(Professional Standards for Teaching Mathematics, 1991)를, 그리고 1995년에는 학교수학의 평가규준(Assessment Standards for School Mathematics, 1995)을 발간한 바 있다. 이들 3종류의 출판물은 교사들과 정책입안자들을 위한 명료하고 숨김없는 광범위한 목적을 개발하기 위하여 전문단체에 의해 역사적으로 처음 시도된 것으로 이 규준이 수학교육을 증진을 유도하는 지도적 역할을 할 수 있도록 일괄된 견해를 유지하고 새로운 아이디어를 제공해 왔다.

### 변화하는 세계에서의 수학의 필요성

우리는 21세기의 급변하는 시대에 살고 있

다. 새로운 지식과 도구들, 수학을 소통하고 행동하는 방법들이 새롭게 등장하고 전개되는 것이 계속되고 있다. 불과 몇 년 전에는 소수의 제한된 사람들에게 유용했던 방대한 정보가 이제는 대중적인 미디어를 통하여 모든 사람들에게 널리 퍼지고 있다. 이런 변화하는 시대에 수학은 일상생활에서 수학 지식이 개인적인 만족을 주고 있다. 또한 수학은 인류의 문화적 유산의 한 부분이다. 그리고 수학은 직업 현장과 건강보호에서부터 그래픽 디자인에 이르기까지 수학적 사고와 문제 해결은 더욱 요구되고 있다. 과학과 기술사회에서는 모든 전문가들에게 수학적 지식의 기초가 요구되지만 일부 수학자, 통계학자, 엔지니어 그리고 과학자에게는 고급수학이 필요하다. 수학을 잘하는 사람에게는 그들의 미래를 설계하는데 기회와 선택이 주어지지만 수학적 능력이 부족한 사람은 그들의 문을 닫고 있어야 한다.

이 원리와 규준은 모든 학생들이 배워야 하는 공통적인 수학의 기초를 요구하고 있다.

### 수학교육의 지속적인 발전의 필요성

많은 교사들과 수학관련 학자들의 구체적인 노력에도 불구하고 교실이나 학교에서는 실제적이 아닐 때도 있다. 학생들은 때때로 학습에 열심히 전념하지 않는다. 그러나 미국이나 캐나다에서 수학교육에서의 효율성은 점진적으로 발전되고 있다는 것은 의심의 여지가 없다.

규준은 진전의 과정에서 중요한 역할을 할 수가 있다. 교육적 혁신으로서 규준의 아이디어는 다양한 방법으로 해석되어왔고 원본으로서 변화하는 정도의 수단이 되어 왔다.

### 규준의 역할과 목적

전문적인 수학교육 안에서나 일반적인 공공교육에서 완벽한 일치는 없을지라도 규준은 학생의 학교수학교육의 증진에 대한 노력이나 구심점에 대하여 안내를 제공하고 있

다.

구체적으로 다음 10년 동안의 교육과정, 지도, 평가의 노력은 수학에 대한 목적을 이해하게 한다. 또한 교사나 교육지도자들에게 자료를 제공하고 수학교육프로그램의 질을 향상시킨다.

교육과정의 개발에 대한 안내자료 역할을 한다. 그리고 각 나라나 지방에서 학생에게 중요한 수학의 깊은 이해를 돕도록 하는 대화를 유도하고 아이디어를 자극한다.

### 원리와 기준의 개관

NCTM의 학교수학의 원리와 기준은 다음과 같은 목차로 구성되어 있다.

chapter 1:

A vision for School Mathematics

chapter 2:

Principles for School Mathematics

chapter 3:

Standards for School Mathematics

chapter 4: Standards for Grades Pre-k-2

chapter 5: Standards for Grades 3-5

chapter 6: Standards for Grades 6-8

chapter 7: Standards for Grades 9-12

chapter 8: Working Together to Achieve the Vision

References

제 2장에서는 질 높은 수학교육에 기초가 되는 기본적인 원리를 반영하는 설명이다. 원리는 교육자들이 학교수학에 영향을 주는 결정에 바탕이 될 수 있는 전망으로서 유용해야 한다. 모든 학생을 위한 수학에 대한 NCTM의 약속은 평등원리를 재구축하는 것이다. 교육과정에서는 학교수학을 발전시키는데 필요한 중요한 관점을 보여주는 것이다. 교수원리에서는 모든 학생들이 경쟁력 있고 열정적인 교사의 안내 하에 중요한 수학을 배울 기회를 가져야 한다는 것이다. 이 책을 바탕으로 한 학습의 관점이 학습원리로

취급된다. 학교수학 프로그램에서 평가와 기술의 중요한 역할이 평가의 원리와 기술의 원리 안에서 논의된다.

제3장에서 7장까지는 각 학년단계의 모든 학생들을 위한 야심적이고 포괄적인 10개의 교육과정 기준들의 개요를 말하고 있다.

이들 수학내용의 목표에 관한 5개 영역의 내용기준(content standards)은

**수와 연산(Number & Operations)**

**대수(Algebra)**

**기하(Geometry)**

**측정(Measurement)**

**자료분석과 확률(Data Analysis & Probability)**

이고, 다음 5개의 과정기준(process standards)은

**문제해결(Problem solving)**

**추론과 증명(Reasoning & Proof)**

**의사소통(Communications)**

**연결성(Connections)**

**표현(Representation)**

으로 구성되어 있다.

제3장부터 7장까지에서 논의된 수학내용과 과정의 기준들은 서로 뒤엉켜 있다. 학생들은 수학내용의 사용함과 이해가 없이 문제를 해결할 수 없다. 기하에 대한 지식을 완성하려면 추론을 알아야 한다. 대수의 개념은 검사될 수 있으며 표현을 통하여 의사소통이 되어질 수 있다. 이 책의 목적은 교육과정에 초점을 맞추는 방법론으로서 교육과정의 골격을 완성하기 위하여 교사들과 교육과정 개발자들에게 제공하기 위함이다.

제 8장에서는 앞장에서 다루어진 비전에 대하여 나아갈 바를 논의하고 있다.

앞으로 이 책의 비전은 서로 공유되어야 하고 이해되어야 하며 우리의 아이들의 미래를 위해 고려되어야 모든 것들이 실행되어야 할 것이다. 모든 학생들은 계속적으로 크게

변화하는 미래를 준비하기 위한 수학에서의 교육을 필요로 하고있다.

충분히 생명력이 있을 것이다. 다음은 이들의 내용을 간략히 알아본다.

## 제 2장 학교수학의 원리

학교수학의 특성과 내용에 대하여 교사들, 학교행정가들, 그리고 교육전문가들에 의해 만들어진 결론들은 학생과 사회를 위하여 중요한 결과이다. 이들의 결정은 건강하고 전문적인 안내에 기초가 되어야 할 것이다. 여기서 **학교수학에 대한 6가지 원리**는 다음과 같다.

**평등(Equity):** 수학교육에서 탁월함은 모든 학생들에 대한 강력한 지원과 높은 기대 수준면에서 평등을 요구한다.

**교육과정(Curriculum):** 교육과정은 행동의 집합 그 이상이다. 이것은 중요한 수학에 초점이 맞춰져야하고 고무되어야한다. 각 단계를 지나면서 매우 명료하게 표현되어야한다.

**교수(Teaching):** 효율적인 수학교육은 학생이 알아야하는 것, 배울 필요가 있는 것에 대한 이해가 요구되며 수학을 잘 학습하기 위하여 도전하고 지원해야한다.

**학습(Learning):** 학생들은 이해를 통하여 수학을 배워야한다. 그리고 사전지식과 경험으로부터 새로운 지식을 활동적으로 구축해야한다.

**평가(Assessment):** 평가는 중요한 수학의 학습을 지원해야하고 교사와 학생 모두에게 유용한 정보를 제공해야한다.

**기술(Technology):** 기술은 수학을 배우고 가르치는데 필수적이다. 그것은 가르쳐야하는 수학에 영향을 주고 학생의 학습을 고무시킨다.

이들의 원리들은 질 높은 학교수학 프로그램을 개발하기 위하여 함께 사용될 경우에

### 평등의 원리 (The Equity Principle)

교육적 평등은 이 학교수학 비전의 중요한 핵심이다. 모든 학생들은 그들의 특징과, 배경, 신체적 도전과 관계없이 수학을 배울 기회와 배우도록 지원 받는 기회를 가져야한다. 평등은 모든학생이 일률적인 교육을 받는 것을 의미하지 않는다. 대신에 그것은 모든 학생에게 접근과 달성이 진전될 수 있도록 합리적이고 적절한 조정이 이루어질 것을 요구하는 것이다. 즉

평등은 모든 학생에게 기회의 가치와 높은 기대를 요구한다.

평등은 수학을 배우려는 모두를 도와주도록 적절한 차이를 요구한다.

평등은 모든 학생과 모든 교실에 대한 자료와 지원을 요구한다.

### 교육과정의 원리 (The Curriculum Principle)

학교수학교육과정은 학생들이 배워야 하는 것과 그들이 배울 기회를 갖는 것의 강력한 결정이다. 일관성을 갖춘 교육과정에서 수학적 아이디어는 서로 연결되고 구축되어야 한다. 학생들의 이해와 지식이 심화되고 수학을 적용할 수 있는 능력이 확장되도록 말이다. 효율적인 수학교육과정은 중요한 수학에 초점을 맞춰야한다. 즉 지속적인 공부를 하려는 학생에게 준비시키는 수학과 학교, 집, 직장의 다양한 곳에서 문제해결에 대한 준비를 위한 수학등이다. 잘 구성된 교육과정은 학생들이 그들의 공부를 계속함에 따라 점점 더 지혜로운 수학적 아이디어를 배우는데 도전하도록 한다. 즉

수학교육과정은 일관성이 있어야한다.

수학교육과정은 중요한 수학에 초점이 맞춰져야 한다.

수학교육과정은 전 학년에 걸쳐서 잘 이어져 구성되어야 한다.

### 교수의 원리

#### (The Teaching Principle)

효율적인 교수는 계속적으로 개선점을 찾을 것을 요구한다. 학생들은 교사들이 제공하는 경험을 통하여 수학을 배운다. 그러므로 수학에 대한 학생들의 이해, 문제해결에 수학을 이용하는 그들의 능력, 수학에 대한 그들의 신뢰, 성향 등은 그들이 학교에서 만나게 되는 교육에 의하여 모습이 모두 결정된다. 모든 학생을 위한 수학교육의 발전은 모든 교실에서 수학교육을 효율적으로 행할 것을 요구한다. 즉

효율적인 교수는 학습자로서의 학생과 수학을 알고 이해함과 교수전략을 요구한다.

효율적인 교수는 배우는 환경으로서 도전적이고 지원하는 교실을 요구한다

### 학습의 원리

#### (The Learning Principle)

학교수학의 원리와 기준에서 학교수학의 비전은 이해를 통한 학생들의 수학학습을 바탕으로 하고 있다. 불행하게도 이해가 없는 수학학습이 오랜동안 학교수학교육의 보통 결과로서 지속되어 왔다. 이런 주제는 1930년대 이후 줄곧 제기되어온 문제로, Brownell(1947), Skemp(1976), Hiebert and Carpenter(1992)등의 교육학자와 심리학자들에 의해 상당한 논의가 되고 있다. 이 책의 3-7장에서 요약된 수학학습은 이해를 요구하고 있으며 과정, 개념, 절차를 적용할 수 있도록 하고 있다. 21세기에는 모든 학생들이 이해하기를 기대해야하고 수학을 적용할 수 있어야 한다. 즉

수학학습은 이해를 통한 학습이 그 본질이다.

학생들은 이해를 통하여 수학을 배워야한다.

### 평가의 원리

#### (The Assessment Principle)

평가가 수학교육의 필수적인 부분으로 이것은 모든 학생들의 수학학습에 의미심장하게 공헌을 한다. 평가가 기준과 함께 연결되어서 논의될 때에 그 초점은 때때로 학생의 성취를 인증하기 위한 검사로 사용된다. 그러나 거기에는 또 다른 평가의 중요한 목적이 있다. 평가는 교육의 마지막 단계에서 학생들이 특별한 조건하에서 어떻게 수행하는가를 보기 위한 주된 검사기능 그 이상이어야 한다. 더욱 그것은 교사들이 교육적 의사결정을 하도록 하는 안내와 정보로서 교수활동의 중요한 한 부분이어야 한다. 평가는 학생들에게 주로 행해지는 것은 아니다. 더욱 학생들의 학습을 고무시키고 안내하기 위하여 그들을 위해서 행해져야 한다. 즉

평가는 학생들의 학습을 증대시켜야 한다.

평가는 교육적 의사결정을 하기 위한 가치 있는 도구이다.

### 기술의 원리

#### (The Technology Principle)

전자기술들-calculators and computers-은 가르치고, 배우고, 수학을 행하는데 필수도구들이다. 그들은 수학적 아이디어의 시각적 이미지를 제공한다. 그들은 자료를 분석하고 조직하는데 유용하다. 그들은 기하, 통계, 대수, 측정, 수를 포함하여 수학의 모든 영역에서 학생들에 의한 탐색활동을 지원할 수 있다. 기술도구들이 사용 가능한 경우, 학생들은 의사결정, 반성, 추론, 문제해결 등에 집중할 수가 있게된다. 즉

기술은 수학의 학습을 증대시킨다.

기술은 효율적인 교수활동을 지원한다.

기술은 수학이 가르쳐져야하는 것에 영향을 준다.

### 제3장 학교수학의 기준

학교수학의 원리와 기준은 학교수학의 교육에서 가치가 있어야 하는 것에 대한 NCTM의 제안을 말하고 있다. 그들은 10가지 기준을 말하고 있는데, 이 기준은 학생들이 알아야 하고 행하여야 하는 수학의 교육내용을 설명하고 있으며, 유치원에 들어가기 전부터 12학년까지의 모든 학생들에게 요구되어지는 이해, 지식, 기능을 특화하고 있다.

그 기준 10가지는 내용기준(content standards)-수와 연산, 대수, 기하, 측정, 자료분석과 확률-과 과정기준(process standards)-문제해결, 추론과 증명, 의사소통, 연결성, 표현-으로 구성되어 있다.

이 10가지 기준들은 유치원에 들어가기 전부터 12학년까지의 모든 단계에 걸쳐 적용한다. 그러나 매 학년(단계)마다 모든 주제를 다룰 것은 기대하지 않으며, 각 학년간이나 그 학년 내에서 강조사항은 서로 다를 수 있다. 다음 그림 1은 각 학년을 통하여 다른 강조점을 받고 있음을 보여주고 있다. 각 기준에 대한 상세한 내용들은 다음의 각 장에서 설명될 것이다.

이 10가지 기준들은 학교수학교육과정과 거의 분리되어 있지 않다. 연습으로서의 수학이 고도로 내부적으로 연결되어 있기 때문에 각 기준은 서로 겹쳐지거나 집적되어서 묘사되고 있다. 과정은 내용기준에서 배울 수도 있고, 내용은 과정기준 안에서 배울 수도 있다.

1989년의 학교수학의 교육과정과 평가에서는 이산수학(Discrete Mathematics)이 별도로 소개되었으나, 이번 원리와 기준에서는 별도로 독립시키지 않았다. 이들은 전 12학년에 흩어져 있다. 이산수학의 3가지 중요한 영역은 조합론(combinatorics), 반복과 재귀(iteration and recursion), 그래프(vertex-edge graphs)로 구성되어 있다. 조합론은 시스템적 세기(counting)의 수학이고 반복과 재귀는 귀납적으로 각 단계마다 변화

는 연쇄적인 모델에 사용된다. 그래프는 유한개의 대상에 대한 경로, 네트워크, 관계 등을 포함한 문제해결과 모델에 사용된다.

여기서는 간단히 유치원 전단계(pre-k)부터 12학년까지 무엇을 배워야 하는지를 알아본다.

**유치원 전단계부터 12학년까지의 교수프로그램은 모든 학생들이 다음을 할 수 있도록 해야 한다.**

#### 수와 연산의 기준

수, 수를 표현하는 방법, 수들의 관계, 수체계에 대한 이해

연산의 의미, 연산 서로간의 관계가 어떻게 되는지의 이해

숙련된 계산과 합리적인 어렵하기

#### 대수의 기준

패턴, 관계, 함수에 대한 이해

수학적 상황과 구조를 대수적 기호를 사용하여 해석하고 표기하기

양적 관계를 이해하고 표기하기 위하여 수학적 모델을 사용하기

다양한 개념에서 변화를 해석하기

#### 기하의 기준

2-3차원의 기하도형의 성질과 특징을 분석하고 기하학적 관계에 대하여 수학적 논의의 개발

다른 표현체계와 해석기하를 사용하여 공간관계를 묘사하고 위치를 특화한다.

수학적 상황을 분석하기 위하여 대칭을 사용하고 변환을 적용한다.

문제해결을 위해 공간적 추론, 기하학적 모델링, 시각화를 사용한다.

#### 측정의 기준

대상, 단위, 체계, 측정의 과정 등의 측정 가능한 속성을 이해한다.

측정을 결정하기 위하여 적절한 기술, 도

구, 공식 등을 적용한다.

#### 자료분석과 확률의 기준

자료로 설명될 수 있는 문제를 공식화하고, 그 문제에 대답하기 위해 관련된 자료를 모으고, 조직하고, 묘사한다.

자료를 분석하기 위하여 적절한 통계적 방법을 선택하고 사용한다.

자료를 바탕으로한 추론과 예측을 평가하고 개발한다.

확률의 기본개념을 이해하고 적용한다.

#### 문제해결의 기준

문제해결을 통하여 새로운 수학적 지식을 구축한다.

수학영역과 그 밖의 문맥에서 일어나는 문제해결한다.

문제해결에 적절한 전략의 변화에 적용하고 적용한다.

수학적 문제해결과정을 반성하고 모니터링한다.

#### 추론과 증명의 기준

수학의 기본적 양상으로서 추론과 증명을 인식한다.

수학적 추측을 하고 조사한다.

수학적 논의와 증명을 개발하고 평가한다.

여러 가지 추론의 형태와 증명방법을 선택하고 사용한다.

#### 의사소통의 기준

의사소통을 통하여 그들의 수학적 사고를 조직하고 확실히 한다.

동료들, 교사들, 다른 사람들과 일관되고 명확하게 수학적 사고를 소통한다.

수학적 사고와 다른 사람들의 전략을 분석하고 평가한다.

수학적 아이디어를 정확하게 표현하기 위하여 수학의 언어를 사용한다.

#### 연결성의 기준

수학적 아이디어들 간의 연결성을 인식하고 사용한다.

수학적 아이디어들이 일관된 전체를 만들기 위해 어떻게 내적으로 연결되고 또 다른 것을 구축하는가를 이해한다.

수학의 외적인 문맥적 상황에 수학을 인식하고 적용한다.

#### 표현의 기준

수학적 아이디어를 조직하고 기록하고 의사소통하기 위하여 표현을 만들고 사용한다.

문제해결을 위한 수학적 표현들 간의 선택, 적용, 변환을 한다.

물리적, 사회적, 수학적 현상을 해석하고 모델화하기 위한 표현을 이용한다.

## 제4장 유치원 전 단계(pre-k)부터 2학년의 기준

태어나면서 4살까지 유아들에게는 대단히 중요한 수학적 개발이 이루어진다. 그들은 학교를 가기 전에 가족 구성원에 의해 보살핌을 받거나 그들 가족의 외부인들로부터 보호를 받는다. 모든 유아들은 선천적으로 배우고자 하는 욕망을 필요로 한다. 조기에 여기서 추천하는 수학학습에 대한 기준과 특별한 기대는 부모와 교육자들이 아이들에게 수학의 인지적 기초와 굳건한 영향을 주는데 도움이 될 것이다.

아이들의 수학적 개발에 대한 기초는 아주 이른 시기에 세워진다. 수학학습은 어린이들의 호기심과 열정을 바탕으로 이루어지며 자연스럽게 그들의 경험을 통하여 자라난다. 그 나이에 있어서 수학은 그들의 세계와 적절히 연결되어 있다면 학교를 가기 위한 준비보다도 더 기초적 산수 속으로 그들을 가속시킨다. 적절한 수학적 경험은 어린이들을 패턴이나 모양, 수나 지적교양을 증진시키는

공간과 관련된 아이디어를 탐험하도록 도전하게 한다. 많은 수학적 개념은 거의 그들의 직관적 초기인 학교가기 전에 개발된다. 많은 어린이들이 그들이 학교에 가기전에 수학의 비공식적인 지식을 습득한다. 어린이들은 그들의 세계를 탐험하면서 배운다. 그러므로 흥미와 매일 매일의 행동들은 수학적 시고를 개발하기위한 자연스런 도구가 된다. 예를들면 장난감 정돈하기, 블록쌓기, 생각을 기록하고 그리기, 노래하며 울동하기, 수수께끼 풀기, 세기 등등.

어린이들은 공식적인 학교에 입학할 때는 수학 이해의 여러 수준으로 시작한다. 그러나 아는 것이 없는 것은 배우는 능력이 없다가 보다는 배울 기회가 없는 경우가 더 자주 있다.

그들은 문제해결과 추론에 의해 세계를 이해하고 교사들은 어린이들이 지적인 방법으로 생각할 수 있다는 것을 인식해야 한다. 모든 어린이들이 견고한 수학적 기초를 이룬 시기에 개발하는 것이 중요하다.

특히 저학년에서의 수학지도는 학생들의 전략에 용기를 주어야하며 좀더 일반적인 아이디어와 시스템적 접근을 개발하는 방법을 그들이 구축하도록 해야한다. 이른 시기에 수학의 핵심은 수와 기하규준이다. 수와 그들의 관계, 연산, 자리값, 도형의 특성등이 이들 규준으로부터 귀중한 아이디어의 예이다.

유치원에 가기 전과 2학년사이의 수학프로그램은 기술의 장점을 취해야한다. 계산기를 이용한 계획된 작업은 학생들에게 수와 패턴을 경험할 수 있게 하고, 문제해결과정에 초점을 맞추고, 실제적인 응용을 조사할 수가 있다. 컴퓨터는 또한 표현간의 연결과 피드백을 제공함으로써 학생들의 학습에 강력하고 유일한 공헌을 할 수 있다.

교사는 학생들이 이미 무엇을 알고 있는지, 아직까지 그들이 배워야하는 것이 무엇인지를 결정해야한다.

## 제5장 3-5학년의 규준

학생들이 수학을 배우는데 열정을 가지고 3학년에 들어선다. 사실 대부분의 3학년 학생들은 수학을 좋아한다. 이장에서는 3-5학년의 규준을 다루는데, 이들은 3가지 중심적인 주제를 갖는다.-곱셈원리, 동치, 그리고 유창한 계산력-

3-5학년에서는 곱셈원리(Multiplicative reasoning)가 시작되고 많은 다른 주제들과 함께 개발되고 의논되어야한다. 곱셈원리는 곱하기나 나누기를 하는 것 보다 중요하다. 즉 484는 484개의 개체가 모인 것과 같이  $4 \times 100 + 8 \times 10 + 4 \times 1$ 가 되는 곱셈 구조를 안다.

동치(Equivalence)는 3-5학년의 핵심적인 아이디어이다. 수에대한 동치표현을 사용하고 인식하고 창조하는 학생의 능력과 기하학적 대상이 확장된다. 동치는 학생들이 소수를 공부하고 관련된 분수, 소수, 퍼센트(백분율)를 배우는 중요 전략이다.

계산(Computational fluency)을 익숙하게 할 수 있도록 하는 것이 3-5학년에서 개발하여야하는 중요한 것이다. 숙련됨이란 계산에 있어서 효율적이고 정확하고 일반화되는 방법들을 의미한다. 학생들은 수학공부의 목적으로서 보다는 문제해결을 위한 도구로서 알고리즘을 궁리해야 한다. 학생들은 계산 알고리즘을 개발하고 교사들은 그들의 작업을 평가하고 그들이 보다 효율적인 알고리즘을 인식하도록 도와야 한다. 그리고 그들이 계산에 있어서 보다 유연하고 노련하게 할 수 있도록 충분하고도 적절한 연습을 제공해야한다.

계산기의 사용은 3-5학년에서 계산을 노련하게 하는 것과는 대체될 수는 없지만 문제를 해결하는데 중요한 도구가 된다.



## 제 6장 6-8학년의 기준

6-8학년인 중급단계(middle grades)의 학생들은 청소년기에 접어들며, 학생들은 육체적으로 감정적으로 지적으로 큰 변화를 겪는다. 그들의 삶에 있어서 의미심장한 변화의 전환점인 것이다. 이 단계에서는 기하와 대수에 초점을 맞추고 있다. 최근에는 대수적 사고에서 학생들이 얻는 능력의 필요성과 가능성은 넓게 인식되고 있다. 기하부분은 수학의 숙련도에 대한 국내외에서의 평가결과 미국의 가장 취약한 부분인 것으로 나타났다. 그러므로 이 기하부분은 이 중간단계의 기준에서 보다 의미있게 추천되어야 한다. 수와 연산에서는 유리수의 개념을 깊게 해야 한다. 이것은 분수와 소수, 퍼센트 등과 관련지어 보다 유연하게 생각하는 것을 배워야 한다.

기초적인 대수와 기하에 대한 학생의 이해는 3년동안 중간단계에서 확장된 경험을 통해 개발되어야 한다. 그리고 통계, 수, 측정 등을 포함하여 광범위하게 수학내용의 범위를 확장해나가야 한다.

## 제 7장 9-12학년의 기준

고등학교 시절은 주요 변화를 일으키는 시간이다. 이 중등학교의 학생들은 그들의 삶의 방향을 정해야하는 선택과 결정의 순간을 직면한다. 기본적인 수학적 개념과 기본적인 기능을 강조함을 통하여 모든 학생이 직업, 시민정신, 수학에 대한 긍정적 위치와 장래 심화교육을 위한 개념적 기초를 위해서 모든 학생에게 이들의 토대를 제공해야 한다.

이 9-12학년에서의 중심 테마는 연결성이다. 학생들이 여러 가지 수학적 전망으로부터 같은 현상을 보았을 때 그것의 응용과 수학의 이해를 보다 풍요롭게 하는 것을 개발해야 한다. 특히 우리의 아이들이 시민정신, 직업, 다음의 공부를 위하여 그들을 준비시

키는 수학적 지식과 양에 대한 문맹의 정도를 높여야 한다.

## 3. 논의와 결론

지금까지 논의한 수학교육에 대한 비전을 성취하기 위해서는 모두가 함께 노력해야 한다. 여러 가지 배경과 능력이 다른 학생들은 중요한 수학적 아이디어를 배우고 교사들과 함께 활동하게 된다. 이때 학생들은 그들이 배우고 있는 수학에 의해 고무되어야하고 그들이 배우는 수학학습을 위한 책임감을 갖도록 해야한다. 교실환경은 평등해야하고 도전적이어야하며 21세기를 대비한 기술적인 준비도 되어 있어야한다.

학습원리의 실천에 있어서 수학의 교수와 학습은 보다 질 높은 수학교육을 위하여 지원하고 함유하기 위한 보다 광의의 문맥으로 대체되어야 한다. 학생지도에 따른 결과를 계속적으로 추적하여 그 결과를 이용하여 고쳐나가는데 집중해야한다.

특히 기술의 이용은 수학학습에 본질적인 요소이다. 기술의 도구는 적절히 선택되어야 하고, 시골과 도시의 구분이 없이 이를 이용하여 수학의 교육목적을 달성하는데 사용되어야 한다.

학교는 학생들을 동질집단이나 이질집단으로 만든 다음 수학을 지도하는 문제에 직면하게 된다. 이때 각각 다른 집단에 적절하고 색다른 지원을 할 수 있으면 이질집단에서도 효율적으로 학습을 할 수 있을 것이다.

교사들은 그들의 학생들을 잘 가르치기 위하여 수학적 지식과 교육학적 지식을 겸비한 “교수(teaching)를 위한 수학”을 알고 사용할 필요가 있으며 이 지식을 유지 개발해나가야 할 역할과 책임이 있다. 그들은 수학의 비밀의 탐험가, 상담가, 계획자, 정보제공자임에 틀림이 없다. 또한 그들은 학생들이 어떻게 수학을 학습하는가에 관한 새로운 지식에 적용하고 변화하는 교육과정과 기술에 관한 지

식을 익히고 그들의 실행능력을 확장 적용시켜나가야 한다.

모든 학생들은 이해를 통한 수학의 학습이 질 높은 수학교육에 접근하기 위하여 전 학년을 통하여 계속적으로 요구된다. 학생들은 교실을 벗어나서 그들의 일상생활에 수학을 사용하고 수학을 공부하는 시간을 할애해야 한다. 또한 그들의 수학에 대한 궁금증과 흥미를 해소하기 위하여 인터넷을 사용하는 방법을 배워야 할 필요가 있다.

그리고 학생들의 학습을 향상시키기 위해서는 행정가들과 정책입안자들이 조심스럽게 학교의 환경과 교육상황을 이해하고 적극적으로 지원해야 한다. 또한 2-4년간의 교육대학이나 사범대학에서의 학습은 매우 중요하다. 교사로서의 전문성 개발과 지식의 습득은 실제적이어야 한다.

학교수학의 원리와 규준은 앞으로도 계속적인 새로운 창조가 요구된다. 그리고 수학교육에 관계된 교사, 학생, 학부모, 사회구성원 모두가 수학교육에 관심을 가져야 한다.

우리의 역할과 실행의 어려움을 과소평가해서도 안되지만 어려움이 있더라도 우리의 합심해서 협력하면 노력은 결실을 맺을 것이다.

이상과 같이 21세기를 준비하는 미국의 NCTM의 학교수학의 원리와 규준에 대한 간략한 소개를 하였다. 미국의 수학교육에 대한 관계자 모두의 노력은 우리나라의 수학교육에 관계하는 모든 이들에게 자극과 하나의 모범사례를 보여주고 있다. 세계의 표준을 만들어가는 그들의 노력을 보면서 우리가 나아갈 수학교육의 방향설정과 개선에 대해 좋은 참고가 될 것으로 생각된다. 보다 자세한 내용을 전달할 수 없움이 아쉽지만 인터넷을 통하여 언제나 이 책자를 접할 수 있다. 인터넷 주소는 <http://www.nctm.org> 이다.

## 참고문헌

Brownell, William A. "The Place of Meaning in the Teaching of Arithmetic." *Elementary School Journal* 47 (January 1947): 256-265.

Hiebert, James, and Thomas P. Carpenter. "Learning and Teaching with Understanding." In *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, edited by Douglas A. Grouws, pp. 65-97. New York: Macmillan Publishing Co., 1992.

National Council of Teachers of Mathematics. *Assessment Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1995.

\_\_\_\_\_, *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1989.

\_\_\_\_\_, *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1991.

Skemp, Richard R. "Relational Understanding and Instrumental Understanding." *Mathematics Teaching* 77 (December 1976): 20-26. Reprinted in *Arithmetic Teacher* 26 (November 1978): 9-15.