스트레스함수가 균등분포인 가속수명시험
Accelerated Life Tests under Uniform Stress Distribution

원영철*
Won, Young Cheol

Abstract

This paper presents accelerated life tests for Type I censoring data under probabilistic stresses. Probabilistic stress, S_j, is the random variable for stress influenced by test environments, test equipments, sampling devices and use conditions. The hazard rate, Θ_j, is the random variable of environments and the function of probabilistic stress.

Also it is assumed that the general stress distribution is uniform, the life distribution for the given hazard rate, θ, is exponential and inverse power law model holds.

In this paper, we obtained maximum likelihood estimators of model parameters and the mean life in use stress condition.

1. 서론

지금까지의 가속수명시험은 첫째, 사용환경에 있는 제품이 결정적인 스트레스를 받는다는 전제를 하고 있다. 그러나 사용환경에 있는 제품은 다른 장소에서나 혹은 같은 장소에서도 사용자들의 환경이 다양할 수 있기 때문에 스트레스를 확률적으로 받는다고 할 수 있다. 둘째, 지금까지는 가속수명시험 대상 제품에 사용 스트레스보다 높은 스트레스가 몇 단계로 부가될 때에 스트레스는 시험이 끝날 때까지 변하지 않고 지속적으로 동일한 조건이 유지된다는 전제를 한다. 그러나 스트레스를 부가하는 도구나

† 본 연구는 2000년도 선린대학 연구비 지원에 의해 수행되었음

* 선린대학 공업경영과

시험환경을 고려해 보면 현실적으로 동일한 스트레스가 수명시험이 끝날 때까지 유지된다는 것은 불가능한 일이다. 왜냐하면 사용환경에서 제품이 받는 스트레스와 마찬가지로 가속수명시험 대상 제품에 가혹한 스트레스가 부과될 때에도 시험도구의 성능 정도에 따라 변화가 있는 스트레스가 부과될 수 있으며 시험대상 제품, 시험시기, 시험 여건 등 시험환경의 변화를 무시할 수 없으므로 스트레스를 받는 정도가 변화될 수 있기 때문이다.

예로서 자동차 주행시험에서 제품에 가해지는 스트레스는 일정하게 유지하려고 하지만 시험환경의 불안정으로 인하여 통제 불가능한 경우가 발생한다. 따라서 제품에 가해지는 스트레스를 확률변수로 나타낼 수 있다. 대부분의 가속수명시험은 시험대상 제품이 평균적인 스트레스를 받는 것으로 간주한다고 볼 수 있는데, 이것은 처음부터 확률적인 스트레스를 고려하는 것과 다르며 많은 경우에 확률적인 스트레스를 고려한다면 더욱 정확한 수명을 추정할 수 있다.

환경의 변화를 고려하는 기존의 가속수명시험은 수명분포의 모수가 환경의 함수와 선형결합하는 방법으로 스트레스의 변화를 고려하여 데이터를 분석하는 경우에 대한 연구들[1, 2, 3]이 있다. 또한 수명분포의 모수에 영향을 주는 요소를 수명분포에서 모수 대신에 그 모수와 곱으로 표현하고 이 요소가 변화하는 것을 고려하지만 스트레스와 모수의 관계를 나타내는 모델은 사용하지 않고 환경의 변화를 고려하는 경우에 대한 연구[4]가 있다.

본 연구는 사용환경에 있는 제품이 받는 스트레스가 확률적으로 변한다는 것과 가속수명시험을 할 때에 시험대상 제품이 받는 스트레스도 확률적으로 변하는 것이 같은 맥락이므로 이것을 고려하는 정시 관측 중단 가속수명시험 방법을 제안한다. 여기서 스트레스는 일정한 범위 내에서 확률적으로 변하는 것을 고려하여 이것을 표현하는 확률분포는 균등분포로 주어지고, 제품의 수명은 지수분포 그리고 스트레스와 고장률의 관계는 역승법칙 모델을 따른다는 가정을 하였다.

2. 모형화

[기호]

S_j: 스트레스 수준 j를 나타내는 확률변수, $S_j \sim G(s_j)$

Θ_j: S_j와 함수관계를 가지며 고장률을 나타내는 확률변수

T_{Θ_j}: Θ_j를 가지는 제품의 수명

$F_j(t)$: S_j하에서의 분포함수

A, B: 알려지지 않은 모수

η: 관측 중단 시간

D_j: η에서 관측 중단 할 경우 스트레스 수준 j에서 고장난 제품의 개수를

나타내는 확률변수

제품에 가해지는 스트레스는 일정하게 유지하려고 하지만 시험환경의 불안정으로 인하여 통제 불가능한 경우가 발생한다. 따라서 제품에 가해지는 스트레스를 확률변수 S_j로 나타낼 수 있다. 한편 제품에 가해지는 스트레스는 제품의 고장률에 영향을 주기 때문에 스트레스와 고장률 사이에 함수관계가 있을 것이다. 이 관계를 이용하면 스트레스분포를 알고 있는 경우 고장률분포를 결정할 수 있다. 그러므로 스트레스에 대한 고장분포함수를 유도해 낼 수 있다.

한편 스트레스가 확률변수이므로 고장률도 당연히 확률변수가 되며 스트레스의 확률밀도함수가 $g(s_j)$이고, 스트레스와 고장률 사이의 관계는 $\theta_j = h(s_j)$일 때 고장률에 대한 밀도함수는 $\Theta_j \sim g\{h^{-1}(\theta_j)\}\frac{h^{-1}(\theta_j)}{d\theta_j}$를 따른다는 것을 알 수 있다. 따라서 확률적 스트레스를 고려하는 제품의 고장시간에 대한 분포함수는 식 (1)처럼 된다.

$$
\begin{aligned}
F_j(t) &= P(T_{\Theta_j} \le t) \\
&= E_{\Theta_j}\{P(T_{\Theta_j} \le t \mid \Theta_j = \theta_j)\} \\
&= \int_0^\infty F(t \mid \theta_j) g\{h^{-1}(\theta_j)\} \frac{dh^{-1}(\theta_j)}{d\theta_j}\, d\theta_j
\end{aligned} \tag{1}
$$

본 논문에서 제안하는 확률적 스트레스를 고려한다는 것은 처음부터 시험대상 제품이 받을 수 있는 확률적 스트레스를 고려하는 스트레스를 부과하여 얻어진 데이터를 이용하여 모수를 추정하고 사용환경에서 받는 확률적 스트레스하에서 평균수명을 추정하는 것이다.

3. 가속수명시험 분석

[가정]

① 고장률 θ_j를 가지는 제품의 수명은 지수분포를 이룬다.

즉, $F(t \mid \theta_j) = 1 - e^{-\theta_j t}$

② $g(s_j)$는 균등분포를 이룬다.

즉, $g(s_j) = \frac{1}{b_j - a_j}$

③ ②의 a_j, b_j는 미리 알 수 있다.

④ 고장률과 스트레스 사이의 관계는 역승법칙 모델을 따른다.

즉, $\theta_j = A\, s_j^{\,B}$ ■

여기서, $j=0,1,\cdots,m$이며, $j=0$인 경우는 사용환경에서의 스트레스 수준이다. 식 (1)에 대하여 고장률 θ_j를 가지는 제품의 수명은 지수분포를 따르고 $g(\theta_j)$는 균등분포를 따른다는 위의 가정에 의하면 식 (2)가 된다.

$$F_j(t) \; = 1-\left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{B}} \frac{1}{B}\, \frac{1}{(b_j-a_j)} \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{B}} \Gamma_t \tag{2}$$

$$\text{단, } \Gamma_t = \left\{ \Gamma_{tA\, b_j^B}\left(\frac{1}{B}\right) - \Gamma_{tA\, a_j^B}\left(\frac{1}{B}\right) \right\}$$

$$\Gamma_\lambda(a) = \int_0^\lambda y^{a-1} e^{-y} dy$$

확률적 스트레스하에서 확률밀도함수와 수명에 대한 기대값은 다음과 같이 표현된다.

$$f_j(t) = \left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{B}} \left(\frac{1}{B}\right)^2 \frac{1}{(b_j-a_j)} \Gamma_t - \left(\frac{1}{B}\right)\left(\frac{1}{t}\right) \frac{1}{b_j-a_j} \left(b_j e^{-tA\, b_j^B} - a_j e^{-tA\, a_j^B}\right) \tag{3}$$

$$E(T_j) = \frac{a_j^{\,1-B} - b_j^{\,1-B}}{A(b_j-a_j)(B-1)} \tag{4}$$

식 (4)에서 $B=1$인 경우에 로피탈의 정리를 적용해 보면 다음과 같다.

$$\lim_{B\to 1} E(T_j) = \frac{\ln b_j - \ln a_j}{A(b_j-a_j)} \tag{5}$$

또한 고장시간의 시점 t_s에서의 신뢰도 함수는 다음과 같다.

$$R_j(t_s) = \left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{B}} \frac{1}{B}\, \frac{1}{(b_j-a_j)} \left(\frac{1}{t_s}\right)^{\frac{1}{B}} \Gamma_{t_s} \tag{6}$$

한편 사용환경보다 높은 m개의 스트레스 수준에서 각각 가속수명시험을 하는 경우 η에서 관측 중단을 고려할 때 η이전에 $D_j = d_j$개의 고장이 생겼다고 가정하면, 모수 A와 B에 대한 표본 n_j개의 관측치에 대한 우도함수와 대수우도함수는 식 (7)과 (8)이 된다.

$$L(t;A,B) = \prod_{j=1}^{m}\left[\frac{n_j!}{(n_j-d_j)!}\left\{\left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{B}}\frac{1}{B}\frac{1}{(b_j-a_j)}\left(\frac{1}{\eta}\right)^{\frac{1}{B}}\Gamma_\eta\right\}^{n_j-d_j}\right.$$
$$\prod_{i=1}^{d_j}\left\{\left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{B}}\left(\frac{1}{B}\right)^2\frac{1}{(b_j-a_j)}\left(\frac{1}{t_i}\right)^{\frac{1}{B}+1}\Gamma_{t_i}\right.$$
$$\left.\left.-\left(\frac{1}{B}\right)\left(\frac{1}{t_i}\right)\left(\frac{1}{b_j-a_j}\right)\left(b_je^{-tA\,b_j^B}-a_je^{-tA\,a_j^B}\right)\right\}\right] \tag{7}$$

단, $\Gamma_\eta = \left\{\Gamma_{\eta A\,b_j^B}\left(\frac{1}{B}\right) - \Gamma_{\eta A\,a_j^B}\left(\frac{1}{B}\right)\right\}$

$$\ln L(t;A,B) = \sum_{j=1}^{m}\left[\ln\frac{n_j!}{(n_j-d_j)!} + (n_j-d_j)\left\{\frac{1}{B}\ln\left(\frac{1}{A}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\ln\left(\frac{1}{B}\right) - \ln(b_j-a_j) - \frac{1}{B}\ln\eta + \ln\Gamma_\eta\right\}\right]$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{d_j}\left[\ln\left(\frac{1}{B}\right) - \ln(b_j-a_j)\right.$$
$$+\ln\left\{\left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{B}}\left(\frac{1}{B}\right)\left(\frac{1}{t_i}\right)^{\frac{1}{B}+1}\Gamma_{t_i}\right.$$
$$\left.\left.-\left(\frac{1}{t_i}\right)\left(b_je^{-t_iA\,b_j^B}-a_je^{-t_iA\,a_j^B}\right)\right\}\right] \tag{8}$$

최대우도법에 의한 A와 B의 추정치는 각각 식 (7) 혹은 (8)를 최대화하는 경우의 $\hat{A}$, $\hat{B}$이다.

식 (7)에서 모수들에 대한 1차 편미분식은 각각 다음과 같다.

$$\frac{\partial L(t\,;A,B)}{\partial A}=\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{-\frac{1}{B}\left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{B+1}}\Gamma_{\eta}+\eta^{\frac{1}{B}-1}E_2}{\frac{1}{(n_j-d_j)}\left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{B}}\Gamma_{\eta}}\right\}$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{d_i}\left[\frac{\left(\frac{1}{B}\right)\left(\frac{1}{t_i}\right)^{\frac{1}{B}+1}\left\{-\left(\frac{1}{B}\right)^{\frac{1}{B}+1}\Gamma_{\eta}+\ t_i^{\frac{1}{B}-1}E_1\right\}+E_3}{\left(\frac{1}{B}\right)\left(\frac{1}{t_i}\right)^{\frac{1}{B}+1}\left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{B}}\Gamma_t-\left(\frac{1}{t_i}\right)E_1}\right] \tag{9}$$

$$\frac{\partial L(t\,;A,B)}{\partial B}=\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{\left(\frac{1}{A\eta}\right)^{\frac{1}{B}}\left(\frac{1}{B}\right)^{2}E_7+\left(\frac{1}{B}\right)E_6}{\frac{1}{(n_j-d_j)}\left(\frac{1}{A\eta}\right)^{\frac{1}{B}}\Gamma_{\eta}}\right\}$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{d_i}\left\{\frac{\left(\frac{1}{At_i}\right)^{\frac{1}{B}}\left(\frac{1}{B}\right)^{2}E_8+E_5+\left(\frac{1}{B}\right)E_1+t_iAE_4}{\left(\frac{1}{At_i}\right)^{\frac{1}{B}}\left(\frac{1}{B}\right)\Gamma_t-\left(\frac{1}{t_i}\right)E_1}\right\} \tag{10}$$

단, $E_1=b_je^{-t_iA\,b_j^B}-a_je^{-t_iA\,a_j^B}$

$E_2=b_je^{-\eta A\,b_j^B}-a_je^{-\eta A\,a_j^B}$

$E_3=\ b_j^{B+1}e^{-t_iA\,b_j^B}-\ a_j^{B+1}e^{-t_iA\,a_j^B}$

$E_4=\ b_j^{B+1}\ln b_j-\ a_j^{B+1}\ln a_j$

$E_5=b_j(\ln b_j)e^{-t_iA\,b_j^B}-a_j(\ln a_j)e^{-t_iA\,a_j^B}$

$E_6=b_j(\ln b_j)e^{-\eta A\,b_j^B}-a_j(\ln a_j)e^{-\eta A\,a_j^B}$

$E_7=\left(\frac{1}{B}\ln A\eta-1\right)\Gamma_{\eta}+(1-B)\Gamma_{2\eta}$

$E_8=\left(\frac{1}{B}\ln At_i-2\right)\Gamma_t+(1-B)\Gamma_{2t}$

$E_9=\ b_j^{B+2}e^{-t_iA\,b_j^B}-\ a_j^{B+2}e^{-t_iA\,a_j^B}$

$\Gamma_{2t}=\left\{\Gamma_{tA\,b_j^B}\left(\frac{1}{B}-1\right)-\Gamma_{tA\,a_j^B}\left(\frac{1}{B}-1\right)\right\}$

$\Gamma_{2\eta}=\left\{\Gamma_{\eta A\,b_j^B}\left(\frac{1}{B}-1\right)-\Gamma_{\eta A\,a_j^B}\left(\frac{1}{B}-1\right)\right\}$

또한 식 (9), (10)에서 모수들에 대한 2차 편미분식은 각각 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial^2 L(t\,;A,B)}{\partial A^2} = \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{E_1^*}{A^{-\frac{2}{B}}\,\Gamma^2_{\eta_j}}\right) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{d_j}\left[\frac{E_2^*}{\left\{\left(\frac{1}{B}\right)\left(\frac{1}{t_i}\right)^{\frac{1}{B}+1}\left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{B}}\Gamma_t-\left(\frac{1}{t_i}\right)E_1\right\}^2}\right] \quad (11)$$

단, $E_1^* = (n_j - r_j)\left[\left\{\frac{B+1}{B^2}A^{-\frac{1}{B}-1}\Gamma_\eta - \frac{1}{BA^2}\Gamma_\eta{}^{\frac{1}{B}}E_2\right.\right.$
$\left.\eta^{\frac{1}{B}}E_3\right\}A^{-\frac{1}{B}}\Gamma_\eta + \left\{\frac{1}{BA^{\frac{1}{B}+1}}\Gamma_\eta - \eta^{\frac{1}{B}-1}E_1\right\}$
$\left.\left\{-\frac{1}{BA^{\frac{1}{B}+1}}\Gamma_\eta + \eta^{\frac{1}{B}}\frac{1}{A}E_1\right\}\right]$

$$E_2^* = \left[\frac{1}{B\,t_i^{B+1}}\left\{\frac{B+1}{B^2A^{\frac{1}{B}+2}} - \frac{1}{B}\,t_i{}^{\frac{1}{B}}\frac{1}{A^2}E_1 + t_i{}^{\frac{1}{B}}E_3\right\} - t_iE_9\right]\left(\frac{1}{B\,t_i{}^{\frac{1}{B}+1}A^{\frac{1}{B}}}\Gamma_{t_i} - \frac{E_1}{t_i}\right)$$
$$+\left\{\frac{1}{B\,t_i{}^{\frac{1}{B}+1}}\left(\frac{1}{BA^{\frac{1}{B}+1}}\Gamma_{t_i} - t_i{}^{\frac{1}{B}-1}E_1\right) + E_3\right\}$$
$$\left\{\frac{1}{B\,t_i{}^{\frac{1}{B}+1}}\left(-\frac{1}{BA^{\frac{1}{B}+1}} + t_i{}^{\frac{1}{B}}\frac{1}{A}E_1\right) - E_3\right\}$$

$$\frac{\partial^2 L(t\,;A,B)}{\partial B^2} = \sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{E_3^*\,(A\eta)^{-\frac{1}{B}}B^{-1}\Gamma_\eta - E_4^*\,E_5^*}{(A\eta)^{-\frac{2}{B}}B^{-2}\,\Gamma_\eta^2}\right\}$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{d_j}\left[\frac{E_6^*\left\{(At_i)^{-\frac{1}{B}}\left(\frac{1}{B}\right)\Gamma_t-\left(\frac{1}{t_i}\right)E_1\right\}-E_7^*\ E_8^*}{\left\{\left(\frac{1}{At_i}\right)^{\frac{1}{B}}\left(\frac{1}{B}\right)\Gamma_t-\left(\frac{1}{t_i}\right)E_1\right\}^2}\right] \tag{12}$$

단, $E_3^*=(n_j-d_j)\Big[\ln A\eta(A\eta)^{-\frac{1}{B}}$

$\{(B^{-5}\ln A\eta-3B^{-4})\Gamma_\eta+B^{-3}\Gamma_\eta'\}$

$+(A\eta)^{-\frac{1}{B}}\{(B^{-4}\ln A\eta-2B^{-3})\Gamma_{2\eta}+B^{-2}\Gamma_{2\eta}'\}$

$-(A\eta)^{-\frac{1}{B}}\{(B^{-2}\ln A\eta-B^{-2})\Gamma_{2\eta}+B^{-1}\Gamma_{2\eta}'\}$

$-b_j\ln b_je^{-\eta A\ b_j^B}(\eta A\ b_j^BB^{-1}\ln b_j+B^{-2})$

$+a_j\ln a_je^{-\eta A\ a_j^B}(\eta A\ a_j^BB^{-1}\ln a_j+B^{-2})\Big]$

$E_4^*=(n_j-d_j)\left\{\left(\frac{1}{A\eta}\right)^{\frac{1}{B}}\left(\frac{1}{B}\right)^2E_7+\left(\frac{1}{B}\right)E_6\right\}$

$E_5^*=(A\eta)^{-\frac{1}{B}}\{(B^{-3}\ln A\eta-B^{-2})\Gamma_\eta+B^{-1}\Gamma_\eta'\}$

$E_6^*=(At_i)^{-\frac{1}{B}}(B^{-4}\ln At_i-2B^{-3})$

$\{(B^{-1}\ln At_i-2)\Gamma_{t_i}+(1+B)\Gamma_{2t_i}\}$

$+\left\{(At_i)^{-\frac{1}{B}}B^{-2}\right\}$

$\{-B^{-2}\Gamma_{t_i}+(B^{-1}\ln At_i-2)\Gamma_{t_i}'-\Gamma_{2t_i}+(1-B)\Gamma_{2t_i}'\}$

$-At_i\{\ b_j^{B+1}(\ln b_j)^2e^{-At_i\,b_j^B}+\ a_j^{B+1}(\ln a_j)^2e^{-At_i\,a_j^B}\}$

$-b_je^{-At_i\,b_j^B}(B^{-2}+B^{-1}At_i\ b_j^B\ln b_j)$

$-a_je^{-At_i\,a_j^B}(B^{-2}+B^{-1}At_i\ a_j^B\ln a_j)$

$+At_i\{\ b_j^{B+1}(\ln b_j)^2-\ a_j^{B+1}(\ln a_j)^2\}$

$E_7^*=(At_i)^{-\frac{1}{B}}\left(\frac{1}{B}\right)^2E_8+E_5+\left(\frac{1}{B}\right)E_1+t_iAE_4$

$E_8^*=(At_i)^{-\frac{1}{B}}\{(B^{-3}\ln At_i-B^{-2})\Gamma_{t_i}+B^{-1}\Gamma_{t_i}'\}$

$+e^{-At_i\,b_j^B}A\ b_j^{B+1}\ln b_j+e^{-At_i\,a_j^B}A\ a_j^{B+1}\ln a_j$

$$\frac{\partial^2 L(t;A,B)}{\partial B \partial A} = \sum_{j=1}^{m} \left\{ \frac{E_9^* (A\eta)^{-\frac{1}{B}} B^{-1}\Gamma_\eta - E_4^* E_{10}^*}{(A\eta)^{-\frac{2}{B}} B^{-2} \Gamma_\eta^2} \right\}$$

$$+ \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{d_j} \left[\frac{E_{11}^* \left\{ (At_i)^{-\frac{1}{B}} \left(\frac{1}{B}\right)\Gamma_t - \left(\frac{1}{t_i}\right)E_1 \right\} - E_7^* E_{12}^*}{\left\{ \left(\frac{1}{At_i}\right)^{\frac{1}{B}} \left(\frac{1}{B}\right)\Gamma_t - \left(\frac{1}{t_i}\right)E_1 \right\}^2} \right] \qquad (13)$$

단, $E_9^* = (n_j - d_j)\Big[B^{-3}(A\eta)^{-\frac{1}{B}}$

$\{A^{-1}\Gamma_\eta(\ln A\eta + 1) + \Gamma_\eta' \ln A\eta\}$

$+ (B^{-2} - B^{-1})\Big\{(A\eta)^{-\frac{1}{B}-1}\eta\Gamma_{2\eta} + (A\eta)^{-\frac{1}{B}}\Gamma_{2\eta}'$

$- B^{-1}\eta\big(b_j^{B+1} e^{-A\eta b_j^B} \ln b_j + a_j^{B+1} e^{-A\eta a_j^B} \ln a_j\Big]$

$E_{10}^* = B^{-1}\eta^{-\frac{1}{B}}\left(A^{-\frac{1}{B}-1}\Gamma_\eta + A^{-\frac{1}{B}}\Gamma_\eta'\right)$

$E_{11}^* = A^{-\frac{1}{B}-1}B^{-2}t_i\{(B^{-1}\ln At_i - 2)\Gamma_{t_i} + (1-B)\Gamma_{2t_i}\}$

$+ (At_i)^{-\frac{1}{B}}B^{-2}\{(AB)^{-1}\Gamma_{t_i} +$

$(B^{-1}\ln At_i - 2)\Gamma_{t_i}'(1-B)\Gamma_{2t_i}'\}$

$- t_i\big(b_j^{B+1} e^{-A b_j^B t_i} \ln b_j - a_j^{B+1} e^{-A a_j^B t_i} \ln a_j\big)$

$- B^{-1}t_i E_3 + t_i E_4$

$E_{14}^* = B^{-1} t_i^{-\frac{1}{B}}\left(A^{-\frac{1}{B}-1}\Gamma_{t_i} + A^{-\frac{1}{B}}\Gamma_{t_i}'\right) + E_3$

한편 관측정보행렬(observed information matrix) I_0는 $A=\hat{A}$, $B=\hat{B}$인 경우에 대하여 다음과 같다.

$$I_0 = \begin{bmatrix} \frac{-\partial^2 L(t;A,B)}{\partial A^2} & \frac{-\partial^2 L(t;A,B)}{\partial A \partial B} \\ \frac{-\partial^2 L(t;A,B)}{\partial A \partial B} & \frac{-\partial^2 L(t;A,B)}{\partial B^2} \end{bmatrix} \qquad (14)$$

표본이 충분히 클 때 $(\hat{A}, \hat{B})$은 평균이 (A,B)이고, 점근공분산행렬이 I_0^{-1}

인 이변량정규분포로 근사한다. 따라서 $\hat{A}$은 평균이 A이고, 점근분산이 $AsVar(A)$인 정규분포에 근사하므로 A의 100(1- γ)% 신뢰구간은 식 (15)로 표현되며, $\hat{B}$는 평균이 B이고, 점근분산이 $AsVar(B)$인 정규분포에 근사하므로 B의 100(1- γ)% 신뢰구간은 식 (16)으로 표현된다.

$$\hat{A} \pm z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{AsVar(\hat{A})} \tag{15}$$

$$\hat{B} \pm z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{AsVar(\hat{B})} \tag{16}$$

$B = \hat{B}$인 경우에 대하여 A의 100(1- γ)% 신뢰구간의 상한과 하한을 각각 U, L로 나타낸다고 하면 $E(T_j)$의 100(1- γ)% 신뢰구간은 다음과 같다.

$$\frac{a_j^{\,1-B} - b_j^{\,1-B}}{(B-1)(b_j - a_j)U} \le E(T_j) \le \frac{a_j^{\,1-B} - b_j^{\,1-B}}{(B-1)(b_j - a_j)L} \tag{17}$$

스트레스분포의 모수 a_j와 b_j는 축적된 기술이나 과거의 데이터 등으로 미리 알 수 있는 것으로 가정하였으며, 이것은 가속수명시험에서 흔히 말하는 스트레스 수준들을 결정하는 것이다. 만약 m수준의 스트레스를 사용한다면 a_j와 b_j의 값을 각각 m개를 미리 정하는 것과 같다. 따라서 가속수명시험 데이터를 이용하여 모수를 추정하고 이 값을 이용하여 사용환경에서 확률적 스트레스를 고려하는 제품의 평균수명을 추정할 수 있다.

제품의 수명분포가 지수분포를 따르고 스트레스가 $\frac{a_j + b_j}{2}$로 일정한 경우의 기대값은 식 (18)로 주어진다.

$$E(T_j) = \frac{2^B}{A\,(a_j + b_j)^B} \tag{18}$$

식 (4)에서 스트레스분포인 균등분포가 퇴화분포가 되게 하고 로피탈의 정리를 적용해 보면 위의 식 (19)과 같이 되어 스트레스가 일정한 것으로 되는 것을 알 수 있다.

$$\lim_{a_j \to b_j} E(T_j) = \lim_{a_j \to b_j} \frac{a_j^{\,1-B} - b_j^{\,1-B}}{A(b_j - a_j)(B-1)}$$

$$= \frac{1}{A\, b_j^{B}} \tag{19}$$

4. 수치예제

이 절에서는 두 수준에서 예비적으로 가속수명시험을 하고 이에 입각하여 모수를 추정하고, 추정량의 점근분포를 이용하여 모수의 구간추정과 시험을 분석하는 과정을 예를 들어 설명하고자 한다.

전압과 관련하여 발생하는 여러 요인에 의해 온도가 높아지므로 인해서 수명에 영향을 주는 어떤 제품이 있다고 하자. 이 제품은 온도가 수명에 직접적인 영향을 주며 온도를 기준으로 하여 가혹조건을 부가할 수 있다고 가정한다. 제품의 수명은 지수분포를 따르고 이 제품이 받는 스트레스 분포는 모수가 a_j와 b_j인 균등분포로 설명되는 $m=2$인 경우로, 낮은 스트레스 수준인 $j=1$에서와 높은 스트레스 수준인 $j=2$에서 가속수명시험하는 것을 살펴보자.

표 1 균등 스트레스분포하에서 고장시간 데이터

t_{1i}	t_{2i}
487.960, 1281.72, 1231.24, 1087.62,	860.350, 1245.47, 840.980, 937.830,
1241.97, 1436.31, 1339.78, 1123.43,	484.560, 1013.25, 1132.39, 1362.10,
916.870, 685.570, 1342.01, 847.190,	1170.94, 704.120, 1021.07, 886.840,
1055.91, 998.440, 752.920, 659.270	1100.23, 733.630, 563.100, 992.870,
	180.450, 880.970, 484.450, 733.250,
	986.010, 533.590, 1136.80

표 1의 자료는 낮은 스트레스 수준에서 $a_1=310, b_1=390$℃인 균등분포를 따르고, 높은 스트레스 수준에서는 $a_2=400, b_2=480$℃인 균등분포를 따른다고 가정하고, 제품의 수명이 평균 $\frac{1}{A\, s_j^{B}}$인 지수분포를 따를 때, A, B는 각각 2.64, 1.42 그리고 n_1, n_2는 각각 30개를 1500시간에서 관측 중단 가속수명시험하는 것을 시뮬레이션하여 얻은 d_1, d_2가 각각 16, 23개인 경우이다.

A와 B의 최대우도 추정치는 식 (7)혹은 (8)를 최대화하는 경우로 $\hat{A}$은 2.66, $\hat{B}$은 1.47로 주어진다. 사용조건에서 스트레스분포의 모수는 $a_0=140, b_0=210$℃로 알려진 경우에 식 (4)를 이용하여 $\widehat{E(T_0)}$을 구해보면 4995.4시간이 된다. 식 (14)

에 A와 B의 최우추정치를 대입한 관측정보행렬(observed information matrix)의 추정치 $\hat{I}_0$과 점근공분산행렬 $\hat{I}_0^{-1}$는 다음과 같이 주어진다.

$$\hat{I}_0=\begin{bmatrix} 46.1817 & -0.6733 \\ -0.6733 & 2.4824 \end{bmatrix}, \quad \hat{I}_0^{-1}=\begin{bmatrix} 0.0217 & 0.0059 \\ 0.0059 & 0.4028 \end{bmatrix}$$

또한 식 (15), (16)을 이용하여 A와 B의 95% 신뢰구간을 구해보면 (2.37127, 2.94873), (0.22606, 2.71394)가 되며, $E(T_0)$의 신뢰구간은 식 (17)에 의하여 (4506.26, 5503.63)이 된다.

5. 결론 및 활용방안

제품의 수명시험을 할 경우에 그 제품이 받을 수 있는 스트레스는 시간과 장소에 따라 확률적으로 변하기 때문에 시험장에서 각 부분별 장소에 따라 스트레스의 변화를 측정하고 그것들을 취합하여 전체적인 변화를 판단하여 어떤 분포를 이루는지 결정해야 하는데, 이것은 측정도구와 기술의 발달로 가능할 것이다. 또한 시간에 따른 스트레스의 변화과정을 나타내는 분포를 적합도 검정을 통한 선택과 선택된 모수의 추정이 필요한데, 이것은 통계학적으로 가능하다. 그러나 제안된 방법은 평균적인 스트레스를 고려하여 모형화한 고장분포의 선택과 선택된 모수를 추정하는 것보다 다소 어려움이 있다. 특히 스트레스의 변화가 심하지 않거나 스트레스 분포를 정확하게 파악하지 못 할 경우에는 기존의 방법을 사용해야 할지도 모른다. 따라서 관련된 추가적 분석과 이를 이용한 가속수명시험 방법이 더 경제적 일 때, 본 연구에서 제안된 모형이 적용가능 할 것이다.

참고문헌

[1] Glaser, D. F., "Estimation for a Weibull Accelerated Life Testing Model", Nav. Res. Log., Vol. 31, pp. 559-570, 1984.
[2] Glaser, D. F., "Weibull Accelerated Life Testing with Unreported Early Failures", IEEE Trans. Rel., Vol. 44, No. 1, pp. 31-36, 1995.
[3] Kvam, P. H. and F. J. Samaniego, "Life Testing in Variably Scaled Environments", Technometrics, Vol. 35, No. 3, pp. 306-314, 1993.
[4] Meeter, C. A. and W. Q. Meeker, "Optimum Accelerated Life Tests with a Nonconstant Scale Parameter", Technometrics, Vol. 36, No. 1, pp. 71-83. 1994.

저자소개

원영철 : 현 선린대학 공업경영과 교수
관심분야 전자상거래, 멀티미디어, 통계응용, 시스템 안전.