

論文2000-37TC-11-4

# 코플래너 도파로 해석을 위한 정확한 Closed-Form 그린함수

## (Accurate Closed-Form Green's Function for the Analysis of Coplanar Waveguides)

姜 鍊 德 \* , 李 澤 璟 \*

(Yeon-Duk Kang and Taek-Kyung Lee)

## 요 약

평면형 구조에서 공간영역 그린함수를 구하기 위해서는 무한 Sommerfeld 적분을 계산하여야 한다. 무한 적분을 짧은 시간에 계산하기 위한 복소 영상법(complex image method)과 2단계 근사화법(two-level method)은 전원점과 관측점 사이의 거리가 가까운 경우에는 정확하지만, 거리가 멀어지면 오차가 커지게 된다. 본 논문에서는 실수축 상의 적분경로에서 파수영역 그린함수를 근사화 함으로써 코플래너 도파로 구조에서 기존의 결과에 비해 정확한 closed-form 그린함수를 구하는 방법을 제시하였다.

## Abstract

In the layered medium, infinite Sommerfeld integral must be evaluated to calculate a space domain Green's function. The complex image method and the two-level method provide rapid calculation and accurate solutions in the near-field region. However, in the intermediate and far-field region, the solutions are inaccurate due to the deformation of the sampling contour. In this paper, we propose a method to calculate an accurate closed-form Green's function for coplanar structure by sampling data on the real axis.

## I. 서 론

최근에 마이크로파 및 밀리미터파 집적회로의 전송 선로로서 코플래너 도파로(Coplanar Waveguide, CPW)의 사용이 증가하고 있으며, 높은 주파수에서 사용할 경우에 마이크로스트립 선로에 비하여 여러가지 장점을 지니고 있다<sup>[1-3]</sup>. 코플래너 도파로나 마이크로스트립 선로 등의 평면형 구조에 대한 특성을 해석하기 위

한 방법은 크게 파수영역 해석법(Spectral Domain Analysis, SDA)과 공간영역 해석법(Spatial Domain Integral Equation)으로 나눌 수 있다. 파수영역 해석법은 그린 함수의 계산이 간단하므로 계산시간을 단축시킬 수 있다. 공간영역 해석법은 보다 복잡한 기하구조에 대해서도 적용할 수 있으며 물리적인 해석이 가능하다는 장점이 있지만, 그린함수를 구하기 위해서는 무한적분을 하여야 하므로 계산시간이 많이 요구된다<sup>[4, 5]</sup>.

공간영역 모멘트법을 적용하기 위한 적분방정식으로서는 MPIE(Mixed Potential Integral Equation)는 다른 적분식에 비하여 매우 효율적이고 안정한 계산결과를 얻을 수 있다<sup>[4]</sup>. MPIE를 풀기 위해서는 적분식 내의 벡터 포텐셜과 스칼라 포텐셜 각각에 대한 공간영역 그린함수가 필요하며, 각 그린함수들은 무한적분으로 표현되는 Sommerfeld 적분을 포함하고 있어 그린함수를 구하는데 많은 계산시간이 필요하다. 무한 Sommerfeld 적분의 계산시간을 줄이기 위해 근사화를 통해

\* 正會員, 韓國航空大學校 電子·情報通信·컴퓨터공학부

(School of Electronics, Telecommunication, and Computer Eng., Hankuk Aviation Univ.)

※ 본 논문은 한국과학재단의 연구비 지원에 의한 결과임(과제번호 95-0100-13-01-3)

接受日:2000年8月1日, 수정완료일:2000年10月17日

closed-form으로 바꾸는 방법에 대한 연구들이 진행되어 왔다<sup>[5-8]</sup>. 대표적인 closed-form 그린함수 근사법으로는 Y. L. Chow에 의해 제안된 복소 영상법(Complex Image Method)이나 M. I. Aksun 등에 의해 개선된 2단계 근사화 방법(Two-level Approach) 등이 있다. 복소영상법에서는 근거리 영역에서 크게 나타나는 quasi-static 항과 원거리 영역에서 크게 나타나는 표면파 성분을 먼저 추출한 다음 파수영역의 그린함수를 GPOF(Generalized Pencil-of-Function) 방법<sup>[9]</sup>이나 Prony 방법에 의하여 여러 항의 지수함수로 근사화하여 복소 지점에 위치하는 영상들의 합의 형태로 구한다. 파수 영역에서 Prony 방법을 적용하기 위해서는 변형된 경로상에서 근사를 하게 되므로 적분결과는 오차를 포함하게 된다. 2단계 근사화 방법에서도 변형된 경로상에서 근사를 하므로 적분결과에서 오차가 나타난다. 따라서 기존의 방법에서는 관측점이 전원점에서 멀리 떨어진 경우나 가까이 있을 때에는 비교적 정확하지만 중간 정도의 위치에서는 오차가 크게 나타난다.

본 논문에서는 코플래너 도파로 구조에서 매우 정확한 공간영역 그린함수를 구하기 위한 방법을 제안하였다. 변형된 경로상에서 파수영역 그린함수를 근사화하는 기존의 방법 대신에 원래의 적분경로인 실수축 상에서 근사화하여 closed-form 적분을 구하였다. 실수축 상에는 pole, branch point 등의 특이점이 나타나므로 이들을 먼저 제거하여 평탄한 함수를 구한 후 GPOF 방법을 적용하였다. 코플래너 도파로에 대하여 제안된 실수축 상 적분 방법을 이용함으로써 기존의 방법들에 비해 매우 정확한 그린함수를 구하였다.

## II. 실수축 상 적분에 의한 그린함수

코플래너 도파로의 해석을 위하여 등가원리를 적용하면 접지와 선로 사이의 갭에 해당하는 부분의 유전체-공기 경계면에 등가자류가 나타난다. 영상법을 적용하면 기판을 포함하는 영역의 그린함수를 구하기 위한 구조는 그림 1과 같다<sup>[3]</sup>. 기판의 두께는  $h$ 이며, 전원은 수평자기다이폴(Horizontal Magnetic Dipole, HMD)로서 원점에 위치하고 있다. 기판의 비유전율은  $\epsilon_r$ 로 가정하고, 관측점은  $z=0$  평면에 위치하고 있다. MPIE를 적용하기 위한 벡터 자기포텐셜과 스칼라 포텐셜에 대한 공간영역 그린함수는 각각

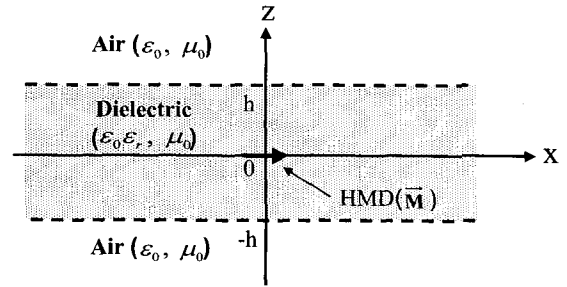


그림 1. CPW 해석을 위한 기판내의 자류

Fig. 1. Magnetic current inside substrate for the analysis of CPW.

$$G_F^{xx} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{4\pi r_0} e^{-jk_1 r_0} + \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{j2\pi} \int_0^\infty \frac{R_{TM}}{k_{z1}} J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \quad (1)$$

$$G_{qm} = \frac{1}{4\pi\mu_0 r_0} e^{-jk_1 r_0} + \frac{1}{j2\pi\mu_0} \int_0^\infty \frac{R_{TM} + R_{qm}}{k_{z1}} J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \quad (2)$$

로 표현된다. 여기서  $J_0$ 는 0차 Bessel함수를 나타내며  $R_{TM}$ 과  $R_{qm}$ 은 각각

$$R_{TM} = \frac{R_{TM}^{1,0} e^{-j2k_{z1}h}}{1 - R_{TM}^{1,0} e^{-j2k_{z1}h}} \quad (3)$$

$$R_{qm} = \frac{k_{z1}^2}{k_\rho^2} \left( \frac{R_{TE}^{1,0} e^{-j2k_{z1}h}}{1 + R_{TE}^{1,0} e^{-j2k_{z1}h}} + \frac{R_{TM}^{1,0} e^{-j2k_{z1}h}}{1 - R_{TM}^{1,0} e^{-j2k_{z1}h}} \right) \quad (4)$$

$$R_{TM}^{1,0} = \frac{k_{z1} - \epsilon_r k_{z0}}{k_{z1} + \epsilon_r k_{z0}}, \quad R_{TE}^{1,0} = \frac{k_{z1} - k_{z0}}{k_{z1} + k_{z0}} \quad (5)$$

이며,  $k_{z0}^2 + k_\rho^2 = k_0^2$ ,  $k_{z1}^2 + k_\rho^2 = \epsilon_r k_0^2 = k_1^2$ 이다.

그림 2는 식 (1)과 (2)의 피적분 함수의 특이점들을  $k_\rho$  평면에서 나타내고 있다.  $R_{TM}$  혹은  $R_{TM} + R_{qm}$ 의 분모가 0이 되는 위치에서 pole이 나타나며, 피적분 함수 내의  $k_{z0}$  및  $k_{z1}$ 에 의하여  $k_\rho = k_0$ 와  $k_1$ 에서 branch point가 나타난다.  $k_1$ 에서 나타나는 branch point는 전원이 기판의 내부에 위치함으로써 발생하며, 이 위치에서 발산하게 된다. 복소 영상법<sup>[5]</sup>에서는 저주파 근사에 의한 quasi-dynamic 영상과 pole 성분을 먼저 추출한다. Quasi-dynamic 영상은  $k_\rho$ 가 매우 큰 영역을 주로 근사하게 되므로 근거리 해에서 중요한 부분이다. Pole 성분은 표면파(surface wave)를 나타내므로, 원거리에서 지배적인 성분이다. Quasi-dynamic 영상과 pole 성분을 추출한 후 나머지 함수는 Prony 방법을 이용하여  $k_{z1}$ 의 지수 함수로 근사하여 복소 영상

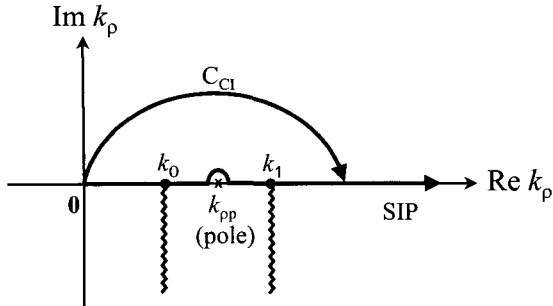


그림 2. 복소  $k_\rho$  평면에서의 적분경로  
Fig. 2. The integration path on the complex  $k_\rho$  plane.

해를 구한다. Prony 방법을 이용하기 위해서  $k_{z1}$  평면의 적분경로 상에서 샘플링하며,  $k_\rho$  평면에서는 그림 2에서 변형된 경로  $C_{C1}$  상의 데이터를 이용하여 근사화한다. 이러한 경로상에서 근사화할 경우 경로  $C_{C1}$ 의 끝부분보다  $k_\rho$ 가 큰 실수축 상에서는 제대로 근사가 이루어지지 않는다. 2단계 근사화법에서는  $k_\rho$ 가 큰 영역은 실수축 상에서 샘플링하여 근사화하고, 나머지 함수는  $C_{C1}$  상에서 근사화하는 방법으로서 근거리 해가 매우 정확하다. 그러나 이들 방법은 변형된 경로상에서 샘플링을 하여 피적분 함수를 근사화 한 다음 Sommerfeld identity를 이용하여 실수축 상에서 적분을 하는 방법으로서 오차의 가능성을 가지고 있다. 또한 원래의 피적분 함수는  $k_\rho = k_0$ 과  $k_1$  지점에 branch point가 있으나 근사화 된 지수 함수에서는  $k_0$  지점의 branch point가 나타나지 않으므로 실수축 상의 수치 적분에 의한 정확한 결과에 비해 오차가 나타나게 된다.

여기서 제안하는 방법은 정확한 그린함수를 구하기 위해 그림 2에서 본래의 Sommerfeld 적분경로(SIP)인 실수축을 따라서 근사화를 하고 적분을 하는 방법이다. 실수축 상의 표면파 pole 성분은 복소영상법과 마찬가지로 유수(residue)정리를 이용하여 구한다.  $k_\rho = k_0$ 과  $k_1$ 의 branch point 지점에서는 1차 미분이 무한대이므로 함수가 급격히 변화하여 해석적인 함수를 이용한 근사가 곤란하다. 따라서 이들 지점에서 피적분 함수가 평탄하게 되도록 하여야 한다.

그림 3은 비유전율 2.33,  $h=1.58\text{mm}$ 인 기관에 대해 주파수 30GHz에서의 파수영역함수  $R_{TM}$ 을 나타낸다.

그림에서 pole이 존재하는 부분에서 함수의 허수부분이 급격히 커지는 것을 알 수 있으며, 유전율이 증가하면 pole의 숫자가 증가한다. 또한  $k_\rho = k_0$ 와  $k_1$ 에서 branch point가 나타나며, 이들 지점에서 기울기가 무한대가 된다.

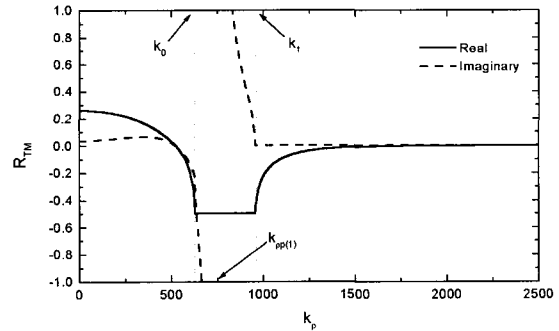


그림 3. 파수영역 함수  $R_{TM}$   
Fig. 3. The behavior of the spectral function  $R_{TM}$ .

마지막 단계는 이상의 과정을 모두 거친 다소 평탄한 형태의 함수에 GPOF 방법을 적용하여 지수함수의 함수로 근사화시키는 과정이다. 이때 지수함수는  $k_{z0}$ 에 대한 함수이며  $k_{z0}$  평면은 복소 평면이므로 먼저 그림 2에서  $k_\rho \geq k_0$  ( $\text{Im}[k_{z0}] \leq 0$ ) 구간에서 데이터를 샘플링하여 GPOF 방법을 적용하여 근사화하고, 그림 2의 나머지 구간인  $0 \leq k_\rho \leq k_0$  ( $0 \leq \text{Re}[k_{z0}] \leq k_0$ )에서는 삼각 함수로 근사화한다. 그림 2의 경로  $C_{C1}$ 는 복소영상법에서의 적분경로이며 SIP는 실수축 적분경로를 나타낸다.

1. 표면파 pole 성분

표면파 pole성분의 계산 방법은 복소 영상법<sup>[5]</sup>에서와 같다. 식 (1)의 적분항에서 pole을 추출하면 벡터 포텐셜에 대한 공간영역 그린함수는

$$G_F^{xx} = G_{F0} + G_{FP} + \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{j2\pi} \int_0^\infty \frac{R_{TM} - P_F}{k_{z1}} J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \quad (6)$$

으로 표현할 수 있다. 여기서

$$P_F = k_{z1} \sum_{i=1}^{N_{TM}} \frac{2k_{\rho(i)}}{k_\rho^2 - k_{\rho(i)}^2} S_{F(i)} \quad (7)$$

$$S_{F(i)} = \lim_{k_\rho \rightarrow k_{\rho(i)}} (k_\rho - k_{\rho(i)}) \frac{R_{TM}}{k_{z1}} \quad (8)$$

이며,  $S_{F(i)}$ 는 residue를 나타낸다. 식 (6)에서 입사파 성분  $G_{F0}$ 와 표면파 pole 성분  $G_{FP}$ 는 각각

$$G_{F0} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{4\pi\gamma_0} e^{-jk_1 r_0} \quad (9)$$

$$G_{FP} = -\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{2} \sum_{i=1}^{N_{TM}} S_{F(i)} k_{\rho(i)} H_0^{(2)}(k_{\rho(i)} \rho) \quad (10)$$

이다. 여기서  $H_0^{(2)}$ 는 0차 2종 Hankel 함수를 나타낸다.

그림 4는 그림 3으로부터 pole 성분을 빼낸 파수영역 함수  $R_{TM} - P_F$ 를 나타낸다. 그림에서 알 수 있듯이 pole에 의한 발산성분은 제거되었지만 branch point인  $k_\rho = k_0$ 인 부분과  $k_\rho = k_1$ 인 부분에서의 급한 기울기는 아직 남아있다. 다음 과정에서는 이러한 branch point 성분을 제거하여 다소 평탄한 형태의 함수를 얻게 된다.

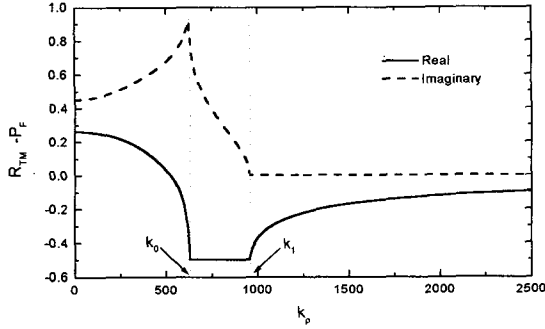


그림 4. 파수영역 함수  $R_{TM} - P_F$

Fig. 4. The behavior of the spectral function  $R_{TM} - P_F$ .

## 2. $k_\rho = k_1$ 지점의 발산

CPW에 대한 파수영역 함수  $R_{TM}$ 과  $R_{qm}$ 을  $k_{z0}$ 와  $k_{z1}$ 으로 전개하여 실수부와 허수부로 나누면

$$R_{TM} = \frac{\varepsilon_r k_{z1} k_{z0}}{A} - \frac{1}{2} + j \frac{[\varepsilon_r k_{z0}^2 - k_{z1}^2] \sin(k_{z1} h) \cos(k_{z1} h)}{A} \quad (11)$$

$$R_{qm} = \frac{k_{z1}^2 (\varepsilon_r - 1)}{2} \frac{(B - jC)}{B^2 + C^2} \quad (12)$$

와 같이 표현할 수 있다. 여기서

$$A = 2[\varepsilon_r^2 k_{z0}^2 \cos^2(k_{z1} h) + k_{z1}^2 \sin^2(k_{z1} h)]$$

$$B = k_{z0} k_{z1} [\varepsilon_r \cos^2(k_{z1} h) - \sin^2(k_{z1} h)]$$

$$C = [\varepsilon_r k_{z0}^2 + k_{z1}^2] \sin(k_{z1} h) \cos(k_{z1} h)$$

(612)

이다.  $R_{TM}$ 에 관한 식 (11)의 우변에서 첫째항과 셋째항은  $k_{z1} = \sqrt{k_\rho^2 - k_1^2}$ 을 포함하므로  $k_\rho = k_1$ 에서 branch point 나타난다. 피적분 함수는  $\frac{R_{TM}}{k_{z1}}$ 으로 나타나므로 첫째항과 셋째항의  $k_{z1}$ 은 분모와 상쇄되어 branch point가 없어진다.  $\frac{R_{TM}}{k_{z1}}$ 은  $R_{TM}$ 에 포함된 상수  $-1/2$ 로 인하여  $k_\rho = k_1$  지점에서 발산한다. 식 (12)에서  $R_{qm}$ 이  $k_{z1}$ 을 포함하므로,  $\frac{R_{qm}}{k_{z1}}$ 은  $k_\rho = k_1$ 에서 branch point가 나타나지 않으며 발산하지 않는다.

식 (1)과 (2)에서 적분식 내의  $\frac{R_{TM}}{k_{z1}}$ 과  $\frac{R_{TM} + R_{qm}}{k_{z1}}$ 은  $k_\rho = k_1$  지점에서 상수항에 의하여 발산하므로 이를 제거하여 특이점이 없는 함수로 만들면  $G_F^{xx}$ 는

$$G_F^{xx} = G_{F0} + G_{FP} + G_{F1} + \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{j2\pi} \int_0^\infty f_F(k_\rho) J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \quad (13)$$

로 나타낼 수 있다. 여기서

$$f_F(k_\rho) = \frac{R_{TM} - P_F - a_1}{k_{z1}} \quad (14)$$

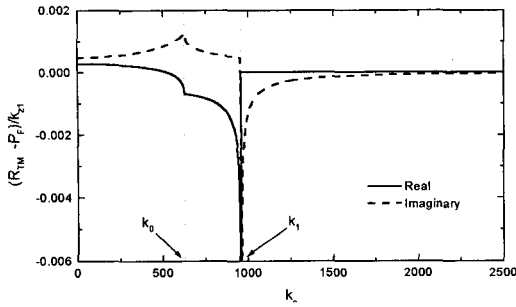
$$a_1 = \lim_{k_{z1} \rightarrow 0} R_{TM} = -\frac{1}{2} \quad (15)$$

로서  $f_F$ 는  $k_\rho = k_1$ 에서 특이점이 없는 함수이다.  $G_{F1}$ 은 특이점에 의한 성분으로서 Sommerfeld identity에 의하여

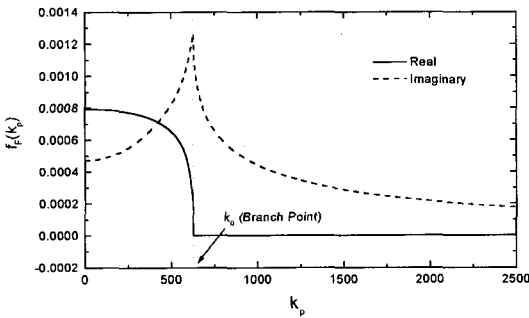
$$G_{F1} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{j2\pi} \int_0^\infty \frac{a_1}{k_{z1}} J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 a_1}{2\pi \rho} e^{-jk_1 \rho} \quad (16)$$

이다.

그림 5(a)는 그림 3과 같은 구조의 기판에 대하여 pole을 제거한 이후의 파수영역함수  $(R_{TM} - P_F)/k_{z1}$ 을 나타낸다. 여기서  $k_\rho = k_0$ 과  $k_1$ 에서 branch point가 나타나며,  $k_\rho = k_1$ 인 지점에서는 앞에서 설명한 바와 같이 발산한다. 그림 5(b)는 같은 조건에서의 파수영역 함수  $f_F(k_\rho)$ 를 나타내고 있으며,  $k_1$  지점에서 특이점이 제거된 것을 알 수 있다. 식 (2)의 스칼라 포텐셜에 대해서도 같은 방법으로 특이점을 제거할 수 있다.



(a)



(b)

그림 5. 파수영역 함수(a)  $(R_{TM} - P_F)K_{2l}$ , (b)  $f_F(K_\rho)$   
Fig. 5. The behaviors of the spectral function, (a)  $(R_{TM} - P_F)K_{2l}$ , and (b)  $f_F(K_\rho)$ .

3.  $k_\rho = k_0$  지점의 Branch Point

식 (13)의 적분식에서  $f_F(k_\rho)$ 는 함수내의  $k_{\rho 0} = \sqrt{k_\rho^2 - k_0^2}$ 에 의하여 그림 5(b)에서 본 바와 같이  $k_\rho = k_0$ 인 지점에서 branch point가 나타난다. 이 지점에서  $f_F(k_\rho)$ 의 1차 미분은 발산하며 불연속이 되므로 날카로운 peak가 나타나며, 해석적인 함수로 전개하는 것이 곤란해진다. 따라서  $k_\rho = k_0$ 인 위치에서 특이점이 발생하지 않는 평탄한 함수로 변환한 다음 지수함수 등으로 근사화하여 closed-form 해를 구하여야 한다.  $k_\rho = k_0$  지점에서 branch point를 포함하고 있는  $f_F$ 는 일반적으로

$$f_F(k_\rho) = f_{F0}(k_\rho)\sqrt{k_\rho - k_0} + f_{F1}(k_\rho) \quad (17)$$

로 나타낼 수 있다. 여기서  $f_{F0}$ 와  $f_{F1}$ 은  $k_\rho = k_0$ 에서 특이점이 없는 함수이며,  $\lim_{k_\rho \rightarrow k_0} f_F = \lim_{k_\rho \rightarrow k_0} f_{F1}$ 이다. 식 (17)은

$$f_F = \frac{g_F}{\sqrt{k_\rho^2 - k_0^2}} + f_{F2} \quad (18)$$

로 변환할 수 있으며,  $g_F$ 는  $k_\rho = k_0$ 에서 branch point가 나타나지 않으며 영이 되는 함수로서

$$g_F = f_{F0}(k_\rho - k_0)\sqrt{k_\rho + k_0} \quad (19)$$

이다.

식 (17)에서  $f_{F2}$ 를

$$f_{F2} = \frac{a_0}{k_\rho^2 + k_0^2}, \quad (20)$$

$$a_0 = \lim_{k_\rho \rightarrow k_0} (k_\rho^2 + k_0^2)f_F \quad (21)$$

로 선택하면,  $f_{F2}(k_0) = f_F(k_0)$ 가 되고,  $k_\rho \rightarrow \infty$ 에서 영으로 수렴한다. 따라서 식 (13)의 마지막 항의 적분은

$$\frac{\epsilon_r \epsilon_0}{j2\pi} \int_0^\infty f_F(k_\rho) J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho = \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{j2\pi} \int_0^\infty \frac{g_F}{\sqrt{k_\rho^2 - k_0^2}} J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho + G_{F2} \quad (22)$$

이다. 여기서

$$G_{F2} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{j2\pi} \int_0^\infty \frac{a_0}{k_\rho^2 + k_0^2} J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho = \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{j2\pi} a_0 K_0(\rho k_0) \quad (23)$$

이며,  $K_0$ 는 0차 modified Bessel 함수이다. 그림 6은 그림 3과 같은 구조의 기판에 대하여  $g_F(k_\rho)$ 를 보여주고 있다.  $k_\rho = k_0$  지점에서 branch point가 나타나지 않음을 확인할 수 있다.

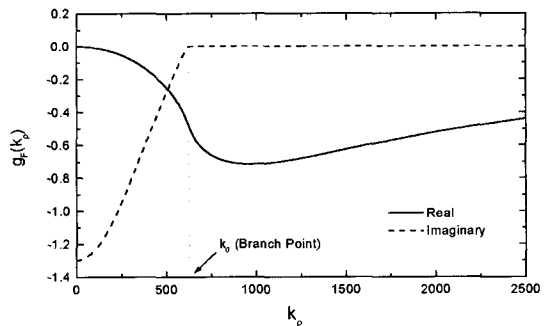


그림 6. 파수영역 함수  $g_F(k_\rho)$   
Fig. 6. The behavior of the spectral function  $g_F(k_\rho)$ .

4. Closed-Form 그린 함수

식 (22)의 우변의 적분식에서  $g_F(k_\rho)$ 는 평탄한 함수로서 지수함수 및 삼각함수의 급수 형태로 근사화한

후 적분공식을 이용하여 closed-form의 그린함수를 구한다. 우선  $g_F(k_\rho)$ 를  $k_{z0}$ 의 지수함수의 형태로 전개하면, Sommerfeld Identity에 의하여 복소영상들의 합으로 나타난다. 복소함수를 지수함수로 전개하기 위해서는 Prony 방법이나 GPOF 방법을 이용하며,  $k_{z0}$  평면에서 직선상에서 샘플링하여야 한다. 그림 7은  $k_{z0}$  평면의 Sommerfeld 적분경로(SIP)와 샘플링 경로를 나타내고 있다. 그림 2의  $k_\rho$  평면상에서 원래의 SIP는  $k_{z0}$  평면상에서 그림 7의  $C_1$ 과  $C_2$ 로 구성된 경로이나, 복소영상법에서는  $C_{Cl}$  경로상에서 데이터를 샘플링 하여 Prony 방법을 적용한다. 변형된 경로 상에서 샘플링 함으로써 오차가 발생하므로, 여기서는  $C_1$ 과  $C_2$ 상에서 샘플링하여 해를 구한다. 우선  $C_1$  상에서 GPOF 방법을 이용하여 근사화하여 복소영상 해를 구한 후  $C_2$  경로상의 함수에 대하여 삼각함수를 이용하여 근사화한다.

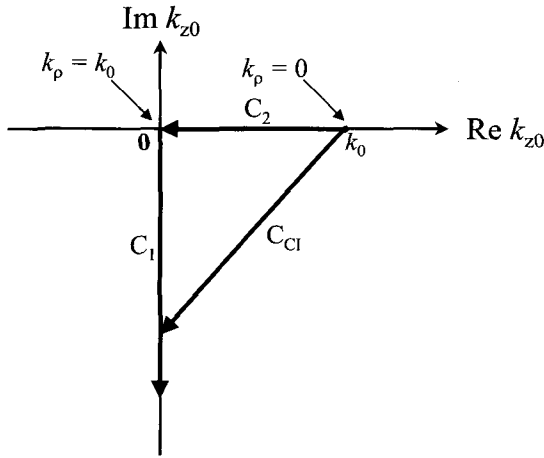


그림 7. 복소  $k_{z0}$  평면에서의 적분경로  
Fig. 7. The integration path on the complex  $k_{z0}$  plane.

GPOF 방법을 적용하기 위해서는  $k_{z0}$  평면상의 직선 경로 상에서 샘플링하여야 하므로 그림 7의  $C_1$ 에서  $g_F'$ 를  

$$g_F'(k_\rho) \approx c_0 + \sum_{i=1}^M c_i e^{-\gamma_i k_{z0}} = b_0 + \sum_{i=1}^M b_i e^{-\beta_i t}, \text{Im } k_{z0} \leq 0$$
 (24)

( $\approx g_F(k_\rho)$  for  $k_\rho \geq k_0$ )

와 같이 지수함수로 근사화하여  $g_F'$ 로 표시한다. 경로

$C_1$ 은 파라미터  $t$ 를 이용하여

$$k_{z0}(t) = -jk_0 t, \quad 0 \leq t \leq T_0$$
 (25)

로 나타낼 수 있으며, GPOF를 이용하여  $b_i$ 와  $\beta_i$ 를 구하면 식 (24)와 (25)로부터

$$c_i = b_i, \quad \gamma_i = \beta_i / jk_0$$
 (26)

이다. 식 (24)에서  $c_0$ 는  $k_\rho$ 가 무한대일 때  $g_F'$ 의 값을 나타내며,  $c_0 = b_0 = -a_1$ 이다.

경로  $C_1$ 에서의 근사를 이용하여 식 (22)의 우변의 적분식을 다시 쓰면

$$\begin{aligned} G_{F3} &= \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{j2\pi} \int_0^\infty \frac{g_F(k_\rho)}{k_{z0}} J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \\ &= \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{j2\pi} \left[ \int_0^\infty \frac{g_F'(k_\rho)}{k_{z0}} J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{k_0} \frac{g_F(k_\rho) - g_F'(k_\rho)}{k_{z0}} J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right] \end{aligned}$$
 (27)

이 된다. 식 (24)의 근사식과 Sommerfeld identity를 이용하여 위 식의 첫 번째 항을 계산하면

$$\begin{aligned} &\frac{\epsilon_r \epsilon_0}{j2\pi} \int_0^\infty \frac{g_F'(k_\rho)}{k_{z0}} J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \\ &= \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{2\pi} \left( \frac{-a_1 e^{-jk_0 \rho}}{\rho} + \sum_{i=1}^M \frac{c_i e^{-jk_0 \sqrt{\rho^2 + (-j\gamma_i)^2}}}{\sqrt{\rho^2 + (-j\gamma_i)^2}} \right) \end{aligned}$$
 (28)

이 된다.

식 (27)의 두 번째 항의 적분식을  $k_{z0}$ 에 대한 적분으로 변수 변환하면

$$\begin{aligned} G_{C1} &= \int_0^{k_0} \frac{g_F - g_F'}{k_{z0}} J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \\ &= \int_0^{k_0} [g_F - g_F'] J_0(\rho \sqrt{k_0^2 - k_{z0}^2}) dk_{z0} \end{aligned}$$
 (29)

이 된다. 함수  $(g_F - g_F')$ 는  $0 \leq k_{z0} \leq k_0$ 인 구간에서만 정의되어 있으므로  $-k_0 \leq k_{z0} \leq 0$  구간에 대칭인 함수를 가정하면 cosine 함수로 근사화할 수 있다. 따라서

$$g_F(k_{z0}) - g_F'(k_{z0}) = d_0 + \sum_{n=1}^N d_n \cos \left[ \frac{(2n-1)\pi}{2k_0} k_{z0} \right], \quad 0 \leq k_{z0} \leq k_0$$
 (30)

로 나타낼 수 있으며, 여기서  $d_0 = \lim_{k_{z0} \rightarrow k_0} (g_F - g_F')$ 이다.

식 (30)과 식 (29)를 이용하면 적분공식 [10]에 의하여

$$G_{Cl} = d_0 \frac{\sin(\rho k_0)}{\rho} + \sum_{n=1}^N d_n \frac{\sin(k_0 r_n)}{r_n} \quad (31)$$

이 된다. 여기서  $r_n = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{(2n-1)\pi}{2k_0}\right)^2}$  이다. 따라서 실수축 상에서의 적분에 의한 closed-form 그린함수의 최종형태는

$$G_F^{\infty} = G_{F0} + G_{FP} + G_{F1} + G_{F2} + G_{F3} \quad (32)$$

이다. 스칼라 포텐셜에 대한 그린함수도 같은 방법으로 구할 수 있다.

### III. 계산 결과

지금까지 설명한 실수축 상에서의 적분에 의한 closed-form 그린함수 방법을 이용하여 코플래너 도파로 구조에 대한 그린함수를 구하고 기존의 방법에 의한 결과들과 비교하였다. 기판의 두께는  $h=1.58$  mm로 가정하고, 주파수와 기판의 비유전율, 관측거리 등을 변화시켜 정확성을 시험하였다. 우선 식 (30)의 근사화에서 cosine 함수의 숫자  $N$ 에 따른 식 (29)의 적분값  $G_{Cl}$ 의 수렴성을 조사하였다. 그림 8은 주파수  $f=30$ GHz이고 관측거리  $k_0\rho=2$ 인 경우의 근사값을 수치적분과 비교하였다.  $N$ 이 증가할수록 수치적분값으로 수렴하며,  $N=30$  이상에서는 거의 정확한 값으로 수렴한다.

그림 9(a)는 기판의 주파수 30GHz일때 비유전율  $\epsilon_r=2.33$  및  $\epsilon_r=12.5$ 에 대한 벡터 포텐셜 그린 함수  $G_F^{\infty}$ 를, 그림 9(b)는 스칼라 포텐셜 그린함수  $G_{gm}$ 을 각각 나타

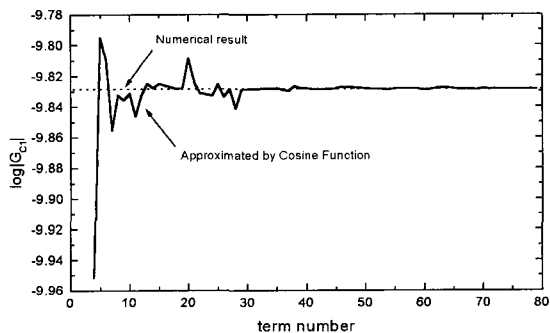


그림 8. 코사인 항의 갯수에 따른  $G_{Cl}$ 의 수렴성  
Fig. 8. Convergence of  $G_{Cl}$  vs. number of cosine term.

내며, 그림 10(a)와 그림 10(b)는 비유전율  $\epsilon_r=2.33$ 일때 주파수 5GHz 및 90GHz에서의 closed-form 그린함수  $G_F^{\infty}$ 와  $G_{gm}$ 을 각각 나타낸다. 그림에서와 같이 공간영역에서 관측점과 전원점 사이의 거리가 매우 가까운 경우에는 기존의 방법들과 제안된 방법 모두 거의 정확한 값을 나타내지만, 거리가 멀어지는 경우에는 본 논문에서 제안된 방법이 훨씬 정확한 결과를 제공함을 알 수 있다. 특히 기존의 방법들에서는 유전율이나 주파수가 낮은 경우에는 관측점과 전원점 사이의 거리가 먼 경우에 오차가 커지게 된다. 이러한 결과는 표면파 pole 성분의 크기가 작으므로 GPOF 근사에 의한 해가 큰 역할을 하여 원거리 해에 오차가 나타나기 때문이다.

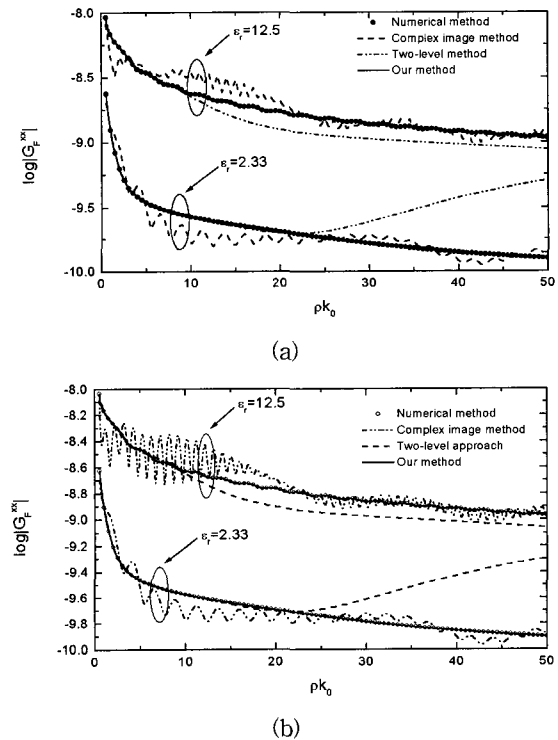
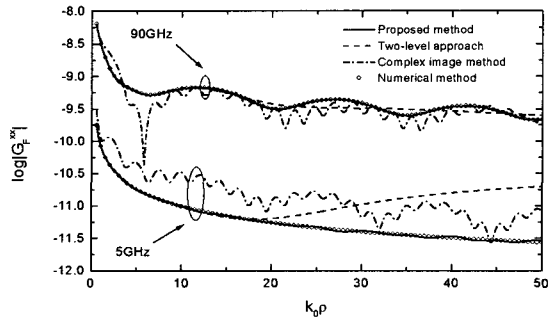


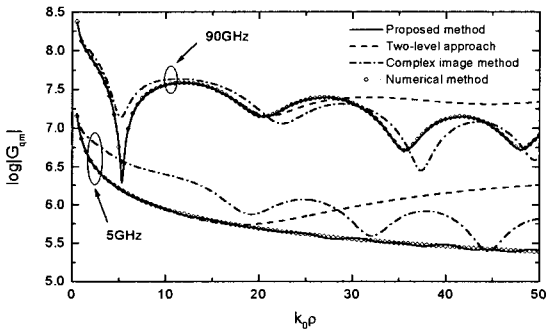
그림 9. 주파수 30GHz일 때의 그린함수 (a)  $G_F^{\infty}$ , (b)  $G_{gm}$   
Fig. 9. Magnitudes of Green's functions, (a)  $G_F^{\infty}$  and (b)  $G_{gm}$ , for  $f=30$ GHz.

각각의 경우 GPOF 근사에서 사용된 샘플링 데이터는 총 181개이며 지수항은 8개를 사용하였고  $T_0$ 는 30으로 정해주었다. 삼각함수로의 근사화에서는 40항의 코사인함수를 이용하여 정확한 결과를 나타내도록 하였다. 복소 영상법 및 2단계 근사화에 비해서는 삼각함

수 항의 수가 늘어나는 정도에 따라 시간이 더 소요된다. 128Mbyte의 램과 450MHz의 CPU 속도를 갖는 펜티엄 컴퓨터에서 수치해석 방법에 의한 계산시간은 한 지점 당 8초 정도가 소요되는 데 비하여, closed-form 그린함수 방법에서 10,000개 지점의 계산시간은 복소영상법 5.5초, 2단계 근사화 방법 3초, 본 논문에서 제안한 방법 6초 정도가 각각 소요되었다.



(a)



(b)

그림 10. 비유전율 2.33일때의 그린함수 (a)  $G_F^{xx}$  (b)  $G_{fm}$

Fig. 10. Maghinds of Green's functions, (a)  $G_F^{xx}$  and (b)  $G_{fm}$ . for  $\epsilon_r=2.33$ .

#### IV. 결론

공간영역 그린함수를 구하는데 필요한 Sommerfeld 적분을 빠르고 정확하게 계산할 수 있는 closed-form 형태의 그린함수를 구하였다. 기존에 이용되어왔던 적분경로 대신 실수축 상의 적분경로인 SIP를 따라 적분하는 방법을 제안하여 계산의 정확도를 높였다. 제안한 방법에서는 SIP 상에 존재하는 pole과 branch point 등의 특이점을 제거하여 얻어진 평탄한 함수를 지수함수와 코사인 함수로 근사화하여 공간영역 그린함수를 구

하였다. Branch point의 제거를 위해 기존 복소영상법에서 이용하던  $k_{z1}$  평면에서의 근사화가 아닌  $k_{z0}$  평면에서 근사화가 이루어지도록 하였으며, 따라서 지수함수 및 코사인 함수로의 근사화는  $k_{z0}$  평면에서의 데이터로부터 이루어진다.

코플래너 도파로의 closed-form 그린함수를 정확하게 구함으로써 불연속이나 소자 등의 해석을 보다 정확하게 할 수 있으며, 더욱 신뢰성 있는 설계 결과를 얻을 수 있다. 이 방법을 이용하여 다층구조에 대해서도 정확한 그린함수를 구할 수 있으며, 전자파의 복사특성 연구 및 안테나 모델링 및 해석을 위한 시뮬레이터의 개발에도 응용할 수 있다.

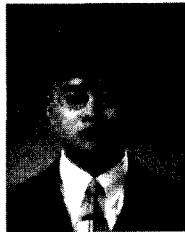
#### 참고 문헌

- [1] C. C. Tzuang and T. Itoh, "High-speed pulse transmission along a slow-wave CPW for monolithic microwave integrated circuits", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-35, pp. 697-704, Aug. 1987.
- [2] M. Naghed and I. Wolff, "A three-dimensional finite-difference calculation of equivalent capacitances of coplanar waveguide discontinuities", in *1990 IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig.*, pp. 1143-1146.
- [3] A. A. Omar and Y. L. Chow, "A Solution of coplanar waveguide with air-bridges using complex images", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-40, pp. 2070-2077, 1992.
- [4] J. R. Mosig, "integral equation technique", T. Itoh, Ed., in *Numerical Techniques for Microwave and Millimeter-wave Passive Structures*. New York: Wiley, pp. 133-207, 1989.
- [5] Y. L. Chow, J. J. Yang, D. H. Fang, and G. E. Howard, "Closed-form spatial Green's function for the thick substrate", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-39, pp. 588-592, 1991.
- [6] R. A. Kipp and C. H. Chan, "Complex image



- method for sources in bounded regions of multilayer structures”, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-42, pp. 860-865, May 1994.
- [7] G. Dural, M. I. Aksun, “Closed-form Green’s functions for general sources and stratified media”, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-43, pp. 1545-1551, 1995.
- [8] M. I. Aksun, “A robust approach for the derivation of closed-form Green’s functions”, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-44, pp. 651-658, May 1996.
- [9] Y. Hua, and T. K. Sarkar, “Generalized pencil-of-function method for extracting poles of an EM system from its transient response”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. AP-37, pp. 229-234, Feb. 1989.
- [10] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 5th ed., Academic Press, 1994.

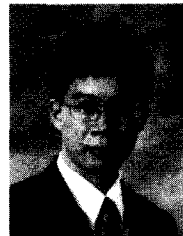
저 자 소 개



姜 鍊 德(正會員)

1969년 1월 9일 생. 1993년 2월 한국항공대학교 항공전자공학과 공학사. 1996년 2월 한국항공대학교 항공전자공학과 공학석사. 2000년 8월 한국항공대학교 항공전자공학과 공학박사. 관심분야 : 초고주파 집적

회로, 전자파 전파



李 澤 環(正會員)

1958년 1월 11일생. 1983년 2월 고려대학교 전자공학과 공학사. 1985년 2월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 공학석사. 1990년 2월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 공학박사. 1990년 3월~1991년 2월

한국과학기술원 전기 및 전자공학과 연구원. 1990년 5월~1991년 4월 Univ. of Texas at Austin, Dept. of Electrical and Computer Eng., Post-Doctoral Fellow. 1991년 9월~1992년 2월 한국과학기술원 정보전자연구소 연구원. 1992년 3월~현재 한국항공대학교 전자·정보통신·컴퓨터공학부 부교수. 관심분야 : 마이크로파, 안테나, 전자파 전파 및 산란, 레이더.