論文2000-37CI-5-2

퍼지 제어 시스템의 완화된 안정조건에 관한 연구

(A Study on the Relaxed Stability of Fuzzy Control Systems)

金 殷 泰 *, 李 昌 勳 **, 朴 玟 用 **

(Euntai Kim, Changhoon Lee, and Mignon Park)

요 약

본 논문에서는 퍼지 제어 시스템의 2차 안정도를 판정하는 새로운 방법을 제안한다. 퍼지 부 시스템간의 상호 작용을 선형행렬부등식을 이용하여 수치적으로 다룸으로서 제안한 방법은 안정도가 보장되는 퍼지 시스템의 영역을 넓히는 결과를 갖는다. 기존의 방식과 비교하여 제안된 안정조건은 기존의 안정조건을 완화한 것으로 엄밀한 방식으로 제안된 방식이 기존의 방식을 포함한 완화된 조건임을 보인다.

Abstract

In this paper, we propose a new condition to test the quadratic stability of fuzzy control systems. The proposed one enlarges the class of fuzzy control systems whose stability is ensured by representing the interactions among the fuzzy subsystems in a single power matrix and solving it by LMI (linear matrix inequality). Compared with the previous methods, the proposed one relaxes the stability condition to release the conservatism. Finally, the relationship between the suggested condition and the conventional well-known stability conditions reported in the previous literatures is discussed and it is shown in a rigorous manner that the proposed one includes the conventional conditions.

I. 서 론

1965년 Zadeh 교수가 퍼지 이론을 제안한 이래[1], 퍼지 논리는 산업과 가전분야에서 다양하게 적용되었다. 특히 자동제어 분야에서 제어 대상이 수학적으로 표시하기 어렵거나 비선형 적인 경우에 퍼지 이론은 우수한 성능을 나타내는 것으로 알려져 있다. 이 같은 퍼지 제어에 대한 연구는 크게 전문가의 지식을 모방한 휴리스틱 제어 (heuristics-based approach)와 모델 기반 제어 (model-based approach)의 두 가지 방식으로 나눌 수 있고 최근에는 모델 프리 제어 (model-free)방식도 대두되고 있다.

초창기 퍼지 제어는 전문가의 지식에 근거한 휴리스틱 제어 방식으로 많은 성공적인 제어 응용 예들이 발표되었다[2]. 그러나 이들은 모두 기존 제어 이론과 같은 수준의 이론적 기반을 갖지 못하였고 결과적으로 기존의 제어 학자들에게 큰 설득력을 갖지 못하는 문제점을 가지고 있었다. 이 같은 문제점으로 최근에는 기존의 제어이론과 같이 모델에 기반을 둔 모델 기반 제어 방식이 퍼지 학자들의 관심을 받고 있다[3].

* 正會員, 國立 韓京大學校, 制御計測工學科
(Hankyong National University, Dept. of Control and Instrumentation Engr.)
** 正會員, 延世大學校 電氣컴퓨터工學科
(Yonsei University, Dept. of Electrical and Computer Engr.)
接受日字:2000年5月22日, 수정완료일:2000年7月29日

이중 가장 대표적인 방식은 Sugeno에 의해 제안된 Takagi-Sugeno 퍼지 시스템을 (간략히 TS 퍼지 시스템이라 부름) 이용한 방식으로 Tanaka등은 일련의 논문에서 이의 안정도에 대한 많은 연구 결과를 발표하였고[5-9] 다른 학자들도 이에 참여하였다[10-13].

특히 최근 Tanaka는 논문[14, 15]에서 퍼지 규칙사이의 상호작용을 고려하여 기존의 안정 조건을 완화한 새로운 방식의 안정조건을 발표하였다. 그러나 위의 방식은 퍼지 규칙사이의 관계를 직접 해석적으로 접근함으로서 보수적 성향을 완전히 제거하지는 못하였다. 본 논문에서는 퍼지 규칙사이 관계를 수치적으로 직접 다룸으로서 기존의 완화된 퍼지 제어 시스템의 안정 조건을 더욱 완화하는 안정 조건을 제안하도록 한다. 또 이론적으로 새로이 제안된 방식이 기존의 Tanaka의 안정 조건을 포함하는 것을 보이도록 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 기존의 안정조건을 알아보고 3장에서는 이산 시간과 연속 시간 시스템 모두에 대해서 새로운 안정조건을 제안하며 4장에서는 모의 실험을 통하여 제안된 안정 조건의 타당성을 확인한다. 5장에서 본 논문의 결과를 토의한다.

Ⅱ. 기존의 내용

1. Takagi-Sugeno 퍼지 시스템

1985년 Takagi와 Sugeno에 의하여 제안된 Takagi-Sugeno (TS) 퍼지 시스템은 일반적인 비선형 시스템을 표현할 수 있는 도구로서 기존의 구간선형을 확장한 개념으로 볼 수 있다[4]. 이 시스템이 다입력 다출력인 경우 다음의 식으로 표현된다.

· IF-THEN 형식

R_i: IF $x_1(t)$ is M_{i1} and $x_2(t)$ is $M_{i2}, \cdots x_n$ is M_{in}

THEN $s\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{u}(t)$ (1)

· Input-output 형식

$$s\boldsymbol{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{r} w_i(\boldsymbol{x}) \{\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{u}(t)\}}{\sum_{i=1}^{r} w_i(\boldsymbol{x})} = \sum_{i=1}^{r} h_i(\boldsymbol{x}) \{\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{u}(t)\}, \tag{2}$$

$$w_i(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{n} M_{ij}(x_j), \quad h_i(\boldsymbol{x}) = \frac{w_i(\boldsymbol{x})}{\sum_{i=1}^{r} w_i(\boldsymbol{x})}, \quad h_i(\boldsymbol{x}) \geq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{r} h_i(\boldsymbol{x}) = 1$$

여기서 $\boldsymbol{x}^T(t) = [x_1(t)\ x_2(t) \cdots x_n(t)]$, R_i $(i = 1, 2, \cdots, r)$는 i번째 퍼지 규칙, r은 규칙의 수, h_i는 퍼지 기저함수 이며 $s\boldsymbol{x}(t)$의 정의는 다음과 같다.

$$s\boldsymbol{x}(t) = \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) & \text{연속의 경우} \\ \boldsymbol{x}(t+1) & \text{이산적 경우} \end{cases} \tag{3}$$

이제 다음의 식 (4)와 같이 퍼지 제어기가 플랜트와 전건부를 공유하도록 설계하면 다음의 식 (5)와 같은 폐루프 방정식을 얻게 된다.

· 퍼지 제어기

R_i: IF $x_1(t)$ is M_{i1} and $x_2(t)$ is $M_{i2}, \cdots x_n$ is M_{in}

THEN $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{F}_i \boldsymbol{x}$ (4)

· 폐루프 방정식

$$\begin{aligned} s\boldsymbol{x}(t) &= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} h_i(\boldsymbol{x}) h_j(\boldsymbol{x}) \{\boldsymbol{A}_i - \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{F}_j\} \boldsymbol{x}(t), \\ &= \sum_{i=1}^{r} h_i^2(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{G}_{ii} \boldsymbol{x}(t) + 2 \sum_{i<j\leq r} h_i(\boldsymbol{x}) h_j(\boldsymbol{x}) \left\{ \frac{\boldsymbol{G}_{ij} + \boldsymbol{G}_{ji}}{2} \right\} \boldsymbol{x}(t) \end{aligned} \tag{5}$$

여기서 $\boldsymbol{G}_{ij} = \boldsymbol{A}_i - \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{F}_j$.

2. 기존의 안정조건

본 절에서는 [5-9]에서 발표된 기존의 퍼지 시스템의 안정조건에 대한 결과들을 정리한다.

정리 1. (CFS)

식 (5)로 표현되는 연속 퍼지 시스템은 다음 식을 만족하는 공통 양한정 행렬 P가 존재하면 이차적으로 안정한다.

$P > 0$ (6-1)

$G_{ii}^T P + P G_{ii} < 0 \quad (i = 1, \cdots, r)$ (6-2)

$$\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) \leq 0 \tag{6-3}$$

$(i < j,\ h_i(\boldsymbol{x}) h_j(\boldsymbol{x}) \neq 0)$ □

정리 2. (DFS)

식 (5)로 표현되는 이산 퍼지 시스템은 다음 식을 만족

하는 공통 양한정 행렬 P 존재하면 이차적으로 안정한다.

$$P > 0 \tag{7-1}$$

$$G_{ii}^T P G_{ii} - P < 0 \qquad (i = 1, \cdots, r) \tag{7-2}$$

$$\left(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right)^T P\left(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right) - P \le 0 \tag{7-3}$$

$(i < j,\ h_i(x)h_j(x) \ne 0)$ □

3. 완화된 안정조건

다음의 정리는 참고 문헌 [14, 15]에 발표된 내용으로 앞 절의 정리 1과 정리 2의 안정조건을 완화한 것이다.

정리 3. (CFS)

식 (5)로 표현되는 연속 퍼지 시스템은 다음 식을 만족하는 공통 양한정 행렬 P와 행렬 M이 존재하면 이차적으로 안정한다.

$$P > 0, \qquad M \ge 0 \tag{8-1}$$

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} + (s-1) M < 0, \quad (i = 1, \cdots, r) \tag{8-2}$$

$$\left(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right)^T P + P\left(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right) - M \le 0 \tag{8-3}$$

$(i < j,\ h_i(x)h_j(x) \ne 0)$

여기서 s는 일정순간 활성화되는 퍼지 규칙의 수의 최대값이다. □

정리 4. (DFS)

식 (5)로 표현되는 이산 퍼지 시스템은 다음 식을 만족하는 공통 양한정 행렬 P와 행렬 M이 존재하면 이차적으로 안정한다.

$$P > 0, \qquad M \ge 0 \tag{9-1}$$

$$G_{ii}^T P G_{ii} - P + (s-1) M < 0, \quad (i = 1, \cdots, r) \tag{9-2}$$

$$\left(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right)^T P\left(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right) - P - M \le 0 \tag{9-3}$$

$(i < j, \qquad h_i(x)h_j(x) \ne 0)$ □

III. 새로운 안정 조건

1. 문제의 구성

정리 1, 2와 비교할 때 정리 3, 4는 퍼지 규칙간의 영향력을 고려하여 안정조건을 완화한 것이라고 할 수 있다. 그러나 정리 3과 4의 경우 참고 문헌 [14]에서 보듯 몇 개의 규칙을 완전 제곱의 형태로 변형하여 해석적으로 완화된 안정조건을 유도하였기 때문에 아직은 다소 보수적인 특성 (conservative)이 있다고 할 수 있다. 본 장에서는 정리 3과 4의 조건을 좀 더 완화한 퍼지 시스템의 안정조건을 제안하도록 한다. 본 논문에서 제안되는 조건은 정리 3과 4의 경우와 달리 퍼지 규칙 사이의 상호작용을 해석적으로 접근하지 않고 선형 행렬 부등식 (LMI) [16]을 이용하여 수치적으로 다루었으므로 기존의 완화된 안정조건을 좀 더 완화할 수 있는 특징이 있다.

2. 새로운 안정 조건

본 논문에서는 편의상 연속 퍼지 시스템의 경우에 대해서만 자세히 설명하도록 한다. 이산 시스템의 경우는 같은 방식이 그대로 적용될 수 있다.

정리 5. (CFS)

식 (5)로 표현되는 연속 퍼지 시스템은 다음 식을 만족하는 공통 양한정 행렬 P와 행렬 X_{ij}이 존재하면 이차적으로 안정한다.

$$P > 0 \tag{10-1}$$

$$\Lambda_{ii}^T P + P \Lambda_{ii} + X_{ii} < 0, \qquad (i = 1, \cdots, r) \tag{10-2}$$

$$\Lambda_{ij}^T P + P \Lambda_{ij} + X_{ij} \le 0, \qquad (i < j \le r) \tag{10-3}$$

$$\widetilde{X} \equiv \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1r} \\ X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{2r} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ X_{1r} & X_{2r} & \cdots & X_{rr} \end{pmatrix} > 0 \tag{10-4}$$

여기서 $\Lambda_{ii} \equiv G_{ii}, \ i = 1, \cdots, r, \quad \Lambda_{ij} \equiv \left(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right).$

(증명)

리아프노프 후보함수를 $V(x) = x^T P x$로 하면 그 시간의 도함수는 다음의 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= 2x^T P\left\{\sum_{i=1}^{r} h_i^2 G_{ii} x + 2\sum_{i<j\le r} h_i h_j \left(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right) x\right\} \\ &= \sum_{i=1}^{r} h_i^2 \{x^T (G_{ii}^T P + P G_{ii}) x\} \end{aligned}$$

$$+2\sum_{i<j\le r} h_i h_j\left\{ x^T\left(\left(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right)^T P + P\left(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right)\right)x\right\}$$

$$\le -\sum_{i=1}^{r} h_i^2 x^T X_{ii} x - 2\sum_{i<j\le r} h_i h_j x^T X_{ij} x$$

$$= -\begin{pmatrix} h_1 x \\ h_2 x \\ \vdots \\ h_r x \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1r} \\ X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{2r} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ X_{1r} & X_{2r} & \cdots & X_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 x \\ h_2 x \\ \vdots \\ h_r x \end{pmatrix}$$

$$= x^T H^T(-\widetilde{X})Hx$$

여기서 식(10-4)이 성립하면 dV/dt는 음한정이 되고 연속 퍼지 시스템 (5)는 이차적으로 안정하게 된다. □

정리 3과 비교하면 퍼지 규칙사이의 상호작용을 단일 행렬 $\widetilde{X}$에 넣고 수치적으로 처리함으로 정리 3보다 비보수적 (unconservative)의 특징을 갖게 된다.

(예제)

다음의 연속 퍼지 시스템을 생각한다.

$$\begin{cases} R_1: \text{ IF } x_1 \text{ is } M_{11}, \text{ THEN } \dot{x}(t) = A_1 x + B_1 u \\ R_2: \text{ IF } x_1 \text{ is } M_{21}, \text{ THEN } \dot{x}(t) = A_2 x + B_2 u \end{cases} \quad (11)$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} a & -10 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

퍼지 제어기는 각 국부 제어기가 -1과 -15에 고유치를 갖도록 설계한다. 그림 1 (a)(b)(c)는 퍼지 제어기의 안정도가 보장되는 파라미터의 영역을 보여주고 있다. (그림 1 (a)(b)(c)는 각 정리 1, 3, 5에 대한 결과를 나타낸다.) 본 그림에서 ●는 안정도가 보장되는 영역을 나타내고 ×는 보장되지 않는 영역을 나타내다. 그림에서 제안된 안정조건이 기존의 안정조건들 (정리 1과 3)보다 완화된 특성을 보이는 것을 알 수 있다. □

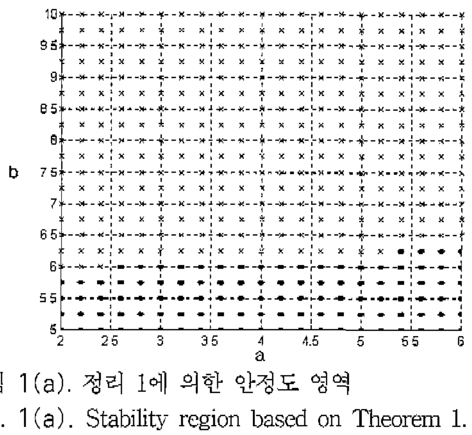

그림 1(a). 정리 1에 의한 안정도 영역
Fig. 1(a). Stability region based on Theorem 1.

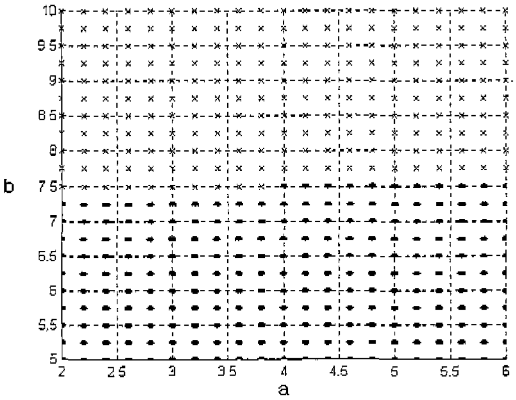

그림 1(b). 정리 3에 의한 안정도 영역
Fig. 1(b). Stability region based on Theorem 3.

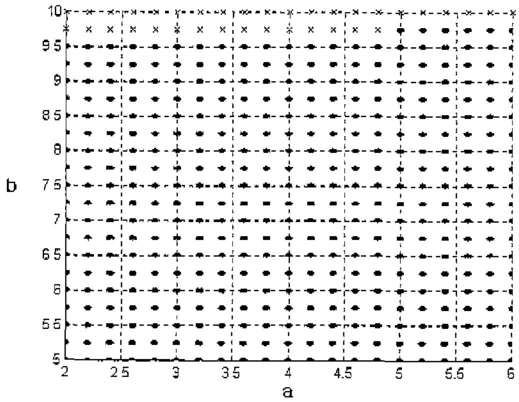

그림 1(c). 정리 5에 의한 안정도 영역
Fig. 1(c). Stability region based on Theorem 5.

같은 과정에 따라서 이산 시스템의 경우 다음의 결과를 얻을 수 있다.

정리 6. (DFS)

식 (5)로 표현되는 연속 퍼지 시스템은 다음 식을 만족하는 공통 양한정 행렬 P와 행렬 X_{ij}이 존재하면 이차적으로 안정한다.

$$P > 0 \quad (12\text{-}1)$$

$$A_{ii}^T P A_{ii} - P + X_{ii} < 0, \quad (i=1,\cdots,r) \quad (12\text{-}2)$$

$$A_{ij}^T P A_{ij} - P + X_{ij} \le 0, \quad (i < j \le r) \quad (12\text{-}3)$$

$$\widetilde{X} \equiv \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1r} \\ X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{2r} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ X_{1r} & X_{2r} & \cdots & X_{rr} \end{pmatrix} > 0 \quad (12\text{-}4)$$

여기서 $A_{ii} \equiv G_{ii},\ i=1,\cdots,r,\quad A_{ij} \equiv \left(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right)$. □

다음은 본 논문에서 제안된 조건과 기존의 조건사이의 관계를 설명하고 본 논문에서 제안된 안정조건이 기존의 조건을 포함하는 좀 더 완화된 조건임을 엄격한 방식으로 보이도록 한다.

정리 7. (CFS)

정리 1의 조건이나 정리 3의 조건이 성립하면 정리 5의 조건이 성립한다. 즉 정리 1과 3의 조건은 정리5의 조건의 충분조건이다.

(증명)

참고 문헌 [14]에서 정리 3이 정리 1보다 완화된 조건임이 지적되었으므로 본 논문에서는 정리 3과 5상의 관계만을 알아보도록 한다. 편의상 $r=s$의 경우를 다루지만 $r\neq s$인 경우도 같은 방식으로 쉽게 전개할 수 있다. 우선 (8)을 만족하는 양한정 행렬 P와 행렬 M이 존재하면 식 (8-2)는 등호를 포함하지 않은 (strict) 부등식이므로 다음을 만족하는 아주 작지만 양한정인 행렬 M_ε을 쉽게 찾을 수 있다.

$$P > 0, \qquad M \geq 0 \tag{13-1}$$

$$M_\varepsilon > 0, \qquad M_c \approx 0 \tag{13-2}$$

$$G_{ii}^T P + PG_{ii} + (r-1)M + M_\varepsilon < 0, \ (i=1,\cdots,r) \tag{13-3}$$

$$\left(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right)^T P + P\left(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right) - M \leq 0, \ (i<j) \tag{13-4}$$

이제 X_{ij}를 다음의 식 (14-1)과 (14-2)로 선택하면

$$X_{ii} = (r-1)M + M_\varepsilon, \qquad (i=1,\cdots,r) \tag{14-1}$$

$$X_{ij} = -M, \qquad (i=1,\cdots,r) \tag{14-2}$$

결과적으로

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1r} \\ X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{2r} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ X_{1r} & X_{2r} & \cdots & X_{rr} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (r-1)M + M_\varepsilon & -M & \cdots & -M \\ -M & (r-1)M + M_\varepsilon & \cdots & -M \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -M & -M & \cdots & (r-1)M + M_c \end{pmatrix}$$

이제 위 식의 좌우에 크기가 $(nr\times 1)$인 다음의 행렬을 곱하도록 한다.

$Z = \left(z_1^T \ z_2^T \ \cdots z_r^T\right)^T$. 그러면 $Z^T \tilde{X} Z$

$$= \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} (r-1)M + M_\varepsilon & -M & \cdots & -M \\ -M & (r-1)M + M_\varepsilon & \cdots & -M \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -M & -M & \cdots & (r-1)M + M_\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_r \end{pmatrix} = (r-1)\sum_{i=1}^{r} z_i^T M z_i - 2\sum_{i<j\leq r} z_i^T M z_j + \sum_{i=1}^{r} z_i^T M_\varepsilon z_i$$

$$= \sum_{i<j\leq r} (z_i - z_j)^T M (z_i - z_j) + \sum_{i=1}^{r} z_i^T M_\varepsilon z_i > 0$$

이것은 $\tilde{X} > 0$임을 나타내는 것이고 따라서 정리1과 3은 정리 5의 충분 조건이 되는 것이다. 참고적으로 예제에서 보듯이 역은 성립하지 않고 따라서 필요조건이 되지는 않는다.

정리 8. (DFS)

정리 2의 조건이나 정리 4의 조건이 성립하면 정리 6의 조건이 성립한다. 즉 정리 2과 4의 조건은 정리6의 조건의 충분조건이다.

(증명)

정리 7의 증명과 거의 일치하며 여기서는 생략한다. □

주의 1.

기존의 방식과 비교하여 본 논문에서 제안된 안정 조건은 퍼지 규칙 사이의 상호작용을 더 효율적으로 다루고 있기 때문에 퍼지 규칙의 수가 적을 때보다는 많을 때 더욱 우수한 성능을 나타내게 된다.

정리 9. (CFS)

다음을 만족하는 양한정 행렬 Q과 행렬 N_i이 존재하는 경우 식 (2)으로 표현되는 연속 퍼지 시스템은 식 (4)으로 표현되는 퍼지 제어기로 제어 될 때 이차적으로 안정하다.

$$Q > 0 \tag{15-1}$$

$$QA_i^T + A_iQ - N_i^T B_i^T - B_iN_i + Y_{ii} < 0, \ (i=1,\cdots,r) \tag{15-2}$$

$$QA_i^T + A_iQ + QA_j^T + A_jQ - N_j^T B_i^T - B_iN_j$$
$$- N_i^T B_j^T - B_jN_i + 2Y_{ij} \le 0, \quad (i < j \le r) \tag{15-3}$$

$$\widetilde{Y} \equiv \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1r} \\ Y_{12} & Y_{22} & \cdots & Y_{2r} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ Y_{1r} & Y_{2r} & \cdots & Y_{rr} \end{pmatrix} > 0. \tag{15-4}$$

이 경우 퍼지 국부 제어기는 다음의 식으로 주어진다.

$$F_i = N_i Q^{-1}, \qquad (i = 1, \cdots, r) \tag{15-5}$$

(증명)

$Q = P^{-1}$로 하고 식 (10-1, -2, -3)의 좌우에 Q를 곱하면 식 (15-1, -2, -3)을 얻을 수 있다. 이제 식 (15-4)에 대하여 $\widetilde{X}$의 좌우에 $diag(Q, Q, Q, \cdots, Q)$을 곱하면 식 (15-4)을 얻게 된다.

정리 10. (DFS)

다음을 만족하는 양한정 행렬 Q과 행렬 N_i이 존재하는 경우 식 (2)으로 표현되는 이산 퍼지 시스템은 식 (4)으로 표현되는 퍼지 제어기로 제어 될 때 이차적으로 안정하다.

$$Q > 0 \tag{16-1}$$

$$\begin{pmatrix} Q - Y_{ii} & QA_i^T - N_i^T B_i^T \\ A_iQ - B_iN_i & Q \end{pmatrix} > 0, \ (i = 1, \cdots, r) \tag{16-2}$$

$$\begin{pmatrix} Q - Y_{ij} & \frac{1}{2}(QA_i^T + QA_j^T - N_i^T B_j^T - N_j^T B_i^T) \\ \frac{1}{2}(A_iQ + A_jQ - B_iN_j - B_jN_i) & Q \end{pmatrix} \ge 0$$
$$(i < j \le r) \tag{16-3}$$

$$\widetilde{Y} \equiv \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1r} \\ Y_{12} & Y_{22} & \cdots & Y_{2r} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ Y_{1r} & Y_{2r} & \cdots & Y_{rr} \end{pmatrix} > 0. \tag{16-4}$$

이 경우 퍼지 국부 제어기는 다음의 식으로 주어진다.

$$F_i = N_i Q^{-1}, \qquad (i = 1, \cdots, r) \tag{16-5}$$

(증명)

증명은 정리 9의 경우와 거의 같고 여기서는 생략하도록 한다. □

Ⅳ. 설계 예와 컴퓨터 모의 실험

본 절에서는 컴퓨터 모의 실험을 통하여 제안한 알고리즘의 타당성을 확인하도록 한다. 제어 대상 시스템은 참고문헌 [14]의 기어 트레인을 통하여 도립진자를 제어하는 모터시스템이다. 그 퍼지 모델은 다음의 식으로 주어진다.

$$\begin{cases} R_1: \text{ IF } x_1 \text{ is } M_1, \text{ THEN } \dot{x}(t) = A_1 x + B_1 u \\ R_2: \text{ IF } x_1 \text{ is } M_2, \text{ THEN } \dot{x}(t) = A_2 x + B_2 u \end{cases}$$

여기서 $x = (x_1 \ x_2 \ x_3)^T$, x_1 도립진자의 각이고, $x_2 = \dot{x}_1$이며 x_3 모터의 전류이다.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 9.8 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -10 \end{pmatrix}, \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -10 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

또 소속함수는 다음과 같다.

$$M_1(x_1) = \begin{cases} \dfrac{\sin x_1}{x_1} & \text{for } x_1 \neq 0 \\ 1 & \text{for } x_1 = 0 \end{cases}$$
$$M_2(x_1) = 1 - M_1(x_1)$$

본 논문에서 제안된 안정조건을 기존의 안정조건과 비교하고 완화된 것을 확인하기 위하여 퍼지 제어기의 설계에 다른 부가 조건을 추가한다. 본 예제에서는 제어 입력에 제약을 두어 안정조건을 강화하도록 한다. 제어입력에 대한 제약조건 ($\|u(t)\|_2 \le \mu$) 은 다음의 식 (17)의 선형 행렬 부등식으로 표현된다.

$$\begin{pmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & Q \end{pmatrix} \ge 0 \tag{17-1}$$

$$\begin{pmatrix} Q & N_i^T \\ N_i & \mu^2 I \end{pmatrix} \ge 0, \tag{17-2}$$

여기서 $x(0)$는 퍼지 시스템의 초기치이다.

초기치가 $x(0) = (0 \ 10 \ 0)^T$고 $\mu = 35.9725$면 정리 7에 따른 선형행렬부등식은 공통 행렬 P와 조건을 만족하는 국부 퍼지 제어기 이득을 구할 수 있다.

$P = Q^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} 0.12611106401337 & 0.03430582255836 & 0.00265869107350 \\ 0.03430582255836 & 0.00999998643083 & 0.00078564767990 \\ 0.00265869107350 & 0.00078564767990 & 0.00006208356081 \end{pmatrix} > \mathbf{0} \quad (18\text{-}1)$$

$$\boldsymbol{F}_1 = (12.7532\ \ 3.5211\ \ 0.2734) \quad (18\text{-}2)$$

$$\boldsymbol{F}_2 = (8.0340\ \ 2.9082\ \ 0.2370) \quad (18\text{-}3)$$

그런 같은 조건에서 기존의 조건은 공통 행렬과 국부 이득을 찾지 못한다. 그림 2와 3은 초기치 $x(0) = (0\ 10\ 0)^T$에 대한 도립진자의 응답과 제어 신호를 보여주고 있다.

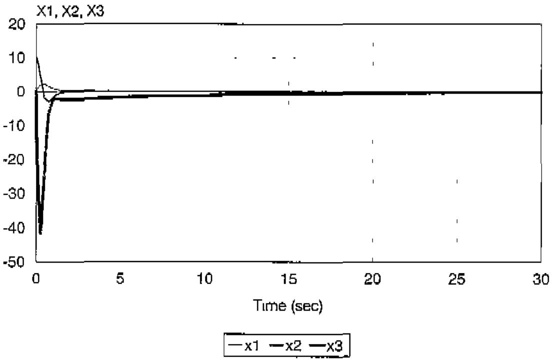

그림 2. 도립 진자의 응답

Fig. 2. The response of the pendulum.

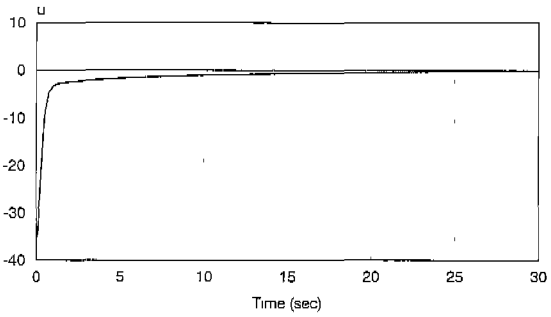

그림 3. 퍼지 제어기의 제어 신호

Fig. 3. The control input produced by the fuzzy controller.

V. 결 론

본 논문에서는 퍼지 제어 시스템의 완화된 안정도에 대한 새로운 방식을 제안하였다. 기존의 연구에서 퍼지 규칙간의 상호작용을 해석적으로 접근한데 비하여 수치적으로 이를 접근함으로서 그 안정도 판정 기준을 완화할 수 있었다.

그러나 본 논문의 접근 방식은 아직도 후건부에만 치우친 방식으로 전건부가 안정도에 미치는 영향에 대한 더 많은 연구가 요망된다.

참 고 문 헌

[1] L. A. Zadeh, "Fuzzy sets," *Information and Control*, vol. 8, pp. 338-353, 1965.

[2] E. H. Mamdani, "Applications of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant," *Proc. IEE*, vol.121, No.2, pp 1585-1588, 1974.

[3] R. Palm, D. Driankov and H. Hellendoorn, *Model Based Fuzzy Control*, Springer-Verlag:Berlin, 1996.

[4] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control," *IEEE Trans. Systems Man Cybernet*, vol. 15, No. 1 , pp116-132, 1985.

[5] K. Tanaka and M. Sugeno, "Stability analysis and design of fuzzy control systems," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 45, 136-156, 1992.

[6] K. Tanaka, *A Theory of Advanced Fuzzy Control*, Japan:Kyuoritsu Pub, 1994. (In Japanese).

[7] K. Tanaka and M. Sano, "A robust stabilization problem of fuzzy control systems and its application to backing up control of a truck-trailer," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 2, No. 2, pp 119-134, May 1994.

[8] H. O. Wang, K. Tanaka, M. F. Griffin, "An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 4, No. 1, pp 14-23, Feb 1996.

[9] K. Tanaka, T. Ikeda and H. O. Wang, "A unified approach to controlling chaos via LMI-based fuzzy control system design," *IEEE Trans. Circuits and Syst. -Part 1: Fundamental Theory and Appl.*, vol. 45, no. 10, pp. 1021-1040, Oct. 1998.

[10] M. A. L. Thathachar and P. Viswanath, "On the

stability of fuzzy systems," *IEEE Trans. Fuzzy Systems,* vol. 5, No. 1, pp 145-151, Feb 1997.

[11] S. H. Żak, "Stabilizing fuzzy system models using linear controllers," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 7, No. 2, pp 236-240, Apr., 1999.

[12] X. Ma, Z. Sun, and Y. He, "Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer," *IEEE Trans. Fuzzy Systems,* vol. 6, No. 1, pp 41-51, Feb., 1998.

[13] S. Cao, N. W. Rees and G. Feng, "Analysis and design of fuzzy control systems using dynamic fuzzy-state space models," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 7, No. 2, pp 192-200, Apr., 1999.

[14] K. Tanaka. T. Ikeda and H. O. Wang, "Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs," *IEEE Trans. Fuzzy Systems,* vol. 6, No. 2, pp 250-265, May, 1998.

[15] K. Tanaka. T. Ikeda and H. O. Wang, "An LMI approach to fuzzy controller designs based on the relaxed stability conditions," in Proc. of *IEEE Int. Conf. Fuzzy Systems (FUZZ/IEEE)*, pp.171-176, 1997.

[16] S. Boyd, L. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM:Philadelphia, 1994

저 자 소 개

金 殷 泰(正會員)

1970년 3월 17일 생. 1992년 2월 연세 대학교 전자공학과 졸업(공학사,전체수석). 1994년 2월 연세 대학교 대학원 전자 공학과 석사 과정 졸업 (공학석사). 1999년 2월 연세 대학교 대학원 전자공학과 박사 과정 졸업 (공학박사). 현재 국립 한경대학교 제어계측공학과 전임강사. 1998년~현재 IEEE Trans. Fuzzy Sys., IEEE Trans. Sys. Man and Cyber., IEEE Trans. Circuit and Sys., Fuzzy Sets and Systems 등에서 심의위원으로 활동중, 주관심분야는 지능 제어 및 모델링, 로보틱스, 비선형제어, 센서 공학및 그 응용등임

李 昌 勳(正會員)

1989년 2월 연세 대학교 전자공학과 졸업 (공학사). 1991년 연세대학교 대학원 전자공학과 석사과정 졸업 (공학석사). 2000년 2월 일본 동경 공업 대학교 시스템 과학과 박사과정 졸업 (공학박사). 2000년 3월~현재 연세대학교 전기컴퓨터공학과 계약교수, 주 관심 분야는 퍼지 제어 시스템의 안정도 해석과 그 응용, 퍼지 언어 해석등임

朴 玟 用(正會員) 第 32卷, B編, 第 2號 參照
현재 연세대학교 전기컴퓨터공학과 교수