

# 초기공정에서 M 통계량을 이용한 수정된 EWM와 MCEWM 관리도 적용기법

(Adjusted EWM and MCEWM charts scheme  
for M statistics in start-up process)

이 희춘\*

(Hee-Choon Lee)

**요약** 초기공정에서 개별관측치를 가지고 공정을 관리하는 적절한 기법이 필요하다. 이 논문에서는 현재의 시점과 이전의 시점에서 얻은 개별관측치만을 이용한 수정된 통계량을 가지고 공정을 관리하는 관리도 운영 기법을 제안한다. 제안된 수정된 EWM, MCEWM 관리도의 효율성을 보기 위해 기존의 EWM, X 관리도의 ARL을 비교해 본다. 수정된 지수 가중 이동 관리도가 지수 가중 이동 관리도 보다는 효율성이 떨어지지만 X 관리도 보다는 우수하다는 것을 확인할 수 있다.

**Abstract** In start up process control, it may be necessary to use appropriate scheme in monitoring processes with individual observations. In these situation individual observations are periodically drawn from the process. In this paper, using modifying statistics with individual measurement, we suggest a simple technique which operating control chart for monitoring the process. And compare individual observation control procedures that are X, an exponentially weighted moving(EWM), adjusted EWM and adjusted MCEWM charts. And estimate the ARL to detection of shifts in the process mean and standard deviation using simulation.

## 1. 서 론

무한경쟁시대에 제품의 품질, 판매, 구매, 회계 등 조직의 전 프로세스에 대한 경쟁력을 높여야 기업의 경쟁력이 살아난다. 이런 총체적 경쟁력 강화를 위해 많은 기업들이 채택하는 경영기법중의 하나가 6시그마이다.

또한 국가간, 기업간 품질 경쟁이 치열해져 품질문제가 기업의 중요한 전략적 과제로 되었다. 현재 많은 기업들이 정보기술과 고도의 통계적 기법을 바탕으로 하는 6시그마를 채택하고 있다. 이러한 품질 경영기법 중에 제품의 품질을 향상시키는 것이 가장 중요하다. 즉, 3시그마 수준의 품질 수준에서 6시그마 품질수준으로 향상시키기 위해 신

속하게 데이터를 추적 관리하여 결함이 나오는 주기를 발견하는 것이 주요한 전략이 되었다. 생산공정라인에서 공정상태를 조사하여 적절한 조치를 취하는 것은 좋은 품질을 생산하는데 대단히 중요하다. 공정의 이상유무에 대한 판단을 내리며 그 원인을 찾아내는 대표적인 기법으로 관리도가 있다. 관리도의 일반적인 형태는 W.A. Shewhart(1931)에 의해 Shewhart 관리도가 제안되었으며, E.S. Page(1954)는 누적합(cumulative sum:CUSUM) 관리도를 연구하였다. 또한 S.W. Roberts(1959)에 의해 개발된 지수 가중 이동 평균(exponentially weighted moving average :EWMA) 관리도 등이 있으며 이들 관리도들은 여러 학자들에 의해 연구, 발전되어 왔다.

Shewhart 관리형태는 제조와 서비스공정 모두에 품질개선 도구로서 이용되어 왔으며 이상원인을 지적하는 기본적인 법칙은 관리한계선 밖에 혹은 안에 통계량이 위치하는 것을 조사하는 것이다. 즉, 관리한계선 안쪽으로 통계량이 위

\*상지대학교 응용통계학과

치해 있으면 정상상태로, 바깥쪽에 위치해 있으면 공정이 이상상태임을 지적한다.

제품의 라이프사이클 중 초기 단계에서 결함을 찾아 품질 향상을 위해 드는 비용과 출하검사단계에서 결함을 찾아 재 작업하는 비용과 판매 후 고객 사용 단계에서 리콜하는 비용이 1:10:100 비율로 품질비용이 소모된다. 따라서 초기 공정 단계에서 결함을 발견해 수정하는 것이 매우 중요하며 경제적인 면에서도 유리하다. 또한 개별관리도를 이용한 관리도가  $\bar{X}-R$  관리도보다 민감도 면에서 떨어지는 것은 사실이나, 개별관측치에 관련된 관리도는 정보의 가장 빠른 피드백을 제공하기 때문에 초기공정을 관리해야 하는 현재의 공정관리체계에서 적합하다.

연속적으로 생산된 공정으로부터 다음과 같은 측정자료가 있다고 가정하자.

$$x_t = \mu + \varepsilon_t, \quad t=1, 2 \dots$$

여기에서  $\varepsilon_t$ 는 평균이 0이고 분산이  $\sigma^2$ 인 확률 표본오차이다. 관측값  $x_t$ 는 t 번째 시점에서 얻은 것으로 공정 평균이  $\mu$  이고 공정분산이  $\sigma^2$  인 공정분포로부터 선택되어진다고 가정한다.

$$x_1, x_2, \dots, x_{t-1}, x_t, x_{t+1}, \dots$$

이 논문에서는 각각의 시점에서 얻은 개별 관측자료의 가중치를 다르게 하는 수정된 지수 가중 이동(adjusted exponentially weighted moving:AEWM) 통계량을 기본으로 하는 EWM과 수정된 이동 중심선(adjusted moving centerline) EWM(AMCEWM) 관리도 설계 방법을 제시한다. 타당성을 검토하기 위해 기존에 많이 사용되는 EWMA, X 관리도에서 이상신호를 감지할 확률을 비교하여 각각의 관리도 효율성을 평가한다.

## 2. 개별관측치를 이용한 수정된 EWM 관리도 설계

다음과 같은 개별관측치에 가중치(smoothing coefficient)를 주는 수정된 지수 가중 이동(AEWM) 통계량을 이용한다. t 시점에서 계산된 통계량은 t 시점에서 택해진 관측치  $x_t$ 에 관련된 정보가 가장 영향력을 많이 받고 t-1 시점에서 얻어진 자료는 그 영향력이 작아지도록 한다.

$$M_t = (1 - \alpha)x_{t-1} + \alpha x_t \quad (1)$$

여기에서  $0 < \alpha \leq 1$  이다.

통계량  $M_t$ 의 평균과 분산은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} E(M_t) &= \mu_0 \\ \text{Var}(M_t) &= (1 - 2\alpha(1 - \alpha)) \cdot \sigma^2 \end{aligned} \quad (2)$$

$\mu_0$ 는 공정이 통계적으로 안정되어 있을 때 계산된 관리값(control value) 이다.

수정된 EWM 관리도의 관리한계선은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{UCL}_{\text{AEWM}} &= \mu_0 + K \cdot \sqrt{(1 - 2\alpha(1 - \alpha))} \cdot \sigma \\ \text{LCL}_{\text{AEWM}} &= \mu_0 - K \cdot \sqrt{(1 - 2\alpha(1 - \alpha))} \cdot \sigma \end{aligned} \quad (3)$$

여기에서 K는 임의의 상수이다.  $\sigma$ 는 공정이 통계적으로 안정되었을 때 관측치로부터 얻은 표준편차이다.

$\widehat{x}_{t+1}(t)$ 은 시점 t와 t+1 사이의 관측치에 대한 예측치로 본다면  $\widehat{x}_{t+1}(t) = M_t$ 로 쓸 수 있으며 t 시점에서 오차  $e_t$ 는 다음과 같이 정의할 수 있다. 이와 같은 이동 중심선(moving centerline) EWM(MCEWM) 관리도에 대한 연구는 Montgomery and Mastrangelo(1991) 등에 의해 진행되어졌다.

$$e_t = x_t - \widehat{x}_t(t-1)$$

수정된 통계량  $M_t$ 을 사용할 경우 시점 t와 t+1 사이의 중심선에 대한 관리 한계는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{UCL}_{\text{AMCEWM}} &= M_t + K_1 \cdot \sigma_e \\ \text{LCL}_{\text{AMCEWM}} &= M_t - K_1 \cdot \sigma_e \end{aligned} \quad (4)$$

여기에서  $K_1$ 은 임의의 상수이며  $\sigma_e$ 는 시점 1구간의 예측오차에 대한 표준편차이다. t+1 시점에서  $|x_{t+1}| > M_t + K_1 \cdot \sigma_e$ 이면 공정은 이상상태로 판단되어 공정을 중지시키고 필요한 조치를 취한다.

일반적인 지수적 가중 이동 평균(EWM) 통계량은 다음 식에 의해 계산할 수 있다. 일반적으로  $Z_0 = \mu_0$ 을 이용한다.

$$Z_t = (1 - \lambda)Z_{t-1} + \lambda x_t \quad (5)$$

여기에서  $0 < \lambda \leq 1$  이고 수정된 공식에 의해 계산된 통계량  $Z_t$ 는 가장 최근 값의 정보로부터 과거의 정보로 갈수록 그 가중치를 작게 주는 지수적 가중 이동 통계량이다. 통계량  $Z_t$ 의 평균과 분산은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} E(Z_t) &= \mu_0 \\ \text{Var}(Z_t) &= \left(\frac{\lambda}{2 - \lambda}\right) \cdot \sigma^2 \end{aligned} \quad (6)$$

EWM 관리도의 관리한계선은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$UCL_{EWM} = \mu_0 + K_2 \cdot \sqrt{\lambda/(2-\lambda)} \cdot \sigma$$

$$LCL_{EWM} = \mu_0 - K_2 \cdot \sqrt{\lambda/(2-\lambda)} \cdot \sigma \quad (7)$$

여기서  $K_2$ 은 임의의 상수이다.  $t$  시점에서 지수 가중 이동 통계량  $Z_t$ 가 관리한계선을 벗어나면 공정라인에 이상원인이 존재할 가능성이 있으므로 필요한 조치를 취한다.

정규분포  $N(\mu, \sigma)$ 에서 택해진 공정평균과 표준편차를 관리하고자 한다면 개별관측치를 이용한 수정된 통계량  $M_t$ 를 관리도에 표시한다. 즉, 수정된 EWM 관리도에서  $|M_t| > \mu_0 + K \cdot \sqrt{(1-2\alpha(1-\alpha))} \cdot \sigma$  이면 공정은 이상상태로 판단되어  $t$  시점에서 공정을 중지시키고 필요한 조치를 취한다. 공정모수 ( $\alpha, K$ )는 공정이 통계적으로 안정되어 있는 경우 평균 런의 길이를 구할 때 선택할 수 있다. 일반적인 EWM 관리도의 적절한 모수 ( $\lambda, K_2$ )을 구해 비교해 본다.

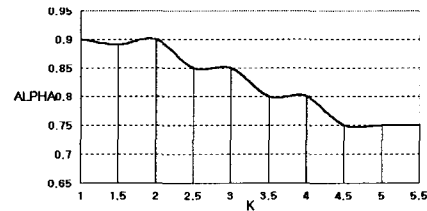
### 3. 수정된 EWM 관리도 모델설정 및 평가

효율적인 관리도는 관리상태에서는 가능한 오래 공정을 지속시키고 이상상태에서는 가능한 빨리 공정을 중지시킨 후에 이상상태가 발생한 원인을 찾아서 제거해야한다. 이때 제 1종 오류가 발생하는 것을 억제하도록 조치한다. 공정의 변화가 일어난 후부터 최초로 공정을 중지시킬 때까지 관측된 관측치의 수를 런의 길이라 하고, 런 길이의 기대값을 평균 런의 길이(average run length:ARL)라 한다. 평균 런의 길이를 고려할 때 공정이 관리값(target value) 근처에서 작동되면 평균 런의 길이는 길다. 반면에 받아들일 수 없는 만큼의 변화가 발생될 경우 평균 런의 길이는 가능한 짧게 설계된 관리도가 좋다. 관리도의 효율성을 평가할 때 평균 런의 길이를 많이 이용한다.

$$ARL = \frac{1}{P(\text{통계량} > UCL_{\text{통계량}} \text{ 혹은 } \text{통계량} < LCL_{\text{통계량}})} \quad (8)$$

가중치( $\alpha, \lambda$ )를 정해주는 논리적인 기준은 없으며 경험적으로 정하여 준다. 일반적으로 EWMA 관리도 적용에서 공정의 작은 변화를 감지하고자 할 때 가중치는  $0.15 \leq \lambda \leq 0.25$ 을 사용한다.[3]

다음은 수정된 EWM 관리도 적용시 공정이 정상상태일 때 ARL=500을 기준으로 가중치( $\alpha$ )와 상수값( $K$ ) 관계를 그래프로 그린 것이다. 여기에서는 10,000번의 반복된 모의 실험을 이용하여 결과의 신뢰성을 높였다.  $K=2.77$ 일 경우에  $\alpha=0.85$ 로 정할 수 있음을 확인하였으며 작은 공정의 변화에  $0.75 \leq \alpha \leq 0.90$ 에서 정하여 준다.



$K$ 값이 클수록  $\alpha$ 값이 작아지며  $K \geq 5$  일 경우  $\alpha$ 값을 0.75 내외에서 정할 수 있음을 확인할 수 있다.

수정된 EWM 관리도 설계는 다음의 방법으로 운영할 수 있다.

[1단계] ARL 곡선을 참고로 적당한 관리모수( $\alpha, K$ )를 선택하여 예비 관리한계선을 구한다.

[2단계]  $t$  시점에서 얻은 수정된 통계량  $M_t$ 을 관리도에 표시하여 공정의 이상유무를 확인한다. 이상원인이 제거된 상태에서 최적의 관리모수 및 관리한계선을 구한다.

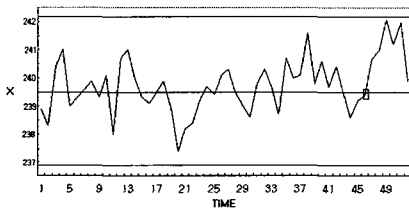
관측자료를 얻기 위해 IMSL의 GGNML을 이용한 모의실험을 하였으며 결과의 신뢰성을 높이기 위해 10,000 번의 반복실험을 하였다. 일반적인 EWM 관리기법에서  $\lambda=0.15, 0.20, K=2.99$ 일 때와 수정된 EWM 관리기법에서  $K=1.73, \alpha=0.80$ 일 때 ARL을 각각 계산하였다. 또한  $K=2.99$ 일 때 수정된 MCEWM 관리도에서 ARL을 계산하였다. 공정 변화에 따라 각각의 관리기법에서 얻은 ARL의 변화를 다음 표에 요약하였다.

공정 변화	AEWM	AMCEWM	EWM $\lambda=0.15$	EWM $\lambda=0.20$	X
0.0	458.08	463.76	477.57	477.52	477.08
0.5 $\sigma$	430.08	439.23	304.65	378.02	463.40
1.0 $\sigma$	349.13	363.48	220.21	251.22	420.27
1.5 $\sigma$	233.28	250.22	79.21	134.09	346.27
2.0 $\sigma$	123.28	136.82	38.61	93.87	250.64
2.5 $\sigma$	48.88	56.76	2.19	13.90	155.97
3.0 $\sigma$	13.99	17.06	1.81	5.86	79.46
3.5 $\sigma$	2.88	3.65	1.1	2.41	33.90

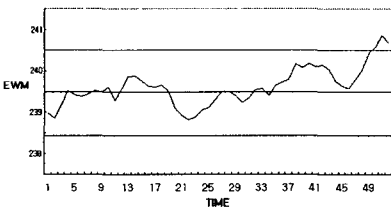
기존의 EWM 관리도가 AEWm 관리도보다 공정의 변화를 지적하는 능력이 우수하다는 것을 확인할 수 있다. 그러나 일반적인 Schwart 관리도보다 수정된 EWM 관리도가 효과적임을 확인할 수 있었으며, Montgomery and Mastrangelo(1991) 등이 제안한 방법을 참고로 한 수정된 MCEWM 관리도와는 비슷한 효과를 얻을 수 있음을 볼 수 있다.

#### 4. 적용 예

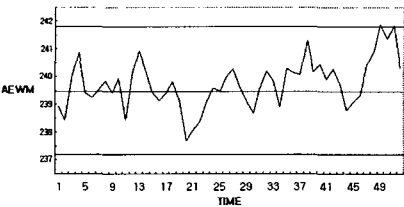
플라스틱 사출 공정에서 생산되는 사출물의 무게( $\mu_0 = 240, \sigma = 0.88$ )를 측정하여 52개의 표본 자료를 이용하여 공정관리를 하고자 한다. 46 번째 관측자료부터 임의로  $1.5\sigma$  만큼의 공정변화를 주었다. X, EWM, AEWm, AMCEWM 관리도에 각각의 통계량을 이용하여 표시한 후 관리한계선을 벗어나는 점을 조사한다.



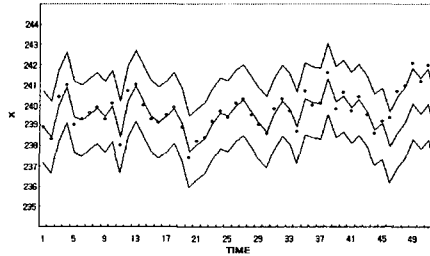
[그림1] X 관리도



[그림2] 일반적인 EWM 관리도



[그림3] 수정된 EWM 관리도



[그림4] 수정된 MCEWM 관리도

각각의 관리도에서 관리상한선 안쪽에 표시된 통계량을 조사하여 공정의 이상유무를 확인할 수 있다. [그림4]에서 시점마다 이동 중심선이 변경되어 나타나는 관리한계선에 점으로 표시된 것은 통계량을 나타낸다.

[그림1]은 일반적인 X 관리도를 나타낸 것으로 공정의 변화를 감지하지 못했음을 확인할 수 있다. [그림2]는 일반적인 EWM 관리도를 나타낸 것으로 공정의 변화를 시점 48 번째에서 감지하였음을 확인할 수 있다. [그림3]은 수정된 EWM 관리도를 나타낸 것으로 공정의 변화를 시점 49 번째에서 관리상한선을 조금 벗어난 상태에서 감지하였음을 확인할 수 있다. [그림4]는 수정된 MCEWM 관리도를 나타낸 것으로 공정의 변화를 시점 47 번째에서 관리상한선 부분에서 미세하게나마 감지할 수 있음을 알 수 있다.

#### 5. 결론 및 향후 연구방향

공정변화가 작을 때 지수 가중 이동 통계량을 이용한 EWM 관리도는 공정의 이상유무를 감지하는 것이 매우 효율적이다. 그러나 생산현장에서 지수가중 이동 통계량을 계산하고 누적되는 자료를 관리해야하는 불편이 있다. 수정된 지수 가중 이동 관리도가 지수 가중 이동 관리도 보다는 효율성이 떨어지지만 X 관리도 보다는 우수하다는 것을 확인할 수 있다. 또한 현재의 시점과 이전의 시점에서 얻은 자료만을 이용한 수정된 지수 가중 이동 통계량을 이용한 AEWm 관리도가 단순성, 적용면에서 효과적이다. 초기 공정에서 수정된 MCEWM 관리도의 이용은 공정의 크고 작은 변화에 비교적 효과적임을 확인할 수 있다. AEWm 관리도에서 가중치를 정하여 주는 이론적 근거는 없으나  $k=2.77$  부근일 때 경험적으로

$0.75 \leq \alpha \leq 0.90$ 에서 정하여 준다.

공정분산을 관리하는 수정된 EWmR 관리도의 타당성에 대해서는 좀 더 깊은 연구가 진행되어야 한다.

## 참 고 문 헌

[12] 지선수의, "통계적 품질관리", 경문사, 1997.

[1] Adke S. R. and Hong X., "A Supplementary Test Based on the Control Chart for Individuals", Journal of Quality Technology, Vol 29, No 1, pp 16-20, 1997.

[2] Arwan L. C. and Roberts H. V., "Time Series Modeling for Statistical Process Control", Journal of Business and Economic Statistics, Vol. 6, No. 1, pp 87-95, 1988.

[3] Hunter J. S., "The Exponentially weighted Moving Average", Journal of Quality Technology, Vol 18, pp 203-210, 1986.

[4] IMSL inc, "The I.M.S.L. library", 1980.

[5] Mastrangelo C. M. and Brown E. C., "Shift Detection Properties of Moving Centerline Control Chart Schemes", Journal of Quality Technology, Vol 32, No 1, pp 67-74, 2000.

[6] Mikel J. Harry, "Six sigma: A Breakthrough Strategy for Probability", Quality Progress, May., pp 60-64, 1998.

[7] Montgomery D. C. and Mastrangelo C. M., "Characterization of a Moving Centerline Exponentially Weighted Moving Average" Quality and Reliability Engineering International 11(2), pp 79-89, 1991.

[8] Nelson L. S., "Control charts for individual measurements", Journal of Quality Technology, Vol 14, No 3, pp 172-173, 1982.

[9] Susan L, Albin and Lan Kang and Gerald Shea, "An X and EWMA chart for individual observations", Journal of Quality Technology, Vol 29, No 1, pp 41-48, 1997.

[10] 백재욱, "6 시그마 경영", 자유아카데미, 1999.

[11] 지선수, "초기공정에서 개별관측치를 이용한 EWM-MR 관리도, 공업경영학회지, 21권 47집, pp 211-218, 1998.



### 이 희 춘

경희대학교 수리통계학 전공 박사학위 취득  
현재 상지대학교 자연과학군 응용통계  
학과 재직중  
주요 관심분야 : 응용통계분야와  
전산 통계분야