한국산업정보학회논문지 제5권 제3호 (2000. 9)

非正規分布에 對한 工程能力 評價에 關한 比較 硏究

(A Comparative Study on the Evaluation of Process Capability for Non-Normal Distributions)

이상용* (Sang-yong YI) 채규용** (Gyoo-yong Chea)

Abstract
The main objectives of this dissertation is to propose a forth generation index C for the case where the target value T is not equal to the midpoint of the specification limits (i.e. asymmetric tolerances), and show that this index is more sensitive compared to the standard PCI's in detacting small shifts of the process mean from the target value. In conclusion, in this dissertation , a new methods for estimating a measure of process capability for non-normally distributed variable data is proposed using the percentage nonconforming

1. 서 론

기업체에서 사용되고 있는 공정능력지수들은 전통적 6σ개념을 기초로 하며, C_p, C_{pk}는 Kane(1986), C_{pm}과 C_{pm}^*은 Chan et al.(1988)에 의거 정의되었고, Pearn, Kotz, and Johnson(1992)은 C_{pmk}를 제안하였으며, C_{pmk}는 Choi 와 Owen(1990)에 의하여 제안된 C_{pm}과 동일하다. 그 후 C_{psk}가 Benson(1994)에 의하여 개발되었다.

그리고 비정규공정에 대한 공정능력지수는 Pearson System의 경우 Clements(1989)에 의해 고안되었으며, 그 후 Pearn과 Kotz(1994-1995)에 의하여 연구되어왔다. Pearson system의 대안으로 개발된Jonson system의 경우는 Farnum(1996-1997)에 의해 제안되었다. 최근에 Lovelace (1994)에 의하여 비음수 값을 갖는 공정에 대한 공정능력 지수 C_{pb}가 개발되었고, 그후 Wright(1995)에 의해 C_s가 개발 되었다. 비정규 공정 데이터의 일반적인 데이터 변환에 대한 이론적 분포는 최근 문헌에서 소개되고 있는데 Lognormal, Gamma, Weibull 및 Johnson 시스템 분포들이 그 예이다.

Kane(1986)는 이러한 비정규분포를 나타내는 공정에 대해 정규분포를 하는 공정의 공정능력의 평가와 동일한 방법으로 직접 혹은 접합된 분포를 이용하여 규격을 벗어나는 불량률의 추정이 가능하다고 언급하고 있다.

일반적으로 비정규성에 관한 논의는 2가지 주요부분으로 나누어 볼 수 있다.

첫번째는 특성치 X의 분포가 특성화 비정규분포를 할 때 지수들과 그것의 추정량의 성질을 조사하는 것이다. 두번째는 비정규성에 강건하도록 만들어진 새로운 공정능력지수의 사용을 고려하고, 비정규성에 관한 방법의 개발을 허용하는 것이다.

그러나 McCoy(1991)는 정규분포만이 모집단 분포의 정확한 추정치를 잘 반영시키고 있다고 말한다.

본 연구에서는 비정규분포에 대한 공정능력의 평가를 Pearson system, Johnson system 및 Burr분포의 3가지 분포를 사용하여 규격을 벗어나는 불량률의 척도를 사용

*건국대학교 산업공학과
** 동양대학교 산업시스템공학과

함으로써 비정규공정의 공정능력에 대해 보다 합리적인 의사결정을 내릴 수 있는 새로운 공정능력의 척도를 제시하고자 한다.

2. 비정규 공정능력측도의 선행연구

비정규 공정능력측도의 선형연구는 김홍준(1997)에 의해 요약해서 나타낸다.

2.1 비음수값을 갖는 비정규 공정의 공정능력지수: C_{pb}

Lovelace(1994)는 비음수 값을 갖는 공정에 대한 공정능력지수를 한쪽규격의 C_p지수인 C_P^*의 대수정규 수정으로 개발되어지는 C_{pb}로 정의한다. 정규인 경우 C_p는 공정이 완전히 목표치에 일치한다면 공정이 운영할 수 있는 품질수준의 측도를 제시한다. 목표치는 규격범위의 중앙값으로 이해된다. 바꾸어 말하자면 C_p지수는 공정이 목표치에 위치한다면 공정에 사용되어지는 규격범위의 %를 가르킨다.(즉, 규격범위의 중앙값) 비음수값을 갖는 공정의 경우에 공칭치 혹은 목표치 역시 공정의 한계이다. 이러한 관점으로 인식된다면 목표치에 완전히 일치하는 공정은 단지 공정의 상측 3σ 꼬리의 범위에 관심이 있을 것이다.

그러므로 단지 상한치가 존재할 때의 한쪽규격 C_p 지수인 C_P^*는 적용가능하다.

상한 C_P^* 지수는 정규인 경우 식(2.1)와 같이 정의된다.

$$C_p^* = \frac{USL - T}{3\sigma} \qquad (2.1)$$

C_{pb}는 상기 지수를 대수 정규화시켜 식(2.2)와 같이 나타낸다.

$$C_{pb} = \frac{USL - T}{e^{\mu_Y + 3\sigma_Y} - e^{\mu_Y}} \qquad (2.2)$$

2.2 왜도에 민감한 공정능력지수 : C_s

Wright(1995)는 구멍가공 공정과 같은 공정에 발생하기 쉬운 왜도에 민감한 새로운 지수인 C_s를 개발하였다. 그는 왜도의 측도로 3차 중심적률 $\mu_3 = E(X-\mu)^3$를 사용하여 식(2.3)과 같은 공정능력 지수를 정의하였다.

$$C_s = \frac{\min(USL-\mu,\ \mu-LSL)}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu-T)^2 + |\mu_3/\sigma|}}$$

$$= \frac{d - |\mu - T|}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu-T)^2 + |\mu_3/\sigma|}} \qquad (2.3)$$

여기서 μ_3는 비대칭항을 신뢰하기 위하여 분모에 있는 다른 항과 동일한 단위가 되도록 σ로 나누며, 절대값은 음의 비대칭을 신뢰시키고 또한 지수에 손실을 부과시킨다. 그리고 C_s의 각 항을 σ로 나누면 식(2.4)와 같이 된다.

$$C_s = \frac{d/\sigma - |(\mu - T)/\sigma|}{3\sqrt{1 + \{(\mu-T)/\sigma\}^2 + |\beta_1^{1/2}|}} \qquad (2.4)$$

여기서 $\sqrt{\beta_1} = \mu_3/\sigma^3$은 왜도의 전통적 표준화된 측도이다.

C_{pmk}와 C_s의 관계는 $C_s \le C_{pmk}$이다. 공정이 대칭일 때는 동일하고, C_s는 비대칭에 관해 분포의 형태를 고려한 추가적인 정보를 갖는 장점이 있다. 따라서 C_s는 구멍-천공공정과 같은 공정이 떨어지게되는 공정에 특히 적합하다.

예를 들어 $LSL=0$, $USL=20$, $T=10$인 공정을 가정한다. 원 공정은 $\mu=10$, $\sigma=2$인 정규분포를 갖는다고 가정하면 $C_{pmk}=C_s=1.67$이다. 그러나 공정이 떨어지게되어 $\mu=10.5$ $\sigma=2.4$인 대수정규분포에 따른다고 하면($\mu_3=9.8, \sqrt{\beta_1}=0.7$), 이때 $C_{pmk}=1.29$, $C_s=1.00$이 된다. 더구나 공정이 더욱 떨어지게되어 $\mu=11$, $\sigma=2.9$를 갖는 대수정규분포에 따른다고 하면($\mu_3=18.9, \sqrt{\beta_1}=0.8$), 이때 $C_{pmk}=0.98$, $C_s=0.75$가 된다. 이와 같이 C_s는 분포의 형태 변화에 추가적인 정보를 갖고 있기 때문에 C_{pmk}보다 훨씬 민감한 지수로 판단된다.

2.3 Pearson 시스템에 의한 공정능력지수

비정규 공정의 추정에 평균, 표준편차, 왜도, 첨도의 4

가지 모수가 Pearson분포곡선의 형태를 결정한다는 가정 하에서 Clements(1989)는 왜도 및 첨도의 함수로써 Pearson 곡선족의 분위수계산을 위해 Gruska *et. al.*(1989)에 의해 제시된 표를 이용하여 C_p와 C_{pk}의 추정량을 計算하였다. 예를 들면, C_p지수값을 추정하기 위해서 Clements는 6σ대신 $U_a - L_a$로 교체하여 식(2.5)와 같이 나타낸다.

$$C_p = \frac{USL - LSL}{U_a - L_a} \quad (2.5)$$

여기서 U_a는 99.865 백분위수이고, L_a는 0.135 백분위수인 점의 값을 나타낸다. 이 값은 추정되는 왜도 (S_K) 및 첨도 (K_U)의 특정값이 주어지는 경우 Gruska et al.(1989)에 의해 제시된 표에서 구해진다

식(2.5)에서 $U_a - L_a$를 취하는 이론적 근거는 공정이 $C_p = 1$일 때의 정규분포를 가정하면 平均으로부터 $\pm 3\sigma$를 벗어날 확률은 0.27%라는 것이다.

따라서 C_p는 식(2.6)과 같은 분위수로 나타낼 수 있다.

$$C_p = \frac{USL - LSL}{X_{0.99865} - X_{0.00135}} \quad (2.6)$$

여기서 $X_{0.99865}$와 $X_{0.00135}$는 각각 U_a와 L_a를 나타낸다.

C_{pk}도 동일한 접근으로 USL $-\ \mu$ 대신에 USL $-\ M_e$로, $\mu -$LSL대신에 $M_e -$ LSL로 변경되며, 3σ도 각각 $U_a - M_e$, $M_e - L_a$로 되어 식(2.7)과 같다.

$$C_{pk} = \min\left[\frac{USL - M_e}{U_a - M_e}, \frac{M_e - LSL}{M_e - L_a}\right] = \min(C_{pu}, C_{pl}) \quad (2.7)$$

μ대신에 메디안 M_e을 취하는 이유는 메디안이 비정규분포의 중심을 잘 표현하기 때문이다.

같은 방법으로 적용하면 식(2.8)~식(2.11)과 같이 된다.

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\left(\frac{U_a - L_a}{6}\right)^2 + (M_e - T)^2}} \quad (2.8)$$

$$C^*_{pm} = \frac{\min[USL - T,\ T - LSL]}{3\sqrt{\left(\frac{U_a - L_a}{6}\right)^2 + (M_e - T)^2}} \quad (2.9)$$

$$C_{pmk} = \min\left[\frac{USL - M_e}{3\sqrt{\left(\frac{U_a - M_e}{3}\right)^2 + (M_e - T)^2}}, \frac{M_e - LSL}{3\sqrt{\left(\frac{M_e - L_a}{3}\right)^2 + (M_e - T)^2}}\right] \quad (2.10)$$

$$C_{psk} = \min\left[\frac{USL - M_e - |M_e - T|}{3\sqrt{\left(\frac{U_a - M_e}{3}\right)^2 + (M_e - T)^2}}, \frac{M_e - LSL - |M_e - T|}{3\sqrt{\left(\frac{M_e - L_a}{3}\right)^2 + (M_e - T)^2}}\right] \quad (2.11)$$

2.4 Johnson 시스템에 의한 공정능력지수

Johnson(1949)에 의해 제시된 Johnson 시스템은 비정규분포를 모형화 하는데 Pearson 시스템의 대안으로 제시되었다.

본 연구에서 Johnson 곡선을 공정능력지수계산에 적용하게 된 배경은 Johnson 곡선은 Pearson 시스템 보다 나은 장점을 지니고 있기 때문이다. 즉 Johnson 곡선은 주어진 데이터 집합에 가장 좋은 Johnson 곡선을 선택하는데 단순한 구조를 보여주고, 표본의 적률에 기초한 방법보다 더욱 신뢰할 수 있는 절차이고, 일반적으로 쉽다고 Farnum(1996-1997)는 지적하였다.

또한 Johnson 접근의 가장 현저한 특징 중의 하나는 표준정규곡선으로 변환하여 사용하는 확률계산이다. 이러한 Johnson 시스템은 식(2.12)의 변환식과 식(2.13)~식(2.15)인 3가지 분포족을 갖는다.

$$Z = \gamma + \eta K_i(x, \lambda, \varepsilon) \qquad i = 1,2,3 \qquad (2.12)$$

$$K_1(\chi, \lambda, \varepsilon) = \sin h^{-1}\left(\frac{\chi - \varepsilon}{\lambda}\right) \qquad (2.13)$$

$$K_2(\chi, \lambda, \varepsilon) = \ln\left(\frac{\chi - \varepsilon}{\lambda + \varepsilon - \chi}\right) \qquad (2.14)$$

$$K_3(\chi, \lambda, \varepsilon) = \ln\left(\frac{\chi - \varepsilon}{\lambda}\right) \qquad (2.15)$$

식(2.13)~식(2.15)는 $\eta, \gamma, \lambda, \varepsilon$의 적절한 모수선택에 의해 Z분포로 변환시킬 수 있고 ε, γ는 위치모수이며, λ, η는 척도모수이다.

식(2.13)은 S_U곡선으로 정의역은 전 실직선이 되며, 식(2.14)는 개구간 $(\varepsilon, \varepsilon+\lambda)$에 대해 정의되는 S_B 곡선을 나타낸다. 식(2.15)는 S_L(대수정규)곡선을 나타낸다. S_L곡선은 모수 λ를 소거함으로써 단순화시켜 $Z = \gamma^* + \eta \ln(\chi - \varepsilon)$로 나타낼 수 있다.

Johnson 곡선은 종전의 Pearson 곡선과 같이 적률법으로 추정되었지만, Slifker 와 Shapiro(1980)의 표본 백분위수에 기초한 보다 신뢰할 만한 추정 방법과 주어진 데이터 집합의 Johnson 곡선의 분포족 형태를 결정하는 식 (2.16)과 같은 판별 함수를 제시하였다.

$$\begin{array}{lll} ① & \dfrac{mn}{p^2} > 1 & : S_U \text{ 곡선} \\ ② & \dfrac{mn}{p^2} < 1 & : S_B\text{곡선} \qquad (2.16) \\ ③ & \dfrac{mn}{p^2} = 1 & : S_L \text{ 곡선} \end{array}$$

여기서 $m = x_{3z} - x_z$, $n = x_{-z} - x_{-3z}$, $p = x_z - x_{-z}$ 이다. Slifker-Shapiro 방법은 적절한 Z값을 택해서 표준정규표로 부터 -3z, -z ,z , 3z와 누적확률인 $P_{-3z}, P_{-z}, P_z, P_{3z}$ 를 찾는다. Slifker-Shapiro에 의해 추천되는 값은 0.524이다.

그리고 Johnson곡선에 대한 확률계산을 위하여 3가지 분포족에 관해 <표 1> 같이 z를 x로 나타내어 표준정규분포와 동일한 계산을 할 수 있다.

비정규 공정에 대한 공정능력지수의 정의를 일반화시킬 때의 C_p지수는 식(2.5)와 동일한 방법으로 식(2.17)로 나타낸다.

$$C_p = \frac{USL - LSL}{U_{\alpha_2} - L_{\alpha_1}} \qquad (2.17)$$

정규분포에 대해서는

$L_{\alpha_1} = \mu - 3\sigma$, $U_{\alpha_2} = \mu + 3\sigma$가 되며, Johnson 곡선에 의한 비정규분포에 대한 L_{α_1}와 U_{α_2}는 Table 14에서 α_1은 $z = -3$ 과 α_2는 $z = 3$으로 치환하여 사용한다. 예를 들면 S_U곡선, S_B곡선을 사용할 때, $L_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}$값은 각각 식(2.18) 및 식(2.19)와 같다.

$$\begin{aligned} L_{\alpha_1} &= \varepsilon - \lambda \sin h\left(\frac{\gamma + 3}{\eta}\right) \\ U_{\alpha_2} &= \varepsilon - \lambda \sin h\left(\frac{\gamma - 3}{\eta}\right) \end{aligned} \qquad (2.18)$$

$$\begin{aligned} L_{\alpha_1} &= \varepsilon + \lambda\left[1 + \exp\left(\frac{\gamma + 3}{\eta}\right)\right]^{-1} \\ U_{\alpha_2} &= \varepsilon + \lambda\left[1 + \exp\left(\frac{\gamma - 3}{\eta}\right)\right]^{-1} \end{aligned} \qquad (2.19)$$

C_{pk}지수인 경우의 일반화는 식(2.48)를 규격한계치인 LSL과 USL을 Johnson변환을 통하여 Z_L과 Z_U 값으로 치환하여 식(3.20)과 같이 나타낸다.

$$C_{pk} = \min\left(-\frac{Z_L}{3}, \frac{Z_U}{3}\right) \qquad (2.20)$$

비정규분포 공정에 대한 공정능력을 평가하는 방법은 크게 2가지 형태로 구분할 수 있다.

(1) 분위수를 사용하는 방법
(2) 불량률을 사용하는 방법

1절에서는 비정규분포에 대한 공정능력의 측도로 분위수를 사용하여 Pearson시스템을 이용한 공정능력지수

<표 1> Johnson curve and equation for x in terms of z

Johnson curve type	equation for x in terms of z	note
(1) S_U	$x = \varepsilon - \lambda$ $\sin h\,(\frac{\gamma - z}{n})$	$\sin h\,(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$
(2) S_B	$x = \varepsilon + \frac{\lambda}{1+\exp\left(\frac{\gamma - z}{\eta}\right)}$	—
(3) S_L	$x = \varepsilon + \lambda \exp\left(\frac{z-\gamma}{\eta}\right)$ $= \varepsilon + \exp\left(\frac{z-\gamma^*}{\eta}\right)$	$\gamma^* = \eta \ln \left[\frac{\frac{n}{p} - 1}{p\left(\frac{m}{p}\right)^{1/2}} \right]$

로 나타내었다. 이 방법의 결점은 불량률을 추정하는데 어려움이 있다. 따라서 실무에 있어서 빈번히 사용되고 있는 불량률의 관점에서 비정규 공정의 공정능력의 새로운 측도를 제시하고자 한다.

본 연구에서는 Pearson, Johnson 및 Burr의 3가지 분포를 사용하여 불량률의 척도로 공정능력을 평가하기로 한다.

3.1 Pearson system

Pearson system은 식(2.21)의 미분방정식을 만족시키는 $y = f(x)$의 분포들이다.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x - c_0)\,y}{c_1 + c_2 x + c_3 x^2} \tag{2.21}$$

Pearson system에서 핵심역할은 적률을 이용해서 모수를 결정하고 적절한 곡선형태의 선정의 기준을 제시해준다.

$f(x)$의 그래프의 형상을 결정하는 모수 c_0, c_1, c_2, c_3은 식(3.30)~식(2.25)와 같이 적률의 함수로서 구해진다.

$$c_0 = -\mu_3(\mu_4 + 3\mu_2^2)\,/\,A$$

$$= -\sqrt{\mu_2 \beta_1}\,(\beta_2 + 3)\,/A \tag{2.22}$$

$$c_1 = -\mu_2\,(4\mu_2\,\mu_4 - 3\mu_3^2)\,/A$$

$$= -\mu_2\,(4\beta_2 - 3\beta_1)\,/A' \tag{2.23}$$

$$c_2 = c_0 \tag{2.24}$$

$$c_3 = -(2\mu_2\,\mu_4 - 3\mu_3^2 - 6\mu_2^3)\,/A$$

$$= -(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)\,/A' \tag{2.25}$$

여기서

$$A = 10\mu_2\,\mu_4 - 18\mu_2^3 - 12\mu_3^2$$

$$A' = 10\beta_2 - 18 - 12\beta_1$$

$$\sqrt{\beta_1} = \mu_3\,/\sigma^3 = Skewness = S_K$$

$$\beta_2 = \mu_4\,/\sigma^4 = Kurtosis = K_U$$

이 값들은 식(2.26)의 2차 방정식의 해에 따라 다양하게 변할 수 있다.

$$c_1 + c_2 x + c_3 x^2 = 0 \tag{2.26}$$

식(2.26)의 해를 구하면 식(2.27)이 된다.

$$x = \frac{-c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - 4c_1 c_3}}{2c_1} \qquad (2.27)$$

식(2.27)을 이용하여 분포의 형태를 정하기위한 기준으로 다음의 K값을 설정한다.

$$K = c_2^2 / 4c_1 c_3$$

여기에 식(2.22)~식(2.25)를 대입하면 다음과 같이 된다.

$$K = \frac{\beta_1 (\beta_2 + 3)^2}{4(2\beta_2 - 3B_1 - 6)(4\beta_2 - 3\beta_1)}$$

이것이 Pearson곡선의 형태를 결정하는 기준이 된다. <그림 1>은 K값에 해당하는 Pearson 곡선의 상이한 형태간의 관계를 보여준다.

	$-\infty$ ~ 0	0 ~ 1	1 ~ ∞
K	K < 0	0 < K < 1	K > 1
Type	1	4	6

3 Normal $K_U = 0$ 5

2 $K_U < 0$

7 $K_U > 0$

<그림 1> The relationship between the different type Pearson curve and their corresponding K-value

Pearson 곡선중 잘 알려진 곡선을 선정하여 나타내면 <표 2>와 같다.

<표 2> Well known Pearson Curve

Name	Type
Beta	1
Uniform	2 ($K_U = -1.2$)
Gamma, Chi-square	3
Normal	7 ($c_2 = c_3 = 0$)
t	7
Exponetial	10

본 연구에서는 Beta분포의 경우 일반적인 불량률을 추정하는 절차를 언급하기로 한다.

(1) 표본으로부터 $\overline{X}, S, S_K, K_U$의 통계량을 구한다.

(2) S_K, K_U로부터 K값을 구하여 분포를 확인한다.

(3) S_K, K_U의 통계량에 해당(또는 근접)하는 Pearson 곡선의 표준화된 분위수에 일치하는 값을 Gruska et al.(1989)의 표에서 구한다.

(4) 규격을 벗어나는 불량률을 구한다.

3.2 Johnson system

Pearson system과 마찬가지로 S_K와 K_U의 통계량으로 확률밀도함수의 형태를 정할 수 있으며 Johnson 변환시스템은 식(2.28)과 같은 분포함수를 갖는다.

$$F(x) \approx \Phi[\gamma f\{(x-\varepsilon)/\lambda\}] \quad -\infty < x < \infty \qquad (2.28)$$

여기서 $F(x)$는 모집단의 추정누적 분포함수이며, Φ는 표준정규 누적분포함수이고, γ와 ε은 위치모수, λ, η는 척도모수이다.

식(2.28)을 식(2.12)의 형식으로 나타내면 식(2.29)과 같다.

$$G_i(x) = P\{z \le r + \eta K_i(x, \lambda, \varepsilon)\} \quad (2.29)$$

여기서 $G_i(x)$는 확률분포함수이며, Johnson 곡선의 형태 $i(i=1,2,3)$를 나타낸다. 확률밀도함수 $g_i(x)$는 $G_i(x)$를 미분함으로써 <표 3>과 같은 밀도함수를 구할 수 있다. 여기서 $f(z)$는

<표 3> Density function of the Johnson curve type

Johnson curve type	Density function
S_U	$g_1(x) = \left(\frac{\lambda}{\eta}\right) f(z) \left[1+\left(\frac{x-\varepsilon}{\lambda}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$
S_B	$g_2(x) = \eta\lambda \frac{f(z)}{(x-\varepsilon)(\lambda+\varepsilon-x)}$
S_L	$g_3(x) = \eta \frac{f(z)}{x-\varepsilon}$

$z = r + \eta K_i(x, \lambda, \varepsilon)$ 에서

계산된 표준정규밀도 함수를 나타낸다.

Johnson system에서의 불량률추정절차는 앞절에서 언급하였기 때문에 생략하기로 한다.

3.3 Burr system

데이터 집합을 묘사하는 전통적인 접근은 밀도함수를 사용한다. 이 경우 데이터 비교를 위한 이론적 확률을 구하기 위해서 적분을 하여 적절한 분포함수를 구하는데 적분은 성가시고, 대부분의 밀도함수들을 구할 수 없는 현실적인 문제가 발생하게 된다. 그러나 누적분포함수가 직접 구해질 수가 있다면 불량률은 쉽게 추정할 수 있다. 이러한 접근은 Burr(1942)와 Hatke(1949)에 의해 식(3.38)과 같은 미분방정식을 고려함으로써 시도되었다.

$$\frac{dy}{dx} = y(1-y)\, g(x,y) \qquad y = F(x) \qquad (2.30)$$

여기서 $g(x,y)$ 는 $0 < y < 1$ 에 관해 양수이고 $F(x)$ 는 $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$ 인 비감소 함수이다.

식(2.24)는

$$\frac{dy}{dx} = y(m-x)\, g(x,y)$$

과매우 유사하여 $g(x,y) = (a + bx + cx^2)^{-1}$ 일 때 Pearson system의 밀도함수를 발생시킨다.

$g(x,y) = g(x)$ 일 때 식(3.30)의 해는

$$F(x) = \left[1 + \exp\left(-\int g(x)\,dx\right)\right]^{-1}$$

이다. Burr에 의해 상세하게 고려된 한가지 편리한 해는 식(3.31)과 같다. 이것이 Burr 누적분포이다.

$$F(x) = 1-(1+x^c)^{-K} \qquad x \ge 0$$
$$= 0 \qquad x < 0 \qquad (3.31)$$

여기서 C, K는 Gruska et al.(1989)의 Burr system의 모수의 표에서 주어지는 실수인 값들이다.

확률밀도함수는 식(3.32)와 같다.

$$F'(x) = f(x) = \frac{Kcx^{c-1}}{(1+x^c)^{K+1}} \qquad (3.32)$$

식(3.32)의 함수는 일반적인 적률대신에 식(3.33)과 같은 누적적률을 사용한다.

$$M_j = \int_0^\infty x^j (1+x^c)^{-K} dx \quad j < cK-1 \qquad (3.33)$$

주어진 데이터에 대해 Burr system을 적용하는 절차는 다음과 같다.

(1) 표본으로부터 $\overline{X}, S$, S_K, K_U의 통계량을 구한다.

(2) 구한 S_K, K_U 값에 해당(또는 근접)하는 Burr system의 모수의 표로부터 C, K, $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$를 구한다.

(3) $P_r(x < \hat{x}_0)$를 계산하기 위해서 아래식을 이용해서 x_0를 구한다.

$$\frac{x_0-\mu}{\sigma} = \frac{\ddot{x}_0 - x}{s}$$

또는

$$x_0 = \sigma(\hat{x}_0 - \bar{x})/s + \mu$$

이 때 $P_r(x < \hat{x}_0) = F(x_0; C,K)$

(4) x_0 를 구한다음 확률 P를 계산한다.

$$P = F(x_0; C,K)$$

즉

$$x_0 = [(1-p)^{-1/K} - 1]^{1/C}$$

4. 사례연구

본 연구에서 비정규분포에 대하여 공정능력을 평가하는 방법인 ① 분위수를 사용하는 방법 ② 불량률을 사용하는 방법중 규격을 벗어나는 불량률의 척도로서 공정능력을 평가하기 위하여 <표 4>와 같은 Hahn과 Shapiro (1967)의 예제를 사용하여 Pearson system, Johnson system, 및 Burr system의 3가지 방법에 의거 불량률을 추정하기로 한다.

<표 4>는 $LSL=0.4$, $USL=0.9$ 인 공정으로부터 $T=0.5\,\Omega$ 저항을 500개 측정한 데이터를 도수분포표로 정리하여 나타내었다.

4.1 Pearson system

예제에서 분포의 형태를 결정하기 위해서 K값을 구한 결과 type1인 Beta 분포로 확인되었다. Beta 분포의 불량률을 추정하는 절차로부터

(1) 표본통계량은 $\overline{X} = 0.59$, $S_K = 0.105$, $K_U = -0.02$ 로 구해졌다.

(2) S_K, K_U 로부터 구한 K값이 $k < 0$ 이므로 Beta 분포를 한다.

(3) Gruska et al.(1989)의 표에서 $S_K = 0.5$ 와, $S_K = 0.6$ 값으로부터 $S_K = 0.54$ 의 값을 보간법으로 계산하여 Z값을 구한다.

(4) $X = Z \cdot s + \overline{X}$ 로부터 $z = -1.763$ 일 때,

<표 4> Resistances of 500 for 0.5 ohm resistors

N0	central value	actual observations	S_B
1	0.4미만	4	6.5
2	0.425	33	36.1
3	0.475	78	74.1
4	0.525	99	93.8
5	0.575	87	90.4
6	0.625	76	73.0
7	0.675	51	52.0
8	0.725	32	33.7
9	0.775	21	19.9
10	0.825	7	10.9
11	0.875	5	5.5
12	0.9초과	7	4.1
total		500	500.0
value of χ^2			3.64

$X = 0.405$, $Z = 3.386$ 일 때,

$X = 0.946$ 이다. 따라서 규격을 벗어나는 불량률은 다음과 같다.

$$P(X \leq 0.4) + [1 - P(X \leq 0.9)]$$
$$= 0.912 + 0.631 = 1.551(\%)$$

4.2 Johnson system

Johnson system에 의한 규격을 벗어난 추정불량률을 계산하면 다음과 같다.

$$P(X < LSL) = P(Z < Z_L) = P(Z < -2.225)$$
$$= 0.01222453288 \fallingdotseq 0.0122$$
$$P(X > USL) = P(Z > Z_U) = P(Z > 2.39) = 0.0084$$

따라서 불량률을 2.06%로 계산되어, Pearson system의 1.551%보다 조금 높게 불량률이 추정되었다.

4.3 Burr system

Burr system을 적용하는 절차로부터

(1) 표본통계량은 $\overline{X} = 0.59$, $s = 0.105$, $S_K = 0.54$, $\cdot K_U = -0.02$ 이고

(2) Gruska et al.(1989)의 Burr system의 모수의 표로부터 근접한 $S_K = 0.55$, $K_U = 0.2$ 값을 택한 결과 C, K, $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$는 다음과 같다.

$$C = 2.2928$$
$$K = 22.6938$$
$$\hat{\mu} = 0.2302$$
$$\hat{\sigma} = 0.1091$$

(3) $P(x < x_0)$를 계산하기 위해서

$$x_0 = \sigma(\hat{x}_0 - \overline{x})/s + \mu$$

로부터 $\hat{x}_0 = 0.4$ 일때, $x_0 = 0.0328$, $\hat{n}_0 = 0.4$ 일 때, $x_0 = 0.5523$ 이 된다.

(4) $P = F(x_0; c, k)$로부터

$$F(x) = P(x \le 0.4)$$
$$= 1-(1+x^c)^{-K}$$
$$= 1-(1+0.0238^{2.2928})^{-22.6938}$$
$$= 0.0089345 = 0.0089$$

같은 방법으로

$$F(x) = P(X \le 0.9) = 0.994368$$

따라서 규격을 벗어나는 불량률은 1.45%로 추정된다.

본 연구에서는 비정규분포가 Beta 분포에 따를 때, 불량률을 추정해 본 결과 Pearson system과 Burr system은 거의 차가 없음을 알 수 있고, Johnson System은 이보다 조금 높게 나왔음을 알 수 있었다. 그러므로 비정규공정에 대한 불량률의 척도에 의한 공정능력의 평가는 Pearson system 과 Burr system 에 의한 방법이 양호하다고 판단된다.

5. 결 론

본 연구에서 비정규 분포에 대한 공정능력의 평가를 Pearson system, Johnson system 및 Burr분포의 3가지 분포를 사용하여 규격을 벗어나는 불량률을 추정함으로써 비정규 공정의 공정능력에 대해 보다 구체적인 추가 정보를 제시할 수 있어 실무자로 하여금 공정의 개선을 유도하는 합리적인 의사결정을 내릴 수 있는 공정능력의 새로운 측도를 제시하였다.

비정규공정에 대한 불량률의 척도에 의한 공정능력의 평가는 Pearson system 에 의한 불량률의 추정은 1.551%, Johnson system 에 의한 불량률의 추정은 2.06%, Burr system 에 의한 불량률의 추정은 1.45%로 나타난다. 따라서 Pearson system 과 Burr system 에 의한 방법이 양호하다고 판단된다. 향후 실제 공정에서 나타날 수 있는 다양한 비정규분포의 경우에도 불량률의 측도로 나타낼 수 있도록 이에 따른 추가연구가 행해져야 되며, 불량률의 추정에 새로운 접근법도 제시하여야 할 과제라고 여겨진다.

참 고 문 헌

[1] 金弘埈 (1997), "非正規工程 데이터에 대한 工程能力의 測度 및 評價에 관한 硏究", 東亞大學校 大學院 博士學位 論文, pp 36~45.

[2] Burr, I.W (1942), "Cumulative Frequency Functions", Ann.Math.Stat, 13, pp. 215~232

[3] Chan, Lai K; Cheng, Smiley W.; Spiring, Frederick A. [CCS] (1988), "A new measure of process capability: Cpm", Journal of Quality Technology, 20(3), 162-173.

[4] Choi, Byoung-Chul; Owen, Donald B (1990), "A study of a new process capability index", Communications in Statistics - Theory and Methods, 19(4), 1231-1245.

[5] Clements, John A (1989), "Process Capability Calculations for Non-Normal Distributions", Quality Progress, 22(9), 95-100.

[6] Hatke, Sister M.A (1949), "A Certain cumulative Probability Function", Ann.Math.Stat, 20, pp 461~463

[7] Kane, Victor E (1986), "Process capability indices", Journal of Quality Technology, 18(1), 41-52.

[8] McCoy, Paul F (1991), "Using performance indexes to monitor production processes", Quality Progress, 24(2), 49-55.

[9] Pearn, W.L.; Kotz, Samuel; Johnson (1992), "Norman L. Distributional and inferential properties of process capability indices", Journal of Quality Technolgy, 24(4), 216-231.

[10] Farnum, N. R. (1996~7), "Using Johnson Curves to Describe Non-Normal Process Data" Quality Engineering , 9(2), pp. 329 - 336.

[11] Wright, P. A (1996), "A Process Capability Index Sensitive to Skewness" Journal of Statistical computation Simulation, 52, pp. 195~203

[12] Benson, E. D. (1994), "Statistical Properties of a System of Fourth-Generation Process Capability Indices C_{psk}(U,V,W)." Ph. D. Dissertation, University of Maryland .

[13] Gruska, G. F., Lamberson, L. R., and Mirkhani, K. (1989), "Non-Normal Data Analysis", Multiface Publishing Co., Michigan.

[14] Hahn, G. J., and Shapiro, S. S. (1967), "Statistical Models in Engineering", John Wiley & Sons, Inc., New York. p.207.

[15] Johnson, N.(1949), "Systems of Frequency Curves Generated by Translation", Biometrika, 36, pp. 149 - 176.

[16] Lovelace, C. R. (1994), " The Development of a Process Capability Index for Non-Normal Processes Naturally Bound at Zero." Ph. D. Dissertation. University of Alabama in Huntsville.

[17] Pearn, W.L., and Kotz, S., "Application of clement;s Method for Calculationg Second-and-Third-Generation Process Capability Indices Non-Normal Pearsonian Population" Quality Engineering, 7(1), pp. 139~145, (1994~5)

[18] Slifker, James F. ; Shapiro, Samuel S. (1980), "The Johnson system: selection and parameter estimation", Technometrics, 22(2), 239-246.

채 규 용

건국대학교 산업공학과 대학원 공학석.박사 취득
1998~ 천리안 일본 비즈니스 전문정보"today 일본(go ILBon), 일본판례 및 소송데이타베이스 , 일본어 전문 사이트 구축,온라인 전문 한일 번역 등 project 구축
1999 한국과학재단 지원 현대전자(주) 통신사업부 교환 시스템의 신뢰성 구축 및 운영에 관한 연구 project 수행 등
2000.3 ~현재 동양대학교 산업시스템 공학과 겸임교수

주요관심분야 : MIS, TQM, ISO, Fuzzy이론, 생산자동화, 인간공학 등

이 상 용

공사, 서울대 전자공학과를 거쳐
애리조나 주립대에서 시스템 공학 학위
대한 산업공학회 이사, 품질관리 학회 회장을 역임
현재 건국대학교 산업공학과 교수 및 공과대학장으로 재직

주요 관심분야 : 생산시스템의 컴퓨터 응용, 신뢰성, 시스템 공학 등