

종속적 비평형 다중표본 계획법의 연구*

A Study of Dependent Nonstationary Multiple Sampling Plans

김원경**

Won Kyung Kim

Abstract

In this paper, nonstationary multiple sampling plans are discussed which are difficult to solve by analytical method when there exists dependency between the sample data. The initial solution is found by the sequential sampling plan using the sequential probability ratio test. The number of acceptance and rejection in each step of the multiple sampling plan are found by grouping the sequential sampling plan's solution initially. The optimal multiple sampling plans are found by simulation. Four search methods are developed to find the optimum sampling plans satisfying the Type I and Type II error probabilities. The performance of the sampling plans is measured and their algorithms are also shown. To consider the nonstationary property of the dependent sampling plan, simulation method is used for finding the lot rejection and acceptance probability function. As a numerical example Markov chain model is inspected. Effects of the dependency factor and search methods are compared to analyze the sampling results by changing their parameters.

Key Words : Dependent, Nonstationary, Multiple Sampling Plan

* 본 연구는 1998년도 경남대학교 학술연구 조성비에 의하여 연구되었음.

** 경남대학교 정보통신공학부

1. 서론

전통적인 계수형 표본계획법(Attribute Sampling Plan)은 각 표본 데이터가 서로 독립적이라고 가정한다. 그러나 이러한 독립성이 잘 맞지 않는 경우라면 해석적 방법의 어려움 때문에 실제로 사용할 수 없는 문제점이 발생한다. 본 연구에서는 이러한 표본들간의 독립이 아닌 경우의 다중 표본 계획법(Multiple Sampling Plan)을 시뮬레이션을 이용하여 최적해를 구하고자 한다. 다중 표본 계획법은 축차표본 계획법으로부터 구할 수 있고, 반대로 다중 표본 계획법의 특수 경우로써 축차계획법을 구할 수도 있으나 전자의 방법이 후자보다 더 어렵다. 축차계획법은 비축차 계획법보다 평균표본수(Average Sample Number)가 작다는 점이 장점이다. 축차계획법을 그룹별로 나누어서 샘플링하면 다중표본 계획법을 유도할 수 있으나, 이 경우 요구되는 제1종(Type I) 및 제2종(Type II) 과오의 확률을 제대로 만족시키지 못한다. 따라서 탐색법에 의한 최적 샘플링 계획법을 찾을 필요가 있다.

또한 데이터가 서로 종속적인 관계를 갖고 있다면 비평형성(nonstationarity)도 고려해야 한다. 이것은 독립성이 보장되지 않는 경우에 독립성을 가정한 전통적인 독립적 표본계획법을 사용하면 의사 결정시에 오판을 불러일으킬 위험성이 있기 때문이다. 종속적인 표본계획법의 국내·외 연구 동향을 살펴보면 지금까지 거의 이루어지지 못하고 있다. 다만 단일표본 계획법(Single Sampling Plan)에 대해서는 일부 연구가 되어있다. Markov 연쇄과정을 이용하는 Bhat와 Lal[1] 그리고 Karunaratne[2]의 연구가 있다. 그러나 이 경우도 특수한 경우에 한정되어 있고 일반적인 종속적 모델에는 적용이 안된다. Broadbent[3]는 지연(lag) 1의 시계열 상관을 갖는 Markov 과정을 조사한바 있고, Friedlander[4]가 프로세스가 시계열 자료간에 종속적 상관을 갖는 경우에 lattice filter법을 사용하여 연구하였다. Nelson[9]의 연구는 종속자료를 단일표본 계획법을 시뮬레이션으로 접근하였고 Sarkadi와 Vince[10]가 과거에

발생한 모든 불량갯수에 종속적인 폴라과정(Polya Process)을 연구한 바가 있다. 축차계획법에서의 시도는 모두 독립성을 가정한 제1종과 2종 과오의 오차를 줄이기 위한 방법들에 대해서만 연구가 되어 왔다[7][8]. 종속적 이중표본 계획법(double sampling)과 축차표본 계획법에 대해서는 Kim[5][6]이 연구한 바 있다.

종속적인 확률과정은 독립적인 확률과정과는 달리 일관된 방법론이 존재할 수 없고 수학적 해결방법의 어려움이 있기 때문에 본 논문에서는 이를 시뮬레이션으로 해결하였다. 먼저 제2장에서는 다중표본계획법의 일반적인 설계기법에 대해 설명하고, 다음 3장에서는 이를 바탕으로 비평형 상태에서 각 단계마다에서 로트가 채택 및 기각 확률을 시뮬레이션으로 구하는 방법에 대해 논하며, 제 4장에서 최적 채택 및 기각수를 결정하는 탐색기법을 다루며 제5장에서는 이러한 샘플링기법의 성능척도와 수치예제를 들기로 한다.

2. 다중표본 계획법의 설계

로트의 크기가 N 인 생산 프로세스의 출력을 $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ 라 하자. 여기서 i 번째의 제품이 불량이면 $X_i=1$ 이고 양품이면 $X_i=0$ 이다. 종속적인 생산 공정인 경우 불량품을 생산할 확률은 이전의 제품 상태에 따라 변하게된다. 우선 다중표본 계획법은 Wald[12]의 축차계획법(sequential sampling plan)에서부터 접근하는 것이 쉬우므로 다음의 축차확률비를 정의한다.

$$L(x_1, x_2, \dots, x_i) = \frac{p_1(x_1, x_2, \dots, x_i)}{p_2(x_1, x_2, \dots, x_i)}$$

여기서, $p_1(x_1, x_2, \dots, x_i)$ 은 불량률이 LTPD 일 경우에 처음 i 개의 변수에 대한 결합확률밀도 함수이고, $p_2(x_1, x_2, \dots, x_i)$ 는 불량률이 AQL일 경우에 처음 i 개의 변수에 대한 결합확률밀도 함수이다. 만일 $L(x_1, x_2, \dots, x_i) \geq (1 - \beta)/\alpha$ 이면

확률비 축차시험은 기각되어 그 생산 로트는 기각되고, $l(x_1, x_2, \dots, x_i) \leq \beta / (1 - \alpha)$ 이면 채택되며, 그 외에는 시험이 계속된다. 위의 확률비축차식은 연속되는 관측이 종속적이라 하여도 성립되며 이 축차과정의 결국 종료될 확률은 1이 된다는 것이 밝혀졌다[12][13]. 그러나 실제 문제에서는 이러한 종속적인 경우 일반적으로 $p_1(x_1, x_2, \dots, x_i)$ 과 $p_2(x_1, x_2, \dots, x_i)$ 를 해석적으로 구하는 것은 어렵다. 따라서 시뮬레이션을 이용하여 종속적 결합확률밀도를 구할 수 있으며 이를 위해 다음의 변수들을 정의한다.

f_{ij}^{LTPD} = 불량률이 LTPD인 경우 i 개의 생산품을 연속적으로 검사했을 때 불량률이 j 개 있을 확률

f_{ij}^{AQL} = 불량률이 AQL인 경우 i 개중 불량률이 j 개 있을 확률
이라 하자.

i 번째 샘플에서 시험이 기각되는 불량품 수를 나타내는 u_i 와 시험이 채택되는 불량품 수 l_i 를 다음 식과 같이 구한다.

$$u_i = \min \{ j \mid f_{ij}^{LTPD} / f_{ij}^{AQL} \geq (1 - \beta) / \alpha \}$$

$$l_i = \max \{ j \mid f_{ij}^{LTPD} / f_{ij}^{AQL} \geq \beta / (1 - \alpha) \}$$

이제 다중표본 계획법의 각 단계의 크기를 n , 각 단계의 번호를 k , 그리고 단계의 갯수를 $S(=N/n)$ 라 하여 다음의 사건기호와 변수들을 정의한다.

- $A_k = \{k\text{번째 단계에서 시험이 채택됨}\}$
- $R_k = \{k\text{번째 단계에서 시험이 기각됨}\}$
- $G_k = \{k\text{번째 단계에서 시험의 채택 또는 기각결정을 못내고 시험계속함}\}$
- A_k, R_k 그리고 G_k 는 상호 배타적이므로

$$\Pr \{G_{k-1}\} = \Pr \{A_k \cup R_k \cup G_k\}$$

$$= \Pr \{A_k\} + \Pr \{R_k\} + \Pr \{G_k\}$$

이고 처음에는 $\Pr \{G_0\} = 1$ 이다.

채택확률 $\Pr \{A_k\}$ 와 기각확률 $\Pr \{R_k\}$ 는 해석적인 방법이나 시뮬레이션으로 구할 수 있으며, 이 확률들을 구하기 위해 다음의 변수들을 정의한다.

- T_k : 단계 k 까지 발견된 총 불량품 갯수
- $C_{k,n}$: n 개의 제품중 k 번째 단계에서만 발견된 불량품의 갯수
- $\Pr \{T_k = i\} \equiv p_{k,i}$: 단계 k 까지 i 개의 불량품이 발견될 확률
- $\Pr \{C_{k,n} = i \mid T_{k-1} = j\} \equiv h_{k,i,j}$: 단계 $k-1$ 까지 j 개의 불량품이 있을 경우 단계 k 에서 n 개의 제품중 i 개의 불량품이 발견될 확률
- $\Pr \{C_{k,n} \geq i \mid T_{k-1} = j\} \equiv g_{k,i,j}$: 단계 $k-1$ 까지 j 개의 불량품이 있을 경우 단계 k 에서 n 개의 제품중 i 개 이상의 불량품이 발견될 확률

확률 $p_{k,i}$ 는 바로 전 단계인 $k-1$ 단계에서의 확률을 알면 재귀적(recursive) 방법으로 구할 수 있다. 이것을 구하기 위해 a_k, r_k 를 각각 단계 k 에서 시험이 채택 및 기각되기 위한 불량품의 갯수라 하자. 채택 및 기각선의 모양은 일반적으로 계단함수 모양을 이루어서 $p_{k,i}$ 를 구하기 위한 확률식의 인덱스 범위 구조가 다소 복잡하므로 기호표기의 편의상 다음과 같이 3가지 인덱스의 범위를 정의한다.

- $J_R(k-1) \equiv [a_{k-1} + 1, r_{k-1} - 1]$: 단계 $k-1$ 에서의 기각영역 범위의 집합
- $J_A(k-1) \equiv [a_{k-1} + 1, \min(r_{k-1} - 1, a_k)]$: 단계 $k-1$ 에서의 채택영역 범위의 집합
- $J_G(k-1, i) \equiv [a_{k-1} + 1, \min(r_{k-1} - 1, i)]$:

단계 k 까지의 총 불량품이 i 개일 때 단계 $k-1$ 에서의 계속영역 범위의 집합

채택 및 기각수 a_k, r_k 를 결정하는 방법에 대해서는 탐색기법절에서 다룬다. 이제 필요한 변수의 초기치를 $p_{0,0} = 1, a_0 = -1, r_0 = -1, T_0 = 0$ 로 정의하면 $i \in J_R(k)$ 에 대한 $p_{k,i}$ 는 다음 식과 같이 구해진다:

$$\begin{aligned} p_{k,i} &= \Pr\{T_k = i\} \\ &= \sum_{j \in J_C(k-1, i)} \Pr\{T_{k-1} = j \cap C_{k,n} = i - j\} \\ &= \sum_{j \in J_C(k-1, i)} \Pr\{T_{k-1} = j\} \\ &\quad \times \Pr\{C_{k,n} = i - j \mid T_{k-1} = j\} \\ &= \sum_{j \in J_C(k-1, i)} p_{k-1, j} h_{k, i-j, j} \end{aligned}$$

그러면, k 번째 단계에서 3가지 사건의 확률은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Pr\{R_k\} &= \Pr\{T_k \geq r_k\} \\ &= \sum_{j \in J_R(k-1)} \Pr\{T_{k-1} = j \cap C_{k,n} \geq r_k - j\} \\ &= \sum_{j \in J_R(k-1)} \Pr\{T_{k-1} = j\} \\ &\quad \times \Pr\{C_{k,n} \geq r_k - j \mid T_{k-1} = j\} \\ &= \sum_{j \in J_R(k-1)} p_{k-1, j} g_{k, r_k - j, j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr\{A_k\} &= \Pr\{T_k \leq a_k\} \\ &= \sum_{j \in J_A(k-1)} \Pr\{T_{k-1} = j \cap C_{k,n} \leq a_k - j\} \\ &= \sum_{j \in J_A(k-1)} \Pr\{T_{k-1} = j\} \\ &\quad \times \Pr\{C_{k,n} \leq a_k - j \mid T_{k-1} = j\} \\ &= \sum_{j \in J_A(k-1)} p_{k-1, j} (1 - g_{k, a_k - j + 1, j}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr\{G_k, i\} &= \sum_{i \in J_R(k)} \Pr\{T_k = i\} \\ &= \sum_{i \in J_R(k)} \sum_{j \in J_C(k-1)} \Pr\{T_{k-1} = j \cap C_{k,n} = i - j\} \\ &= \sum_{i \in J_R(k)} \sum_{j \in J_C(k-1, i)} p_{k-1, j} h_{k, i-j, j} \end{aligned}$$

비평형상태인 경우에는 불량률 p 가 누적 불량수, 검사 시작시점, 검사 순서, 마지막 생산품의 상태와 샘플 크기등에 의해 영향을 받기 때문에, 조건부확률 $h_{k, i-j, j}$ 와 $g_{k, i-j, j}$ 를 해석적 방법으로 구하는 것이 매우 어렵다. 이와 같은 비평형성은 중속적 표본계획을 결정하고자 할 때 상당히 신중하게 고려해야 할 중요한 요소이다. 다음 절에서는 이러한 비평형 상태의 확률과 분포를 시물레이션으로 구하는 방법에 대해 논의하자.

3. 비평형 상태의 시물레이션

다중표본 계획법에서의 비평형 상태를 고려하는 문제는 중요하다. 왜냐하면 k 번째 단계에서 기각 또는 채택의 결정이 안 내려지면 다음 단계로 진행해야 하는데, 이 때 확률구조식이 이미 전 단계와 같지 않기 때문이다. 이러한 비평형 상태의 확률 $p_{k,i}$ 를 구하기 위해 아래의 <그림 1>과 같이 두 단계로 나누어 생각한다. 첫 번째는 $k-1$ 단계에서의 계속영역의 모든 샘플경로를 선택한 후, 두 번째로는 앞 단계의 경로중에서 $T_k = i$ 를 만족하는 경로들만을 선택한다. 이 두 경로를 만족하는 시물레이션 실험회수를 누적시킨다. 이러한 과정을 시물레이션 반복회수인 m 번 반복시행한다. 경로 찾기를 시작하기 전에 매 단계마다의 불량수와 반복회수를 기록해야 하는데 이것은 프로세스의 상태에 따른 프로세스 출력 값을 세어봄으로서 가능하다. 시물레이션을 구현하기 위해 다음과 같은 변수를 정의한다.

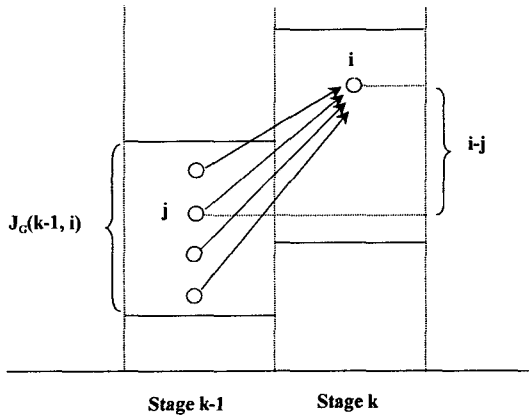
$U_{k,r}$: r 번째 시물레이션 반복시 k 단계에서 발견된 불량품의 갯수

$X_{j,r}$: r번째 시뮬레이션 반복시 j 번째 출력변수의 값(0 또는 1)

요소의 갯수

$l_{k-1,j,r}$: $L_{k-1,j}$ 집합의 r번째 시뮬레이션 반복에서의 요소

그러면 $U_{k,r} = \sum_{j=(k-1)n+1}^{kn} I(X_{j,r}=1)$ 이 되는데, 여기서 $I(\cdot)$ 는 괄호안이 참이면 1이고 아니면 0이 되는 지시(indicator) 함수이다.



<그림 1> 단계 k-1에서 단계 k로 가는 좌표 (k, i)로의 샘플 경로

경로를 효과적으로 고르기 위해서, 다음과 같은 목록집합(list set)과 변수를 정의한다.

$L_{k-1,j}$: 단계 k-1에서 사건 $\{T_{k-1}=j\}$ 를 만족하는 모든 시뮬레이션의 반복번호를 기록한 목록집합

$V_{k-1,j}$: $L_{k-1,j}$ 집합의 크기, 즉 $L_{k-1,j}$ 집합

List set의 예를 들어보자. 여기서 O는 양품, X는 불량품을 나타낸다.

위에서 $n=10, m=5, S=10$ 이라면,
 $U_{1,1}=1, U_{2,1}=2, U_{10,1}=2, U_{1,2}=2, U_{2,2}=3, \dots$ 이고 $L_{1,1}=\{1\}, L_{1,2}=\{2,4\}, L_{1,3}=\{5\}, L_{2,3}=\{1,3\}, L_{2,4}=\{4\}, L_{2,5}=\{5\}$ 등이다.

List set와 변수의 초기치로 $L_{0,0}=\{1,2,3,\dots,m\}, l_{0,0,r}=r, V_{0,0}=m$ 로 설정하면 list set $L_{k-1,j}$ 는 다음과 같이 구해진다:

$$L_{k-1,j} = \{t \mid l_{k-1,j,r}=t, \text{ for } r=1,2,\dots,V_{k-1,j}\}$$

List set $L_{k-1,j}$ 는 k-1단계로 도달하는 모든 경로의 정보를 담고 있으며, 이러한 $V_{k-1,j}$ 개의 시뮬레이션 반복중에 단계 k에서 $\{C_{k,n}=i-j\}$ 사건을 만족하는 반복수를 센다. 그러면 이 반복수가 결합사건 $\{T_{k-1}=j \cap C_{k,n}=i-j\}$ 의 횟수가 되고, 결합확률의 추정치는 다음과 같게 된다.

반복회	k=1	k=2	...	k=S
r	1 2 3 4 5 6 7 8 9 ... n	1 2 3 4 5 6 7 8 9 ... n	...	1 2 3 4 5 6 7 8 9 ... n
1	o o o o x o o o o ... o	o o o o o x o o o ... x	...	o o o o x o x o o ... o
2	o x o o x o o o o ... o	o x x o x o o o o ... o	...	x o o o x o o o x ... o
3	o o x o o o o o o ... o	o o o o x o o x o ... o
4	x o o o o o o o x ... o	o o o o x o o o o ... x
m=5	o x o o x o x o o ... o	x o o o x o o o o ... o	...	o o o o x o o o o ... o

$$\widehat{\Pr}\{T_{k-1}=j \cap C_{k,n}=i-j\} = \sum_{r=1}^{V_{k-1,j}} I(U_{k,t}=i-j, \text{ for } t=l_{k-1,j,r} \in L_{k-1,j})/m$$

위 식에서 단계 $k-1$ 의 연속영역으로 도달하는 경로조건을 만족하는 시물레이션 반복 중의 하나가 $l_{k-1,j,r}$ 이기 때문에 U 의 두 번째 인덱스로 t 가 사용되었다. 이 t 는 사건 $\{T_{k-1}=j\}$ 에 해당된다. 다음으로 $U_{k,t}=i-j$ 는 사건 $\{C_{k,n}=i-j\}$ 에 해당되고 이는 그림에서 좌표 점 (k, i) 로 가는 모든 샘플경로들이다. 좌표 $(k-1, j)$ 에서 (k, i) 로 가는 샘플경로는 다수개 존재하므로 이 과정은 $j \in J_C(k-1, i)$ 인 모든 j 에 대해 반복된다. 그러면 이제 $\hat{p}_{k,i}$ 의 추정치를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\hat{p}_{k,i} = \sum_{j \in J_C(k-1, i)} \sum_{r=1}^{V_{k-1,j}} I(U_{k,t}=i-j, \text{ for } t=l_{k-1,j,r} \in L_{k-1,j})/m$$

이와 같이 해서 구한 좌표 (k, i) 로 도달하는 모든 샘플경로의 정보는 다음의 단계 k 를 위해 list set $L_{k,i}$ 에 저장된다. 이 집합의 요소는 다음과 같이 새로운 결합사건을 만족하는 시물레이션 반복번호들이다.

$$L_{k,i} = \bigcup_{j \in J_C(k-1)} \{t \mid l_{k-1,j,r} = t, \text{ and } U_{k,t} = i-j, \text{ for } r=1, 2, \dots, V_{k-1,j}\}$$

다음에 단계 k 에서의 채택 및 기각 확률을

$$\alpha_k \equiv \widehat{\Pr}\{A_k\} = \sum_{j \in J_A(k-1)} \sum_{r=1}^{V_{k-1,j}} I(U_{k,t} \leq a_{k-j}, \text{ for } t=l_{k-1,j,r} \in L_{k-1,j})/m$$

$$\beta_k \equiv \widehat{\Pr}\{R_k\} = \sum_{j \in J_R(k-1)} \sum_{r=1}^{V_{k-1,j}} I(U_{k,t} \geq a_{k-j},$$

$$\text{for } t=l_{k-1,j,r} \in L_{k-1,j})/m$$

로 구할 수 있고 제1종 및 2종의 과오확률은

$$\hat{\alpha} = \sum_{k=1}^S \widehat{\Pr}\{R_k^{AQL}\} \text{ 과}$$

$$\hat{\beta} = \sum_{k=1}^S \widehat{\Pr}\{A_k^{LTPD}\}$$

에서 구할 수 있다.

4. 탐색 기법

다중표본계획법은 다음과 같은 수리계획법을 만족하는 조건을 찾아내는 샘플링 계획법이라고 할 수 있다.

$$\text{Min. func}(\hat{\alpha}, \alpha, \hat{\beta}, \beta)$$

s.t.

$$\hat{\alpha} = \sum_{k=1}^S \widehat{\Pr}\{R_k^{AQL}\} \leq \alpha$$

$$\hat{\beta} = \sum_{k=1}^S \widehat{\Pr}\{A_k^{LTPD}\} \leq \beta$$

그러나 위와 같은 비선형 NP Hard 수리계획법은 사실상 해석적으로는 해결이 불가능하다. 그리고 열거법(enumeration)도 거의 불가능하다. 왜냐하면 만일 단계의 갯수가 $S=30$ 개이고 각 단계마다 가능한 채택 및 기각치를 10개씩만 고려한다고 해도 총 $10^{30 \cdot 2}$ 개의 열거가 필요하기 때문이다. 따라서 본 연구에서는 다음과 같은 4가지의 탐색기법을 고려한다.

(NA): Nearest α : α 근접치 우선 탐색

(NB): Nearest β : β 근접치 우선 탐색

(CA): Central α : α 중심치 우선 탐색

(CB): Central β : β 중심치 우선 탐색

모든 탐색은 단계 1부터 시작한다. 먼저 NA 탐색법은 제 1단계에서 $\hat{\alpha}$ 가 α 를 넘기 바로 직

전까지 증가시키기 위하여 기각치 r_k 를 1단위씩 감소시켜 나간다. r_k 를 감소시킨 후 다시 $\hat{\beta}$ 가 β 를 넘기 직전까지 채택치 a_k 를 1단위씩 증가시킨다. 이제 다음 단계인 단계 2에서도 마찬가지로 작업을 수행한다. 이와 같은 작업을 맨 마지막 단계 S까지 반복하여 최적 r_k 와 a_k 를 구하는 것이 NA 탐색기법이다.

NB 탐색기법은 NA 탐색기법과 동일하나 먼저 최적 a_k 를 찾고 나중에 r_k 를 찾는다는 것만 다르다. CA 탐색기법은 NA 탐색기법에서 r_k 를 최소 하한치까지 감소시키는 것 대신에 1단위만 감소시킨 후 a_k 를 1단위 증가시키는 작업을 반복하므로써 목적함수인 $|\hat{\alpha} - \alpha| + |\hat{\beta} - \beta|$ 를 최소화하여 최적해를 찾는 방법이다. CB 탐색기법은 CA 탐색기법과 동일하나 먼저 최적 a_k 를 찾고 나중에 r_k 를 찾는다는 것만 다르다.

5. 성능척도 및 수치 예제

각 단계에서의 채택 및 기각 확률을 이미 구하였으므로 평균표본수(Average Sample Number)는 다음과 같이 구해진다.

$$ASN = \sum_{k=1}^S kn[\Pr\{A_k\} + \Pr\{R_k\}]$$

평균총검사수(Average Total Inspection)는

$$ATI = \sum_{k=1}^S kn\Pr\{A_k\} + \sum_{k=1}^S N\Pr\{R_k\}$$

로 구할 수 있다. 평균출검품질(Average Outgoing Quality)를 구하기 위해 N_D 를 검사 후 N 개의 로트 중에 남아 있는 총 불량갯수라 하고, N_S 를 검사 후 실제 출하된 제품의 수라 하자. 그러면

$$AOQ = E[N_D]/E[N_S]$$

이다.

여기서 $\gamma_{i,j}$ 를 i 개의 아이템 중에서 j 개 이상의 불량이 있을 확률이라고 하면,

$$E[N_D] = \sum_{k=1}^S [\sum_{j=1}^N \gamma_{N,j} - \sum_{j=1}^{kn} \gamma_{kn,j}] \Pr\{A_k\}$$

로 구할 수 있다. 발견된 모든 불량품이 양품으로 교체된다면 $N_S = N$ 이고, 교체하지 않고 폐기처분만 된다면 N_S 의 기대치는

$$E[N_S] = \sum_{k=1}^S [(N - r_k)\Pr\{R_k\} + (N - a_k)\Pr\{A_k\}]$$

가 된다.

이제 프로세스의 수치예로서 Markov Chain 모델을 고려하자. 프로세스의 상태는 0(양품)과 1(불량)의 두가지가 있으며 이 과정은 다음의 전이확률행렬(transition probability matrix)로 표현된다[1].

$$P = \begin{bmatrix} 1 - p(1 - \rho) & p(1 - \rho) \\ (1 - p)(1 - \rho) & p + \rho(1 - p) \end{bmatrix}$$

여기서 p 는 불량률이고, 모수 ρ 는 1차 자기상관계수이며 프로세스의 종속성의 정도를 나타내는 인자이다. $\rho = 0$ 이면 이 프로세스는 독립적인 베르누이 프로세스와 동일하고, $\rho > 0$ 이면 다음의 프로세스 상태는 바로 앞의 상태와 같은 경향을 따르며, $\rho < 0$ 이면 다음의 상태가 앞의 상태와는 반대의 경향을 갖게된다. 시뮬레이션은 반복수를 $m = 10000$ 으로 하였고, 샘플링 계획의 제1종 과오는 $\alpha = 0.1$, 제2종 과오는 $\beta = 0.1$, AQL=0.01, LTPD=0.1, 그리고 로트의 크기는 $n = 400$ 으로 설정하였다. 이 예제에서는 종속인자의 변화에 따른 표본계획법의 비교를 위하여 $\rho = -0.5, 0.0, 0.5$ 의 3가지를 선택하였다.

다중 표본계획법은 우선 측차계획법을 기초로 하여 수립하므로 측차 계획법부터 살펴보기로 한다. 다음의 <표 1>은 측차계획법의 성능척도를 보여준다.

<표 1> 축차 표본계획법의 성능척도

ρ	$\hat{\alpha}(\%)$	$\hat{\beta}(\%)$	AQL			LTPD		
			ASN	ATI	AOQ(%)	ASN	ATI	AOQ(%)
-0.5	5.92	8.93	18.9	41.9	1.3204	12.5	366	1.1128
0	5.24	10.47	27.4	47.6	0.8886	17.6	361	0.9819
0.5	5.46	11.42	57.1	77.5	0.8042	50.4	361.8	0.9638

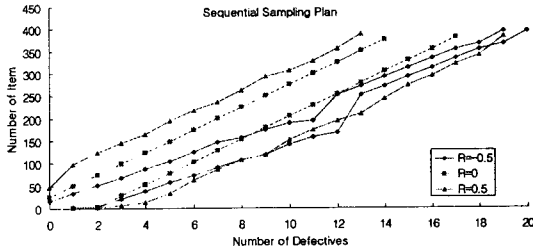
<표 1>을 살펴보면 ρ 가 커지면 커질수록 ASN이 증가하는 것을 알 수가 있으며 ATI도 비슷한 경향을 보이고 있다. 그러나 AOQ는 ASN이 증가하므로 반대로 감소하는 것을 알 수 있다. 종속인자 ρ 가 양이면 프로세스의 상태가

이전 상태와 유사한 경향을 따르므로 프로세스의 기각 또는 채택의 판정이 쉽게 이루어지지 않는 것이며, 반대의 경우에는 프로세스의 종료가 더 빨리 이루어진다는 것을 보여주고 있다.

<표 2>는 불량갯수에 따른 축차계획법의 채

<표 2> 종속인자 ρ 에 따른 축차표본 계획법의 채택 및 기각 판정 샘플수

불량 갯수	$\rho = -0.5$		$\rho = 0.0$		$\rho = 0.5$	
	reject	accept	reject	accept	reject	accept
0	-	16	-	23	-	46
1	1	33	1	49	1	98
2	3	51	3	75	2	123
3	21	68	28	100	6	145
4	38	87	53	125	13	165
5	58	104	79	146	33	194
6	73	125	103	173	63	217
7	91	147	131	202	85	235
8	107	156	154	227	107	262
9	119	174	192	256	118	294
10	142	189	214	299	152	307
11	158	194	250	309	174	328
12	168	252	278	375	195	356
13	252	272	309	394	210	389
14	272	293	375		244	
15	293	314	394		273	
16	314	334			295	
17	334	355			321	
18	355	367			341	
19	367	395			384	
20	395					



<그림 2> 종속인자에 따른 채택과 기각 결정직선

택 및 기각을 결정하기 위한 표본수를 보여주고 있다. 표에서 - 표시는 결정이 내려질 수 없음을 뜻한다. <그림 2>는 <표 2>를 그래프로 나타낸 것이다. 그래프에서 위의 3선분이 채택결정선이고 아래의 3선이 기각결정선이다. 시뮬레이션으로 구하였기 때문에 $\rho \neq 0$ 인 경우 다소 매끄럽지 않은 선분 형태를 보여주고 있지만 시뮬레이션

반복수를 더 크게하면 매끄러운 선을 얻을 수가 있다. ρ 가 양이면 $\rho=0$ 인 경우보다 채택과 기각 두 결정선 사이의 폭이 넓은 것을 알 수 있다. 이것은 그만큼 프로세스의 종료 판정이 빨리 이루어지지 않고 계속될 가능성이 높다는 것, 즉 ASN이 커진다는 것을 나타낸다.

반대로 ρ 가 음이면 $\rho=0$ 인 경우보다 채택과 기각 결정선의 폭이 점점 좁아지고 있으며 채택과 기각 판정도 빨리 이루어지고 있음을 알 수 있다. 이것은 ASN이 작아지게 되는 원인이 되고 있다.

<표 3>은 표본크기가 $n=20$ 인 경우에 4가지 탐색기법으로 찾은 다중표본 계획법의 성능척도를 보여주고 있다. 참고로 다른 탐색기법과의 비교를 위해 측차계획법의 결과로부터 아무런 탐색 시작기준을 사용하지 않은 경우인 초기해(INI) 결과를 포함시켰다. 따라서 INI는 다른 4가지 탐색

<표 3> 다중표본계획법의 성능척도 (표본크기 $n=20$)

탐색 기법	ρ	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	AQL			LTPD		
				ASN	ATI	AOQ	ASN	ATI	AOQ
INI	-0.5	26.65	0.13	45.5	146.7	0.932	25.6	399.5	0.015
	0.0	24.37	0.35	61.0	153.4	0.622	31.3	398.9	0.028
	0.5	13.85	2.18	99.6	151.1	0.621	63.6	394.2	0.145
NA	-0.5	7.36	8.77	35.0	62.9	1.241	47.4	368.3	1.036
	0.0	7.80	9.50	42.1	71.4	0.828	44.1	364.3	0.895
	0.5	8.46	9.86	67.4	97.7	0.753	56.4	365.4	0.863
NB	-0.5	7.34	8.78	33.6	61.5	1.247	47.4	368.2	1.036
	0.0	7.58	9.59	39.9	68.6	0.835	44.1	364.0	0.901
	0.5	8.29	10.0	66.8	96.7	0.755	56.4	365.1	0.870
CA	-0.5	7.45	3.29	47.5	75.7	1.194	49.6	387.5	0.407
	0.0	7.78	8.90	46.5	75.8	0.818	44.4	366.3	0.845
	0.5	8.62	7.38	89.5	120.8	0.697	60.6	379.0	0.524
CB	-0.5	7.40	3.80	39.9	67.9	1.223	49.4	385.7	0.465
	0.0	7.58	9.59	39.9	68.6	0.835	44.1	364.0	0.901
	0.5	8.48	10.0	67.2	97.6	0.753	56.4	365.0	0.872

기법보다는 성능척도가 떨어진다. ASN과 ATI는 불량률이 AQL인 경우 축차계획법과 비슷하게 종속인자 ρ 가 커질수록 증가하는 것을 알 수 있으나 불량률이 LTPD인 경우에는 반드시 그렇지 않음을 알 수 있다. NA와 NB기법은 성능이 비슷하게 나왔으나 CA와 CB기법은 제2종과오인 β 의 정확도가 약간 떨어짐을 알 수 있다.

<표 4>, <표 5>, <표 6>은 표본크기가 $n=20$ 일 때 ρ 가 각각 -0.5, 0.0, 0.5인 경우의 각 단계마다의 채택과 기각을 결정하는 불량품의 수인 a_k 와 r_k 를 보여주고 있다. 예를 들면 $\rho=-0.5$ 인 경우, 제 3단계($k=3$)에서 NA 기준으로는 $a_k=4$

이고 $r_k=7$ 이므로 3단계까지 총 60개의 표본 가운데 불량률이 4개 이하이면 프로세스는 채택되고 7개 이상이면 프로세스가 기각됨을 뜻한다. $\rho=0$ 인 경우에는 프로세스가 독립적이므로 a_k 와 r_k 사이의 차이가 항상 2인데 반하여, $\rho \neq 0$ 이면 채택과 기각을 결정하는 불량품의 수의 차이가 처음에는 크지만 각 단계가 진행함에 따라 나중에는 점점 줄어들고 있음을 알 수 있다. 이것은 각 탐색기법이 샘플링 계획의 제1종 및 2종 과오의 기준을 만족시키면서 가급적 프로세스가 일찍 종료되는 방향으로, 즉 ASN이 작아지는 방향으로 움직이기 때문이다.

<표 4> 탐색기법에 따른 채택(a_k) 및 기각(r_k) 결정 불량품의 수 ($n=20$, $\rho=-0.5$)

ρ	단계 k	샘플 Size	INI		NA		NB		CA		CB	
			a_k	r_k	a_k	r_k	a_k	r_k	a_k	r_k	a_k	r_k
-0.5	1	20	-	2	0	7	0	7	0	7	0	7
	2	40	0	4	2	7	2	7	0	7	1	7
	3	60	1	5	4	7	4	7	1	7	2	7
	4	100	3	7	5	7	5	7	3	7	4	7
	5	120	4	9	5	7	7	9	5	7	6	8
	6	140	5	9	5	7	7	9	6	8	7	9
	7	160	6	11	6	8	9	11	7	9	8	10
	8	180	8	12	8	10	10	12	9	11	9	11
	9	200	9	12	9	11	10	12	9	11	10	12
	10	220	11	12	11	12	11	12	11	12	11	12
	11	240	11	12	11	12	11	12	11	12	11	12
	12	260	11	13	11	13	11	13	11	13	11	13
	13	280	12	14	12	14	12	14	12	14	12	14
	14	300	13	15	13	15	13	15	13	15	13	15
	15	320	14	16	14	16	14	16	14	16	14	16
	16	340	15	17	15	17	15	17	15	17	15	17
	17	360	16	18	16	18	16	18	16	18	16	18
	18	380	17	19	17	19	17	19	17	19	17	19
	19	400	19	20	18	19	18	19	18	19	18	19

<표 5> 탐색기법에 따른 채택(a_k) 및 기각(r_k)결정 불량품의 수 ($n=20, \rho=0.0$)

ρ	단계 k	샘플 Size	INI		NA		NB		CA		CB	
			a_k	r_k	a_k	r_k	a_k	r_k	a_k	r_k	a_k	r_k
0.0	1	20	-	2	0	5	0	5	0	5	0	5
	2	40	-	3	0	5	0	5	0	5	0	5
	3	60	0	4	1	5	1	5	0	5	1	5
	4	100	1	5	2	5	2	5	1	5	2	5
	5	120	2	5	3	5	3	5	2	5	3	5
	6	140	3	6	3	5	4	6	3	5	4	6
	7	160	3	7	3	5	5	7	4	6	5	7
	8	180	4	8	4	6	6	8	5	7	6	8
	9	200	5	8	5	7	6	8	5	7	6	8
	10	220	6	9	6	8	7	9	6	8	7	9
	11	240	6	10	6	8	8	10	7	9	8	10
	12	260	7	10	7	9	8	10	7	9	8	10
	13	280	8	11	8	10	9	11	8	10	9	11
	14	300	9	12	9	11	10	12	9	11	10	12
	15	320	9	12	9	11	10	12	9	11	10	12
	16	340	10	13	10	12	11	13	10	12	11	13
	17	360	12	13	12	13	12	13	12	13	12	13
	18	380	12	13	12	13	12	13	12	13	12	13
	19	400	12	14	12	14	12	14	12	14	12	14

<표 6> 탐색기법에 따른 채택(a_k) 및 기각(r_k)결정 불량품의 수 ($n=20, \rho=0.0$)

ρ	단계 k	샘플 Size	INI		NA		NB		CA		CB	
			a_k	r_k	a_k	r_k	a_k	r_k	a_k	r_k	a_k	r_k
0.5	1	20	-	4	-	6	-	6	-	6	-	6
	2	40	-	5	0	6	0	6	-	6	0	6
	3	60	-	5	0	6	0	6	-	6	0	6
	4	100	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6
	5	120	0	7	1	6	1	6	1	6	1	6
	6	140	1	9	1	6	1	6	4	6	2	6
	7	160	1	9	3	6	3	6	5	7	2	6
	8	180	2	10	3	6	3	6	6	8	3	6
	9	200	3	11	4	6	4	6	7	9	4	6
	10	220	4	12	4	6	9	11	8	10	4	6
	11	240	5	13	5	7	9	11	9	11	7	9
	12	260	6	13	6	8	9	11	10	12	9	11
	13	280	7	14	7	9	12	14	11	13	11	13
	14	300	7	15	7	9	13	15	12	14	12	14
	15	320	8	16	8	10	14	16	13	15	13	15
	16	340	9	16	9	11	14	16	13	15	14	16
	17	360	10	17	10	12	15	17	14	16	15	17
	18	380	11	18	11	13	16	18	15	17	16	18
	19	400	12	18	12	14	16	18	15	17	16	18

6. 결론

지금까지 다중표본 계획법을 구하기 위한 절차를 살펴보았다. 처음에 측차표본 계획법으로부터 초기해를 구하여 대략적인 채택 및 기각수를 구하였고, 채택 및 기각 결정경계가 주어지면 제 1종 및 2종 과오를 만족하는 최적 계획을 4가지 탐색기법으로 구하였다. 로트의 채택과 기각확률 그리고 표본경로에 대한 조건부 확률을 몬테칼로 시물레이션으로 구하였다. 표본계획법의 성능평가를 위한 공식도 개발하였으며 제1종 및 제 2종 과오도 추정되었다. 다중표본 계획법의 특별한 경우로 각 단계의 크기를 1로 설정하여 더 작은 평균표본수와 제 1종 및 2종 과오를 좀더 만족시키는 측차계획법을 역으로 찾아 낼 수 있다.

종속적 다중표본 계획법의 활용은 생산공정간의 데이터가 독립적이 아닌 확률적으로 종속적인 경우에 전통적인 독립적 다중표본 계획법을 적용할 때 발생하는 위험을 줄여줄 수 있으므로 지금까지의 독립성만을 고려한 샘플링 방법에서 벗어나 종속적인 생산 공정에도 유연하게 적용시킬 수 있다. 본 연구의 또 다른 응용으로 예를 들어 신제품을 설계를 할 때 일정한 크기의 시험을 거친 후, 이 설계를 채택할 것인가 아닌가를 판단해야 하는 경우가 있다. 이 때 시간 또는 실험이 진행됨에 따라 제품의 특성이 열화되는 경우에는 자료간에 종속성이 존재한다고 볼 수가 있다. 이러한 경우에 새로운 설계의 채택여부를 결정하기 위한 적합한 실험(샘플)의 크기와 불량수(기각수)를 구하자 하는 경우에 유용하게 응용될 수가 있을 것이다.

참고 문헌

- [1] Bhat, U. Narayan and Lal, Ram, "Number of Successes in Markov Trials," *Advances in Applied Probability*, 20, 1988, pp. 677-680.
- [2] Bhat, U. Narayan and Lal, Ram and Mahinda Karunaratne, "A Sequential Inspection Plan for Markov Dependent Production Processes," Vol. 22, Number 1, *IIE Transactions*, March 1990.
- [3] Broadbent, S. R., "The Inspection of a Markov Process," *Journal of Royal Statistics Society*, B20, 1958, pp. 111-119.
- [4] Frielander, B., "Lattice Filters for Adaptive Processing," *Proceedings of the IEEE*, Vol. 70, 1982, pp. 829-867.
- [5] Kim, W.K., "Design and Estimation of Double Sampling Plans for the Dependent Production Processes," *Journal of Korean Institute of Industrial Engineering*, Vol. 23, No. 2, 1997, pp. 289-305.
- [6] Kim, W.K., "Stochastically Dependent Sequential Acceptance Sampling Plans," *Journal of Korean Society for Quality Management*, Vol. 25, No. 3, 1997, pp. 22-38.
- [7] Lee, J., Park, C., and Park, J., "Sequential Sampling Inspection Plans for Defectives," *Journal of Korean Society for Quality Management*, Vol. 24, No. 4, 1996, pp. 1-13.
- [8] Lorden, G., "On Excess over the Boundaries," *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 41, No.2, 1970, pp. 520-727.
- [9] Nelson, B., "Estimating Acceptance-Sampling Plans for Dependent Production Processes," *IIE Transactions*, Vol. 25, No. 6, 1993, pp. 11-18.
- [10] Sarkadi, K., and Vincze, I., *Mathematical*

- Methods of Statistical Quality Control*, Academic Press, N.Y., 1974.
- [11] Siegmund, D., "Boundary Crossing Probabilities and Statistical Applications," *Annals of Statistics*, Vol. 14, No. 2, 1986, pp. 361-404.
- [12] Wald, A., *Sequential Analysis*, John Wiley, New York, 1947.
- [13] Wald, A., and Wolfowitz, "Optimum Character of the Sequential Probability Ratio Test," *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 19, 1948, pp. 326-339.

● 저자소개 ●



김원경 (e-mail : wkkim@kyungnam.ac.kr)

1977년 2월 서울대학교 산업공학과 학사

1979년 8월 서울대학교 대학원 산업공학과 석사

1979년 3월~1983년 2월 국방과학연구소 연구원

1991년 8월 미국 Ohio State University, M.S.

1993년 2월 미국 University of Houston, Ph.D.

1983년 3월~현재 경남대학교 산업공학과 교수

관심분야 : 신뢰도 공학, 시뮬레이션, 응용통계