▩ 응용논문

# 시계열 모형에서 붓스트랩 기법을 이용한 $\overline{x}$ 와 EWMA 관리도의 수행도 평가

## -Performance Evaluation of $\overline{x}$ and EWMA Control Charts for Time series Model using Bootstrap Technique-

송 서 일*
Suh-Ill Song
손 한 덕**
Han-Deak Shon

**Abstract**

The Bootstrap method proposed by Efron is non-parametric method which doesn't depend on the estimation of prior distribution refer to population. A typical statistical process control chart which is generally used is developed under the assumption that observations follow mutually independent and identically distributed within a sample and between samples. However, autocorrelation greatly affect the developed control chart under the assumption that observations are mutually independent. Many researchers showed that the result which was analyzed by using a typical control chart for the observations which has the correlation violated to the independence assumption can not be true.

Therefore, we compared the standard method with bootstrap method and then evaluated them for $\overline{x}$ control chart and EWMA control chart by using bootstrap method which was proposed by Efron in the AR(1) model when the observations have correlation.

## 1. 서론

붓스트랩 기법은 Efron(1979)에 의해서 처음 제안된 것으로, 추출된 샘플이 모집단에 관한 사전 분포의 추정에 의존하지 않는 비모수적 기법이다.

그러나, 일반적으로 사용되는 전통적인 통계적 공정관리도는 관측치들간의 상관관계가 없다는 것으로, 품질 특성치의 관측치들이 샘플내와 샘플간에서 서로 독립적이고, 동일한 분포를 갖는다는 가정하에 개발되었으나, 최근에 감지장치와 측정기법의 개발로 제조 공정상에서 관측되는 관측치들에는 본질적인 자기 상관관계가 나타나게 되었으며, 이러한 자기상관관계의 존재는 독립된 관측치의 가정하에 개발된 관리도에 매우 큰 영향을 주며, 많은 학자들이 독립성 가정에 위배되는 상관관계가 있는 관측치에 대한 전통적인 관리도를 사용하여 분석한 결과는 더 이상 신뢰할 수 없다는 것을 보여주고 있다.[2, 5, 6, 8, 9]

* 동아대학교 산업시스템공학과 교수
** 부산정보대학 기계산업계열 공업경영학과 교수

따라서 본 연구에서는 Efron(1979)이 제안된 붓스트랩 기법을 사용하고, 관측치들이 자기상관관계를 가질 때 널리 사용되는 시계열 모형인 Box와 Jenkins 모형(1976)을 이용한 통계적 공정관리도의 $\bar{x}$ 관리도와 EWMA 관리도에 대한 표준방법과 붓스트랩 방법을 비교하고, 이들 관리도의 비교를 위해 관리도의 수행도 측면에서 평균런길이(average run length, ARL)로 비교 · 평가한다.

## 2. 붓스트랩 방법

Efron(1979)에 의해서 처음 제안된 붓스트랩은 통계량의 샘플링 분포를 효과적으로 예측하는 계산적 기법이다. 특히 샘플이 추출된 모집단을 대표한다는 가정이 있을 때, 그리고 관측치들이 독립적이고 연속적인 분포일 때 통계량의 샘플링 분포를 예측하는 비모수적 붓스트랩을 이용할 수 있다. 이 간단한 형태에서 비모수적 붓스트랩은 샘플이 추출된 것인 근원적인 모집단에 관한 분포적 추정에 의존하지 않는다.

이러한 붓스트랩을 관리도에 적용한 연구로 Bajgier(1992)는 하위 그룹화된 데이터에 대한 붓스트랩 관리도를 제안하여 표준 Shewhart 관리도와 그가 제안한 붓스트랩 관리도에 있어서 평균 런 길이(ARL)를 그래프화하여 비교함으로써 그의 관리도를 평가하여 붓스트랩 관리도의 수행도면에서 의미 있는 평가를 제시했다. 그리고 Seppala, Moskowitz, Plante 와Tang(1995)는 데이터의 하위집단의 평균 또는 표준편차를 감시하는데 사용될 수 있는 하위집단 붓스트랩이라 불리는 기법을 제안했다. 그들은 하위집단 붓스트랩의 수행도를 평가하는데 포함확률(CVG: coverage)이라 불리는 척도를 사용했다. 또한 Liu 와 Tang(1996)은 하위집단 데이터에 대한 관리도를 설계하는데 유사한 기법을 제시했다. 그들은 실제 관리도와 붓스트랩 관리도에서의 차이점들을 살펴봄으로써, 붓스트랩 관리도의 수행도를 평가하고 있다.

## 3. $\bar{x}$ 관리도의 붓스트랩 관리도 설계

따라서, 본 연구에서는 AR(1)모형에 적합시킨 하위집단 붓스트랩은 측정치들을 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$x_{ij} = \xi + \phi_1 x_{ij-1} + \varepsilon_{ij} \tag{1}$$

이 때 $\xi$는 상수이고 0으로 두며, $\varepsilon_t$는 랜덤오차의 조건이다. 다음은 하위집단 붓스트랩 방법에 의한 AR(1) 모형의 알고리즘은 다음과 같다.

1. $n \cdot k$ 총 측정치들에 대한 $n$크기의 $k$하위집단을 관측한다.
2. $i = 1,2,\cdots,k$ 그리고, $j = 1,2,\cdots,n$ 에 대해서 $e_{ij} = x_{ij} - \hat{x}_i$를 계산한다. 이 때, $\bar{x}_i$는 $i$번째 하위집단의 샘플평균이다.
3. 단계 2에서 계산된 $n \cdot k$ 잔차들의 샘플들의 집합에서 복원으로 $n$크기의 랜덤샘플을 추출한다. 이 샘플 $e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*$은 부트스트랩 샘플이다.
4. $j = 1,2,\cdots,n$에 대해서 $x_j^* = \bar{\bar{x}} + a \cdot e_j^*$를 계산한다.

   여기서 $a = \dfrac{(1-\phi_1)}{\sqrt{(1-\phi_1)^2 + (\phi_1 - \hat{\phi}_1)^2}}$ 은 샘플링된 하위집단의 분산을 조정하는데 사용되는 상관관계인자이다.

5. $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$ 으로부터 샘플평균 $\overline{x}^*$ 을 계산한다.
6. 큰 숫자 $B$회 만큼 단계 3-5를 반복한다.
7. $B$ 부트스트랩 예측치들 $\overline{x}_1^*$, $\overline{x}_2^*, \cdots$, $\overline{x}_B^*$ 을 소트한다.
8. $\frac{\alpha}{2} \cdot B$값보다 큰 최소의 $\overline{x}^*$ 값을 찾는다. 이것이 붓스트랩 관리하한 LCL이다.
9. $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \cdot B$값보다 큰 최소의 $\overline{x}^*$ 값을 찾는다. 이것이 붓스트랩 관리상한 UCL 이다.

여기서 다시 $\alpha$는 관리도에서 관리한계를 벗어날 확률이다.

## 4. EWMA 관리도의 붓스트랩 관리도 설계

Roberts(1956)에 의해 소개된 EWMA 관리도의 모집단에서 모형은

$$x_i = \mu_i + \varepsilon_i, \qquad i = 1, 2, \cdots \tag{2}$$

이고, $\varepsilon_i$는 독립적인 확률변수이고 $N(0,\ \sigma^2)$ 을 따른다. 바람직한 상황(desired situation)은 $\mu_i = \mu_0$, $i = 1, 2, \cdots$이다. 여기서 $\mu_0$는 공정의 목표값(target value)이다. EWMA 통계량이 연속적인 값인 확률표본 $x_1$, $x_2$, $\cdots$ 에 의해서 발생되어지면, 이는 다음과 같이 표현되므로 EWMA 통계량은

$$Z_i = \lambda_f \overline{x}_i + (1-\lambda) Z_{i-1} \quad i = 1, 2, \cdots \tag{3}$$

여기서 $0 < \lambda \leq 1$은 평활상수이고, $\lambda_f = 1-(1-\hat{\phi}_1)/2\hat{\phi}_1$이다.

그리고 초기치 값은 식 (4)로 두고,

$$Z_0 = \overline{\overline{x}} \tag{4}$$

이때 EWMA 관리도의 점근적인 관리한계는 식 (5)와 식 (6)과 같고,

$$UCL = \overline{\overline{x}} + 3\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)n}} \tag{5}$$

$$LCL = \overline{\overline{x}} - 3\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)n}} \tag{6}$$

이것은 표본 수 $i$가 적당하게 클 경우에 계산된다.

이제 EWMA 관리도의 붓스트랩 절차는 다음과 같이 설계할 수 있겠다. ; 이 모형에서 모수 $\lambda$ 가 기지이고, $\sigma_e^2$은 미지이며 현재의 데이터로부터 추정되어야한다고 가정하고, 데이터의 모형은

$$x_{ij} = \xi + \phi_1 x_{ij-1} + \varepsilon_{ij} \tag{7}$$

이다.

이 경우의 붓스트랩 절차는 다음과 같다

[단계 1] 잔차 $e_{ij}$를 계산한다 ;

$$e_{ij} = x_{ij} - Z_i \tag{8}$$

여기서, $i=1,\cdots,k$ 이고, $j=1,\cdots,n$, $Z_0=\overline{\overline{x}}$이며, $Z_i$, $i=i,\cdots,k$ 는 (3)에 주어져 있다. 이때 잔차는 다음 식에 의해서 조정된다.

$$\tilde{e}_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{nk}\sum_i\sum_j e_{ij}$$

[단계 2] 잔차 $e_j^*$ $(j=1,\cdots,n)$ 의 붓스트랩 표본을 얻기 위하여 조정된 잔차 $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \cdots, \tilde{e}_N)$으로부터 $n$ 개를 복원으로 재샘플링한다.

[단계 3] 식 (10)과 식 (11)으로 되풀이하여 붓스트랩 관측치 $\overline{x}_1^*,\cdots,\overline{x}_k^*$를 계산한다.

$$x_j^* = \overline{\overline{x}} + a e_j^* \tag{10}$$

여기서, $a$는 조정된 분산값으로 $\sqrt{\frac{nk}{nk-1}\left[\frac{n(2-\lambda)(1-\phi_1^2)}{n(2-\lambda)+\lambda(1-\phi_1^2)}\right]}$이다.

$$\overline{x}_i^* = \sum_{j=1}^{n} x_j^*/n \tag{11}$$

[단계 4] 단계 3에서 구한 $k$개의 $\overline{x}_i^*$를 가지고 초기치 $Z_0^* = \overline{\overline{x}}$인 EWMA 통계량값 $Z_i^* = \lambda\overline{x}_i^* + (1-\lambda)Z_{i-1}^*$ 을 구한다.

[단계 5] $B$ 만큼을 단계 3과 단계4를 반복한다.

[단계 7] $B$ 붓스트랩 예측치들 $Z_1^*, Z_2^*, \cdots, Z_B^*$을 소트한다.

[단계 8] $\frac{\alpha}{2}\cdot B$와 같은 값들이 그 값 아래 있게 되는 가장 적은 $Z_i^*$값을 찾는다. 이것이 붓스트랩 하한 관리한계 LCL이다.

[단계 9] $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot B$와 같은 값이 그 값 아래 있게 되는 가장 적은 $Z_i^*$값을 찾는다. 이것이 붓스트랩 상한 관리한계 UCL 이다.

여기서 $\alpha$는 관리도에서 관리한계를 벗어날 확률이다.

이때 관측된 $\overline{x}$ 로 공정평균 $\mu$를 추정하고 $e_{ij}$ 를 이용하여 잔차 $\varepsilon_{ij}$ 를 추정할 뿐이지 $\sigma_e^2$을 추정할 필요가 없고, 잔차들이 합해져서 0이 될 것이라는 보증이 없으므로 그 잔차들은 조정되어야만 한다.

## 4. 시뮬레이션

본 연구에서는 정규분포의 경우 표준 방법인 $\bar{x}$, EWMA 관리도와 붓스트랩 관리도를 비교하기 위하여 샘플크기와 하위그룹의 크기를 n=5와 k=20 이고 관리한계를 벗어날 확률 $\alpha$를 0.0026으로 둔다.

데이터는 자기상관 관계를 가질 때 식 (1)에서 상수 $\xi$가 0이고, 자기회귀 추정모수 $\hat{\phi}_1 = 0.35$ 로 가정하였을때, 자기회귀모수를 0.00에서 0.95까지 0.05씩 증가시켜 관리한계와 ARL을 조사하였다.

이때 [표 1]에서 바람직한 관리 상·하한은 모집단의 분포가 $N(0,1)$을 따른다는 가정에 의해 $\bar{x}$ 관리도의 표준 관리한계가 UCL =1.34676, TLCL = -1.34676 ($\pm Z_{\alpha/2} \cdot 1/\sqrt{5}$)일 때 ARL의 변화이다.

그리고 [표 2]의 EWMA 관리도의 표준관리한계는 모집단의 분포가 $N(0,1)$을 따른다는 가정에 의해 TUCL = 0.2591, TUCL = -.25918으로 설정되었다.

이 표에 의해 자기회귀 추정 모수가 $\phi_1 < \hat{\phi}_1$ 으로 과다추정 되는 경우는 데이터의 음의 상관관계에 의해 ARL은 기대했던 것보다 크게 나타나고, 자기회귀 추정 모수가 $\phi_1 > \hat{\phi}_1$ 으로 과소추정 되는 경우는 데이터의 양의 상관관계에 민감히 반응하여 ARL은 기대했던 것보다 작게 나타난다. 따라서, 데이터의 자기상관관계 영향은 $\bar{x}$ 관리도와 EWMA 관리도의 정규성 가정에 위배되어 ARL에 심각한 영향을 미친다.

[표 1] 정규분포- 표준 $\bar{x}$ 관리도와 붓스트랩 관리도의 비교(n= 5, k=20, $\alpha = 0.0026$ 일때)

| $\hat{\phi}_1$ | $\phi_1$ | $\bar{X}$ chart | | | Bootstrap chart | | | Desired ARL |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | UCL | LCL | ARL | UCL | LCL | ARL | |
| 0.350 | 0.000 | 1.33833 | -1.33699 | 365.99850 | 1.10662 | -1.10735 | 88.44340 | 375.74630 |
| | 0.050 | 1.32578 | -1.32438 | 228.50830 | 1.10750 | -1.10847 | 67.51250 | 256.08870 |
| | 0.100 | 1.31455 | -1.31309 | 148.69380 | 1.10980 | -1.11067 | 51.56920 | 174.94270 |
| | 0.150 | 1.30446 | -1.30294 | 98.44700 | 1.11287 | -1.11337 | 39.94850 | 122.09130 |
| | 0.200 | 1.29534 | -1.29376 | 68.01650 | 1.11597 | -1.11607 | 31.27880 | 86.49100 |
| | 0.250 | 1.28703 | -1.28539 | 47.07500 | 1.11835 | -1.11815 | 24.62440 | 62.14540 |
| | 0.300 | 1.27937 | -1.27768 | 33.97700 | 1.11887 | -1.11847 | 19.16860 | 44.73050 |
| | 0.350 | 1.27225 | -1.27050 | 25.05990 | 1.11587 | -1.11501 | 14.98780 | 32.99740 |
| | 0.400 | 1.26556 | -1.26375 | 18.53120 | 1.10674 | -1.10554 | 11.92470 | 24.85840 |
| | 0.450 | 1.25922 | -1.25736 | 14.27830 | 1.08763 | -1.08667 | 9.19150 | 18.69080 |
| | 0.500 | 1.25324 | -1.25132 | 11.37550 | 1.05432 | -1.05338 | 6.96530 | 14.61580 |
| | 0.550 | 1.24768 | -1.24571 | 9.02130 | 1.00220 | -1.00083 | 5.29210 | 11.68550 |
| | 0.600 | 1.24275 | -1.24072 | 7.36330 | 0.92698 | -0.92543 | 3.98330 | 9.32580 |
| | 0.650 | 1.23881 | -1.23673 | 6.11060 | 0.82788 | -0.82640 | 2.95610 | 7.60050 |
| | 0.700 | 1.23645 | -1.23432 | 5.21510 | 0.70879 | -0.70722 | 2.24080 | 6.30820 |
| | 0.750 | 1.23656 | -1.23437 | 4.49660 | 0.57800 | -0.57614 | 1.77960 | 5.35320 |
| | 0.800 | 1.24040 | -1.23815 | 3.92770 | 0.44509 | -0.44319 | 1.47470 | 4.58890 |
| | 0.850 | 1.24967 | -1.24736 | 3.48840 | 0.31813 | -0.31610 | 1.27820 | 3.96330 |
| | 0.900 | 1.26660 | -1.26423 | 3.15450 | 0.20165 | -0.19942 | 1.14510 | 3.46990 |
| | 0.950 | 1.29392 | -1.29149 | 2.92520 | 0.09657 | -0.09420 | 1.06120 | 3.08330 |

[표 2] 정규분포- 표준 EWMA 관리도와 붓스트랩 관리도의 비교(n= 5, k=20, $\alpha = 0.0026$)

| $\hat{\phi}_1$ | $\phi_1$ | EWMA chart | | | Bootstrap chart | | | Desired |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | UCL | LCL | ARL | UCL | LCL | ARL | ARL |
| 0.350 | 0.000 | 0.29749 | -0.29616 | 3840.405 | 0.24508 | -0.25001 | 745.1634 | 1094.507 |
| | 0.050 | 0.29469 | -0.29334 | 2404.068 | 0.24469 | -0.24967 | 542.8467 | 776.6591 |
| | 0.100 | 0.29218 | -0.29081 | 1479.444 | 0.24413 | -0.24924 | 400.3826 | 561.8195 |
| | 0.150 | 0.28993 | -0.28854 | 935.167 | 0.24346 | -0.24871 | 296.3724 | 413.5220 |
| | 0.200 | 0.28789 | -0.28648 | 612.1998 | 0.24262 | -0.24788 | 223.0808 | 306.0484 |
| | 0.250 | 0.28602 | -0.28459 | 413.5396 | 0.24157 | -0.24689 | 168.3200 | 231.2075 |
| | 0.300 | 0.28431 | -0.28285 | 288.0084 | 0.24028 | -0.24565 | 129.3553 | 175.5638 |
| | 0.350 | 0.2827 | -0.28123 | 206.7772 | 0.23885 | -0.24419 | 100.2488 | 136.1803 |
| | 0.400 | 0.28118 | -0.27969 | 152.2176 | 0.23709 | -0.24243 | 78.55847 | 107.1197 |
| | 0.450 | 0.27974 | -0.27823 | 114.5796 | 0.23496 | -0.24028 | 61.62763 | 85.09183 |
| | 0.500 | 0.27837 | -0.27684 | 88.18963 | 0.23244 | -0.23775 | 48.5396 | 67.6661 |
| | 0.550 | 0.27707 | -0.27553 | 68.26413 | 0.22931 | -0.23466 | 38.64603 | 54.59213 |
| | 0.600 | 0.27591 | -0.27435 | 53.92973 | 0.22549 | -0.23079 | 30.79677 | 44.34747 |
| | 0.650 | 0.27495 | -0.27338 | 43.07243 | 0.22073 | -0.22597 | 24.5052 | 36.63670 |
| | 0.700 | 0.27432 | -0.27275 | 35.14607 | 0.21465 | -0.21978 | 19.51633 | 30.17630 |
| | 0.750 | 0.27423 | -0.27266 | 28.9023 | 0.20662 | -0.21168 | 15.39333 | 25.23887 |
| | 0.800 | 0.27497 | -0.2734 | 24.29713 | 0.1957 | -0.20056 | 11.85297 | 21.20113 |
| | 0.850 | 0.27691 | -0.27536 | 20.70907 | 0.18029 | -0.18466 | 8.84060 | 17.96010 |
| | 0.900 | 0.28057 | -0.27903 | 18.05007 | 0.15741 | -0.16105 | 6.11657 | 15.19307 |
| | 0.950 | 0.28657 | -0.28506 | 15.95353 | 0.11974 | -0.12212 | 3.65333 | 13.00993 |

## 5. 결론

최근 몇 년간 산업계에서는 자동화된 제조와 공정검사 기술의 발전으로 대량생산에 의한 관측자료는 어느 정도의 자기상관관계를 띄게 되어, 독립성 가정하에 개발된 전통적인 관리도는 일련의 상관관계의 존재로 인하여 부적합한 검사결과를 유도한다. 그러므로 시계열 모형과 연계하여 자기상관관계를 설명하고자 하는데, 이러한 시계열 모형인 Box-Jenkins 모형은 가피원인이 아닌 이상원인에 기인한 자료의 변동과 자기상관관계 구조로부터 유발되는 변동을 구분하는 매우 좋은 예측도구로써 제시된다.

따라서, 본 연구는 Box-Jenkins 예측모형을 사용해서 자기회귀모수를 추정할 때, 모수가 오차를 가지고 추정되거나 또는 예측잔차들의 변동에 의한 $\bar{x}$ 관리도와 EWMA 관리도의 붓스트랩 방법에 의한 상대적 민감도를 비교분석한 결과, $\bar{x}$ 관리도에선 자기상관관계의 영향이 둔감하여 바람직한 ARL에 근사하고 있으나, 붓스트랩 방법은 심각한 영향을 미치고 있으므로 $\bar{x}$ 관리도에서는 자기상관관계의 영향에 덜 적용받는 $\bar{x}$ 관리도를 추천할 수 있겠다.

그리고 EWMA 관리도에서는 붓스트랩 관리도가 자기상관관계의 영향에 둔감하여 바람직한 ARL에 근사하고 있다.

따라서 독립성 가정의 결여는 특히, 예측잔차를 적용한 EWMA 관리도에 대해 부적합한 검

사결과를 유도할 수 있으므로, 바람직한 관리상태의 ARL을 얻기 위하여 예측오차를 적용한 붓스트랩 관리도의 조정된 관리한계를 추천하겠다.

그리고 본 연구에서는 모수적 방법으로 공정이 안정상태이고 정규분포를 따를 경우에 $\bar{x}$관리도와 EWMA 관리도의 비교가 행하여 졌으나, 비모수적 상태인 비정규분포 즉, 일양분포와 지수분포 또는 감마분포를 가질 때에 관하여 사전분포의 가정이 필요없는 붓스트랩 방법을 비교하여 보아야 겠으며, 예측기법이 필요치 않은 이동블럭 붓스트랩 방법에 관해서 추후 연구가 되어야 할 것이다.

## 참고문헌


[1] Bajgier, S. M., "The Use of Bootstrapping to Construct Limits on Control Charts." *Proceedings of the Decision Science Institute*, San Diego, CA, pp. 1611-1613, 1992

[2] Box, G. E. P., and Kramer. T., "Statistical Process Monitoring and Feedback Adjustment-A Discussion," *Technometrics*, Vol. 34, No. 3, pp. 251-285, 1992

[3] Box, G. E. P., and Jenkins G. M., *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, 2nd edition, Holden Day, San Francisco, CA., 1976

[4] Efron, B., "Bootstrap Method : Another Look at the Jackknife." *Annals of Statistics*, Vol. 7, No. 1, pp. 1-26, 1979

[5] Johnson, R. A., and Bagshaw, M., "The Effect of Serial Correlation on the Performance of CUSUM Tests," *Technometrics*, Vol. 16, No. 1, pp. 103-122, 1974

[6] Johnson, R. A., and Bagshaw, M., "The Effect of Serial Correlation on the Performance of CUSUM Test II," *Technometrics*, Vol. 17, No. 1, pp. 73-95, 1975

[7] Liu, R. Y., and Tang, J., "Control Charts for Dependent and Independent Measurements Based on the Bootstrap." *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 91, No. 436, pp. 1694-1700, 1996

[8] Maragah, H. D., and Woodall, W. H., "The Effect of Autocorrelation on the Retrospective $X$-Chart," *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Vol. 40, pp. 29-42, 1992

[9] Montgomery, D. C., and Mastrangelo, C. M., "Some Statistical Process Control Methods for Autocorrelated Data," *Journal of Quality Technology*, Vol. 23, No. 3, pp. 179-193, 1991

[10] Roberts. S. W., "Control Chart Tests Based on Geometric Moving Average," *Technometrics*, Vol. 1, No. 2, pp. 85-93, 1959

[11] Seppala, T., Moskowitz, H., Plante, R., and Tang, J., "Statistical Process Control via the Subgroup Bootstrap." *Journal of Quality Technology*, Vol. 27, No. 2, pp. 139-153, 1995