

수중 산란체의 수치적 산란해석

Wave Scattering Analysis of Scatterers Submerged in Water by Using a Hybrid Numerical Approach

김 재 환*, 김 세 환**
(Jaehwan Kim*, Sehwan Kim**)

※ 본 연구는 1998년도 인하대학교 연구비 지원에 의해 이루어졌습니다.

요 약

본 논문에서는 유한요소와 무한요소를 사용하여 수중 산란체의 산란해석을 수행하였다. 무한영역을 유한영역으로 나누어 유한영역은 유한요소를 사용하여 모델링하고 무한/유한 영역의 경계면에서는 비반사조건을 만족시키기 위하여 무한요소를 사용하되 파동 특성이 가미된 IWEE(Infinite Wave Envelope Element)를 사용하였다. 수중 강체구의 산란해석에 유한요소의 차수, 크기 및 유한요소 모델 그리고 IWEE가 미치는 영향을 살펴보았다. 수치적 산란해석에서 인위적 반사를 줄이기 위해서는 유한요소와 IWEE의 연결을 유연하게 하기 위하여 유한요소는 잘게 나누거나 이차요소를 사용하는 것이 좋으며 IWEE에서는 고차를 사용하는 것이 바람직하다.

ABSTRACT

In this paper, numerical scattering analysis for submerged scatterers is performed using finite and infinite elements. Unbounded domain is truncated into finite domain and finite elements are used in the domain. Infinite elements, So called Infinite Wave Envelope Elements (IWEE) which possess wave-like behavior, are used to take into account the infinite domain on the truncated boundary. Scattering from rigid sphere is taken as an example and the effects of the order and mesh size of finite elements, size of finite element model and the order of IWEE are investigated. Quadratic finite element, refined mesh and higher order IWEE are recommended to improve the non-reflection boundary condition in the numerical scattering analysis.

I. 서 론

파동의 산란문제는 소나, 잠수함 등의 수중 음향을 비롯해서 지진학, 초음파 비파괴검사 그리고 초음파 의료 진단 등의 광범위한 영역에서 발생하는 문제로서 이에 대한 많은 연구가 지난 30여년간 있었다. 무한 영역에 놓인 유한한 물체에 의한 산란은 Helmholtz 적분 방정식으로 표현되며 원기둥이나 구형체와 같은 산란체에 대해서는 이론적인 해석이 가능하다. 그러나 산란체의 형태가 정형이 아닌 실제의 경우에 이론적인 해석을 적용하기에는 한계가 있으므로 컴퓨터를 이용한 수치적 해석 방법들이 연구되기 시작하였다. 대표적인 수치적 해석 방법에는 경계 요소법(BEM), 경계 적분 방정식법(BIEM), 유한 요소법(FEM), T-matrix법등과 같이 다양한 방법들이 있다.

산란문제를 해석하는 일반적인 방법으로 경계요소법 혹은 경계적분 방정식법이 사용된다[1,2]. 이 방법은 지배 방정식을 Green함수를 사용하여 경계적분 방정식으로 만들어서 풀게 되는데 일반적으로는 해가 보장되지만 그 해의 유일성은 Neumann 경계조건 하에 산란체의 고유주파수와 파동수가 일치하지 않을 때에만 보장된다. 이렇게 유일성이 보장 안되는 주파수를 비균일 주파수(irregular frequency)라고 하는데, 다시 말하면 비균일 주파수에서 해석 결과가 맞지 않는 문제가 발생한다. 이에 대한 해결책으로는 Burton과 Miller등에 의하여 제안된 CONDOR(Composite Outward Normal Derivative Overlap Relation)방법과[3] Schenck에 의해서 제안된 CHIEF (Combined Helmholtz Integral Equation Formulation)방법[4] 등이 있다. 일반적으로는 CHIEF방법이 많이 사용되는데 이 방법은 구조물 안에 임의의 위치에 압력이 영인 점을 선정함으로써 Helmholtz방정식의 고유해를 보장하는 방법이다. 그러나, 이러한 방법으로 비균일 주파수 문제를 처리하는데 한계

* 인하대학교 기계공학과

** 인하대학교 대학원

접수일자: 1999년 10월 22일

가 있다. 해석 주파수가 높아지게 되면 해석모델의 고유모드가 많아지므로 비균일 주파수가 많아져서 효과적이지 못하다.

경계적분 표현식에서 Extinction theorem은 산란체에 의해서 점유된 공간 내에서 입사장은 산란장을 생성하는 산란체 표면의 같은 음원들에 의해서 정확하게 소거된다는 의미를 갖고있다. 즉, 산란체가 점유한 공간 내에서는 입사장이 없다는 것을 나타낸다. 이 정리는 Waterman에 의해서 그 장점이 재조명되었으며 Extended Boundary Condition (EBC)이라고 불리어진다[5]. 첫번째는 이 방법은 산란체 표면에서 속도장과 그 미분치에 비균일 주파수에 의해서 오차가 발생하는 것을 막아주는 것이고 다음으로는 EBC는 경계면에서의 특이 적분식들을 비특이(nonsingular)인 무한개의 식들로 변형시키게 된다는 것이다. 이러한 이점이 산란문제를 해석하는 한 기법을 이루었는데 일명 Waterman기법[6], T-matrix법[7] Null-field법 또는 EBC method이라고 불리운다. 이렇게 T-matrix법은 비균일 주파수의 영향을 소거할 수 있는 장점이 있는 반면에 불규칙한 산란체에 대해서는 해석을 할 수가 없다. 따라서 비정규적 형상의 산란체 주위는 유한요소법(FEM)을 사용하고 그 외부는 T-matrix법을 이용하는 hybrid기법이 개발되기도 하였다[8]. 그리고 탄성체 산란체의 경우에는 유한요소법을 구조해석에 사용하여 T-matrix법과 연결시킬 수 있다.

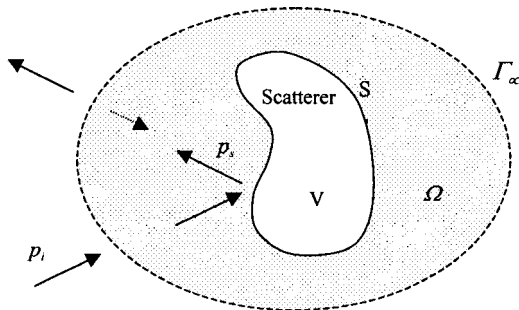


그림 1. 인위적 경계로 무한영역으로부터 나누어진 유한영역
Fig. 1. Finite domain truncated from unbounded domain using artificial boundary.

유한요소법을 이용한 방법은 무한영역에 산란체가 있을 때 산란을 해석하기 위해 무한 영역을 유한한 해석영역으로 나누기 위해 인위적 경계 Γ_∞ 를 설정하게 된다 (Fig. 1). 입사파 p_i 가 산란체에 입사되면 산란파 p_s 가 생기게 되고 p_s 가 인위적 경계면을 만나면 경계면에서 영역의 단절로 인하여 인위적 반사(artificial reflection)가 발생하게 된다. 따라서 이 경계면에서 인위적 반사가 생기지 않게 하기 위해 비반사 경계조건(Non-Reflecting Boundary Condition, NRBC)을 만들어 주어야 된다. 이러한 NRBC를 이루기 위한 연구가 지난 20년간 있어왔다. 비반사 조건은 기본적으로 Sommerfeld 방사조건을 만족시키는 것

으로서 여러 가지 방법이 있다[9]. 흡수경계조건(Absorbing Boundary Condition, ABC)은 Sommerfeld 방사조건을 원 음장에서 근음장으로 일치시키되 근사화로 인한 오차와 반사를 적게 한 것이다[10]. ABC의 대표적인 예로서 Engquist와 Majda는 pseudo-differential 연산자 이론을 사용하여 완전한 ABC를 유도하였다 [11]. 그리고 이 완전한 비국부적인 경계조건을 국부적인 ABC로 근사화하는 방법을 개발하였다. 여기서 국부적(local) ABC란 모두 근사화된 것으로서 소거된 영역을 근사적으로 다룬다. 비국부적(nonlocal)이란 경계면의 모든 점에서 해가 연성되어 있는 것을 말하며 따라서 형태가 복잡해지지만 대개 정확하고 해석영역이 작더라도 좋은 결과를 준다. 또 다른 예로서 Bayliss와 Turkel은 BGT 연산자라고 명명하는 국부적 미분 연산자의 시리즈를 유도하였다 [12]. 일반적으로 이러한 국부적 미분 연산자들은 산란체가 작을 때는 잘 맞지만 클 때는 그렇지 못하다. 최근에 DtN (Dirichlet-to-Neumann)이라는 일종의 완전한 비국부적 NRBC가 발표되었다[13]. 무한영역의 해로부터 인위적 경계면에서 속도장과 그 미분치의 관계를 한 것을 DtN map이라고 칭하며 이것을 유한요소의 경계조건으로 사용한다. 이론적으로 이 경계조건은 무한개의 항으로 표시되며 유일 해를 주지만, 그러나 DtN 조건을 실제 수행과정을 위해 이산화시키면 특성주파수에서 유일성이 깨지게 된다. DtN이나 NRBC는 앞으로 산란문제에 대해서 자세히 연구되어질 필요가 있다.

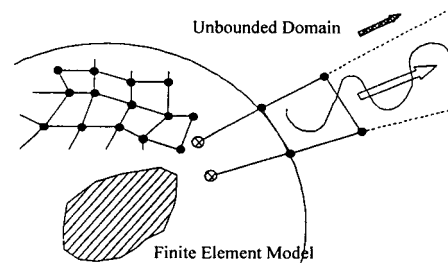


그림 2. 무한 요소 (IWEE)
Fig. 2. Infinite Wave Envelope Element.

또 다른 방법으로 경계면 외부의 영역을 무한요소(infinite element)를 사용하는 방법이다[14]. 무한요소는 산란파 또는 방사파의 원음장 특성을 나타내는 형상함수를 사용한 반무한 격자이다. 무한요소 중에서도 특히, 파동의 성질을 추가한 IWEE (Infinite Wave Envelope Element)를 사용하여 방사문제 및 산란문제를 해석한 예가 있다 [15]. IWEE가 기존의 무한요소와 다른 점은 크게 세 가지로 나눌 수 있다. 첫째는 실 좌표계에서 무한영역으로 사상되는 사상함수(Mapping Function)이고 둘째는 외부로 전파되어 나아가는 파동의 특성과 거리에 따라 음장의 크기가 감소하는 특성을 나타내는 형상함수(Shape Function)이고 셋째는 가중함수(Weighting Function)이다. IWEE는

일반적인 무한요소보다 파동의 성질이 추가되었으므로 비교적 높은 주파수까지 좋은 결과를 보인다[16]. 그러나 산란문제의 해석에 있어서 IWEE의 차수 및 유한요소 모델의 크기 그리고 유한요소의 차수에 대한 영향이 조사된 바가 없었다. 더욱이 비균일 주파수에 대한 연구가 없었다. 따라서 본 연구에서는 IWEE에 대한 이론을 정리하고 유한요소와 IWEE를 사용하여 수중에서의 강체구를 모델링한 후 산란 해석을 하였으며 비균일 주파수의 영향에 대해 알아 보았다.

II. 무한 요소

무한 영역에서 산란 문제를 유한 영역으로 나타내어 계산하기 위한 방법이 IWEE를 사용하는 방법인데, 무한 요소에 대한 이론은 Bettess등에 의해 개발되었고 [17] Astley와 Coyette등에 의해 IWEE 이론으로 발전하였다 [15,16]. IWEE는 기존의 유한 요소와 결합하여 사용하는 데 유한요소의 바깥 경계면에 위치하게 된다. IWEE와 기존의 유한요소와 다른점은 크게 세 가지로 나눌 수 있다. 하나는 실 좌표계에서 무한 영역으로 상사되는 상사함수(mapping function)이고, 두 번째는 외부로 전파되어 나가는 파의 특성과 거리에 따라 음장의 크기가 감소하는 특성을 나타내고 있는 형상 함수(shape function), 마지막 하나는 가중함수(Weighting function)이다. 가중함수는 기존의 유한 요소가 형상 함수를 그대로 사용하는 반면 IWEE의 가중함수는 형상 함수의 공액 복소수를 취하게 된다.

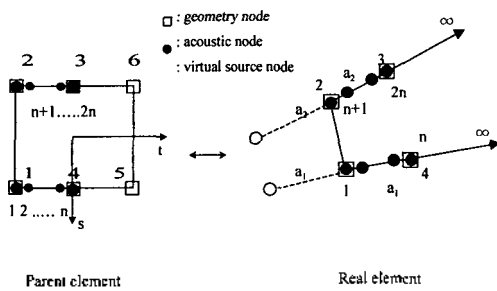


그림 3. 2차원 무한 기하 상사
Fig. 3. 2-D Infinite Geometry Mapping.

2.1. 무한 기하의 상사

Fig. 3은 2차원 영역에서 parent 요소와 real 요소사이의 상사관계를 나타내고 있다. Parent 요소의 절점1, 2는 유한요소와 IWEE의 경계면으로 상사되고 절점3,4는 각각 a1, a2만큼 떨어진 거리에 있는 절점으로 상사되는데 이는 가상 음원의 위치를 나타낸다. 그리고 마지막 절점 5, 6은 무한대로 상사되는데 이 점에서의 압력은 0이 된다. 예를 들어 2차원의 선형 IWEE인 경우에는 4개의 기하 절점(geometric node)과 절점1, 2에서의 형상 함수, 즉, 2개의 형상 함수만 필요하게 된다. 여기서 IWEE의 차수는 절점1, 4, 2와 절점3 사이에서 더 많은 음향 절점

(acoustic nodes)을 형성해 줌으로서 차수를 높일 수 있다. Fig. 3에서 보듯이 지역 좌표계의 t = -1, 0, 1이 전체 좌표계에서는 x = x1(x2), x4(x3), 로 각각 상사된다.

기하 절점의 상사함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M_1(s, t) = -\frac{k(1+s)}{1-t}, \quad M_2(s, t) = -\frac{k(1-s)}{1-t}$$

$$M_3(s, t) = -\frac{k(1+t)(1-s)}{2(1-t)}, \quad M_4(s, t) = -\frac{(1+t)(1+s)}{2(1-t)} \quad (1)$$

따라서 아래와 같은 상사가 성립하게 된다.

$$x(s, t) = \sum_{i=1}^4 M_i(s, t)x_i \quad (2)$$

$$y(s, t) = \sum_{i=1}^4 M_i(s, t)y_i$$

그리고 역 무한 사상(inverse infinite mapping)은 다음과 같이 된다.

$$t = 1 - 2\frac{a_i}{r} \quad (3)$$

따라서, $r = a \Rightarrow t = -1$ $r = \infty \Rightarrow t = 1$ 과 같은 관계가 성립된다.

2.2. 형상 함수(shape function)

IWEE의 형상 함수는 거리가 멀어질수록 크기가 감소하는 음장감소특성과 음장의 파동적 변화 특성을 함께 가지고 있다.

2.2.1. 음압 감소특성 (Amplitude Decay)

음압의 감소특성은 2차원 무한영역에서 Hankel함수를 따르므로 점근적으로 $1/\sqrt{r}$ 에 따라 음압이 감소하는 특성을 가져야 하고 3차원 문제에서는 $1/r$ 의 감소 특성을 가져야 한다. 먼저 3차원 문제의 감소특성을 살펴보면, parent 요소에서 음장 p의 유한 요소 다항 함수를 이용한 보간은 무한 기하학적 사상에 의해 real 요소에서 $1/r^n$ 로 전개된다. 이를 수식으로 표현하면

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n \quad (4)$$

$$\Downarrow$$

$$b_1(1/r) + b_2(1/r)^2 + \dots + b_n(1/r)^n$$

이 된다. 그러므로 방사 방향으로 n차 다항식 형상 함수를 이용하여 음장이 적당하게 감소하는 특성을 나타낼 수 있다. 여기서는 parent 요소에서 n차 다항식을 규정하는 방법으로 Lagrangian 다항식을 사용한다. n차 Lagrangian 다항식은 n개의 음향 절점에 의해서 결정되고 (n+1)번째의 음향 절점은 무한대에서 0의 값을 가지게 규정하고 있다. 방사 방향의 형상 함수를 Lagrangian 다항식을 이용해 표현하면 아래와 같다.

$$T_i^n(t) = \frac{\pi(t)}{\pi(t_i)(t-t_i)}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (5)$$

$$\text{여기서 } \pi(t) = \prod_{i=1}^{n+1} (t - t_i) \quad (6)$$

위에서 언급한 형상함수는 이미 말한 바와 같이 real 요소에서 $1/r$ 의 감소성을 가지고 있으므로 3차원 문제나 축대칭 문제에 적용이 가능하다.

2차원 문제에서는 Helmholtz 방정식의 해인 Hankel 함수, $H_0(kr)$, 값을 가져야 하므로 따라서 거리가 무한대로 갈수록 $\lim_{r \rightarrow \infty} H_0(kr) \cong (1/\sqrt{r})e^{kr}$ 의 감소성을 가져야 한다. 그러므로 2차원 문제에서는 형상함수에 \sqrt{r} 를 곱해 주어야 하는데 이는 parent 요소에서 $\sqrt{(1-t_i)/(1-t)}$ 를 곱해주는 것과 같다. 각도 방향의 형상함수, 즉 s 방향의 형상함수는 일반적인 형상함수를 사용한다. 예를 들어 Fig. 3과 같은 선형요소에서 각 변에 대해 다음과 같이 표현된다.

$$S_1(s) = \frac{1+s}{2}, \quad S_2(s) = \frac{1-s}{2} \quad (7)$$

2.2.2. 파동적 변화 특성(Wave-like variation)

무한 요소를 방사나 산란문제에 적용하려 할 때, 파동의 변화 특성을 나타내기 위해 $\exp(-ikr)$ 의 주기항을 형상함수에 포함시킨다. 그리고 기존 유한 요소와 무한 요소가 이어지는 경계면에서의 적합성을 위해 두 요소의 경계면 즉, $t = -1$ 에서 위상을 0으로 만들어 준다. 그러므로 지역 좌표계에서 파동 변화는 다음과 같이 나타내어진다.

$$e^{-ik(r-a)} = e^{-ik\mu(s,t)} = e^{-ika(s)(1+t)/(1-t)} \quad (8)$$

여기서 $\mu(s, t)$ 는 위상 함수이고 $a(s)$ 는 가상 음원의 위치를 나타낸 것으로서

$$a(s) = \frac{(1+s)}{2} a_1 + \frac{(1-s)}{2} a_2 \quad (9)$$

로 표현할 수 있고 이는 음장이 감소하는 정도를 나타낸다.

지금까지 설명한 음압 감소 특성과 파동적 변화 특성을 결합하여 무한 요소에 대한 형상 함수를 아래와 같이 나타내게 된다.

$$N_i^n(s, t) = T_i^n(t) S_1(s) e^{ik\mu(s, t)}, \quad 1 \leq i \leq n \text{ (edge1)} \quad (10)$$

$$N_{n+1}^n(s, t) = T_i^n(t) S_2(s) e^{ik\mu(s, t)}, \quad 1 \leq i \leq n \text{ (edge2)}$$

2.3. 가중함수 (Weighting function)

앞에서도 언급하였듯이 무한 요소에 대한 가중 함수인

경우, 기존 유한 요소가 형상 함수를 그대로 가중 함수로 사용하는 것과 달리 형상 함수의 공액 복소수를 취함으로써 나타내어 진다. 이렇게 공액 복소수를 취함으로써 IWBE의 강성 행렬이나 질량 행렬을 구할 때 지수항이 소거되어 계산의 양을 줄일 수 있다. 아울러 가중 인자로 $(a/r)^2$ 을 곱함으로써 다음과 같이 표현된다 (역 사상할 때 $((1-t)/2)^2$).

$$W^n(s, t) = G(t) N^n(s, t) = G(t) T_i^n(t) S(s) e^{ik\mu(s, t)} \quad (11)$$

여기서, 기하학적 가중 인자로 표현되는 $G(t)$ 는 지역 좌표계에서 아래와 같이 된다.

$$G(t) = \left(\frac{1-t}{2}\right)^2 \quad (12)$$

2.4. 요소행렬

가중 잔여 공식을 Helmholtz 방정식에 적용하면

$$\int_{\Omega} \nabla W_i \cdot \nabla p' dV - k^2 \int_{\Omega} W_i p' dV - \int_S W_i \frac{\partial p'}{\partial n} dS = 0 \quad (13)$$

여기서 p' 은 음장에 대한 시행 함수이고 W_i 는 가중 함수이다. 일반적으로 식 (13)의 면적분은 아래와 같이 두 부분으로 나눌 수 있다.

$$\int_S W_i \frac{\partial p'}{\partial n} dS = \int_{s_{\max}} W_i \frac{\partial p'}{\partial n} dS + \int_{s_{\min}} W_i \frac{\partial p'}{\partial n} dS \quad (14)$$

여기에 산란체와 무한 경계에 대한 경계조건을 대입하게 되면

$$\int_S W_i \frac{\partial p'}{\partial n} dS = -ipkc \int_{s_{\max}} W_i v dS - ik \int_{s_{\min}} W_i p' dS \quad (15)$$

과 같이 되고 두 번째 식은 형상함수에 의해 $p' \rightarrow 0, S_{\infty} \rightarrow \infty$ 이 되어 없어지게 된다. 따라서 다음과 같은 행렬식을 얻을 수 있다.

$$[[K] - \omega^2[M]](p) = (F) \quad (16)$$

여기서 각각의 요소 행렬들은 아래와 같다.

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \nabla W_i \cdot \nabla W_j dV, \quad M_{ij} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} W_i W_j dV \quad (17)$$

$$F_i = -is\omega \int_{s_{\max}} p W_i \bar{v} dS \quad (18)$$

위의 요소 행렬들은 변형된 Galerkin 방법을 사용함으로써 적분 시 복소 지수항들이 소거가 되고, $n+1$ 개의

Gauss-Legendre 적분 점을 사용하는 Gaussian quadrature 수치적분 방법을 사용한다. 아울러 변형된 Galekin 방법을 이용해 구한 강성행렬은 대칭행렬이 아니고 복소수 항을 포함하고 있게 된다.

2.4.1. 강성 행렬

앞에서 설명된 n 차 무한 요소의 형상함수와 가중함수를 이용해 강성 행렬을 표현하면 아래와 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 K_{ij} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial W_i^*}{\partial s} \frac{\partial W_j}{\partial s} \right) [J^{-1}] [J^{-1}] \left[\frac{\partial N_i^*}{\partial r} \right] \left[\frac{\partial N_j}{\partial r} \right] ds dt \\
 &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(G T_i^* \frac{dS_i}{ds} + ik G T_i^* \frac{d\mu}{ds} + \frac{dG}{dt} T_i^* S_i + G \frac{dT_i^*}{dt} S_i + ik G T_i^* S_i \frac{\partial \mu}{\partial r} \right) [J^{-1}] \\
 &\quad \times [J^{-1}] \left[\begin{matrix} T_i^* \frac{dS_i}{ds} - ik T_i^* S_i \frac{d\mu}{ds} \\ \frac{dT_i^*}{dt} S_i - ik T_i^* S_i \frac{\partial \mu}{\partial r} \end{matrix} \right] ds dt \quad (19)
 \end{aligned}$$

2.4.2. 질량 행렬

같은 방법으로 n 차 무한 요소의 질량 행렬을 나타내면 다음과 같다.

$$M_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{c^2} \{ G T_i^* S_i \} [J^{-1}] [J^{-1}] ds dt \quad (20)$$

III. 결과

3.1. IWEE 테스트

IWEE를 선형 요소에 대하여 프로그램을 작성하여 요소의 정확도를 테스트하였다. 프로그램에서는 2차원 음향 유한요소와 IWEE를 선형(1차) 요소에 대하여 지원할 수 있도록 하였고 음향 유체는 음압을 변수로 사용하였다.

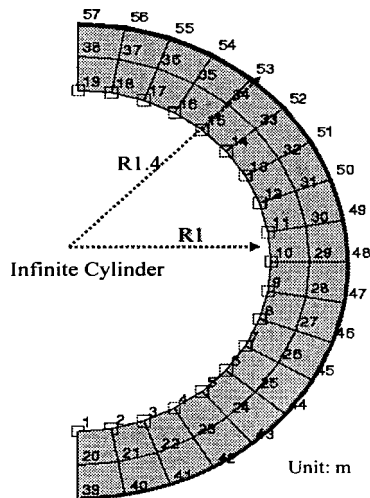


그림 4. 무한 실린더의 방사문제
Fig. 4. Radiation problem of Infinite Cylinder.

IWEE의 차수는 2부터 10까지 적용할 수 있도록 하였고 차수에 따른 음향 절점의 생성을 자동으로 되도록 하였다. 작성된 프로그램을 테스트하기 위하여 2차원 무한 실린더에 의한 방사해석을 수행하였다. Fig. 4는 2차원 무한 실린더를 대칭형이므로 절반만 모델링한 그림이다. 실린더의 반지름은 1m이고 반지름 1.4m인 인위적 경계로 유한 영역을 나누어서 경계 내부는 4절점 음향요소를, 경계 밖에는 4절점 IWEE를 사용하여 모델링 하였다.

실린더 내면에 1Pa의 일정한 음압이 100Hz로 작용할 때 방사되는 음압을 Fig.5에 나타내었다. 이 때 이론해는 $1/\sqrt{r}$ 의 값을 나타낸다. 반지름이 1m 부터 1.4m 까지 2개의 선형 유체 유한요소를 사용하였으므로 새 절점 값이 나타났으며 반지름이 2.8m일 때는 IWEE의 무한대에 해당하는 기하 절점 값이 나타났다. 차수가 5일 때는 기하학적 절점이 없는 3개의 음향 절점이 추가적으로 구해진 것을 알 수 있다. 이 결과로부터 IWEE가 이론해의 경향과 잘 일치하는 것을 알 수 있다. 참고로 상용해석 프로그램인 SYSNOISE의 결과와도 비교하였다.

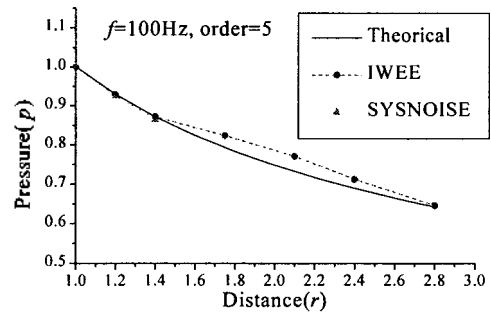
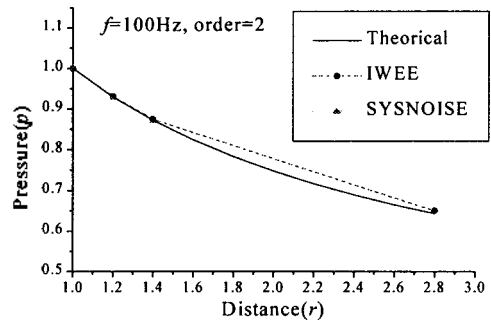


그림 5. 무한 실린더의 방사 음압
Fig. 5. Radiation pressure of infinite cylinder.

3.2. 강체구 산란 이론해

IWEE를 사용한 산란해석의 비교를 위하여 산란문제에서 가장 간단한 강체구에 의한 산란문제를 택하였다. 강체구에 대한 음의 산란해석은 이론적으로 많은 연구가 되어져 왔으며 그 결과는 다음과 같다[18].

$$\begin{aligned}
 p_{total} &= p_s + p_i \\
 &= p_i \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n p_n(\cos \theta) \left[j_n(ka) - \frac{j_n'(ka)h_n(ka)}{h_n'(ka)} \right]
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

여기서, p_s 는 입사파, p_i 는 산란파를 의미하고 pt 는 전체 음압을 나타낸다. Fig. 6은 반지름이 1m인 수중의 강체구에 대한 산란을 이론적으로 해석한 결과를 나타낸 것으로 역산란점(backscattered point)에서의 전체 음압을 나타낸 것이다.

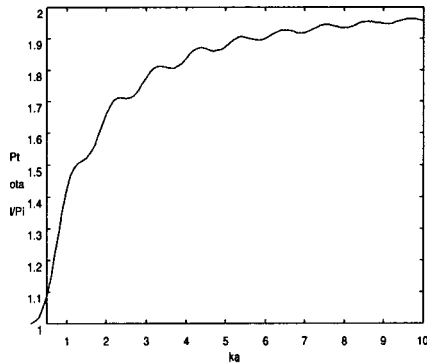


그림 6. 강체구 역산란점에서의 전체 음압
Fig. 6. Total pressure of rigid sphere at backscattered point.

3.3. IWEE를 사용한 강체구의 수치적 산란해석

앞에서 언급한 IWEE를 사용하여 강체구의 수치적 산란 해석을 수행하였다. 본 해석의 목적은 무한 요소의 차수와 유한 요소 크기에 따른 수치적 산란 해석의 오차에 대하여 살펴보고자 한다. 여기에 사용된 모델은 Fig.7과 같이 축대칭 조건을 사용하여 2차원으로 단순화하였다.

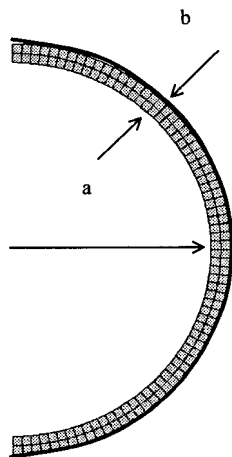


그림 7. 음향 유한요소 격자
Fig. 7. Acoustic finite element meshes.

산란체의 반지름 $a=1m$ 이고, 음향유체 요소를 사용하여 모델링한 영역의 크기를 나타내는 $b=0.1m$ 로 하였다. 음향유체 요소는 반지름 방향으로 2개, 원주 방향으로 72개를 사용하여 총 144개의 요소와 219개의 절점으로 유한요소 모델이 구성되어 있다. IWEE는 유한요소 모델의 바깥면을 둘러싸는 형식으로 사용되었다. 아울러 각각의 요소들은 물의 성질을 갖도록 물성치를 대입하였다. 입사파는 평면파가 작용하는 것으로 보았다. 수치적 산란해석은 IWEE를 테스트하기 위하여 개발한 프로그램에서 하기에 요소의 변화 및 차수의 변화에 불편한 점이 있어서 상용 프로그램인 SYSNOISE를 사용하였다. SYSNOISE에서는 IWEE를 같은 방법으로 사용하고 있으므로 수치적 산란해석에 있어서 IWEE의 영향을 살펴보는 데는 동일하다.

3.3.1. IWEE의 차수 변화에 따른 영향

Fig. 7의 모델에 대하여 SYSNOISE에서 적용시킬 수 있는 차수를 각각 2, 5, 8, 10까지 변화 시켜가면서 역산란점에서의 압력을 계산하였다. Fig. 8에서 보는 바와 같이 저주파에서는 이론해와 근사한 결과를 보이지만 주파수가 높아질수록 파장 당 절점수가 작아짐에 따라 이산오차(dispersion error)가 확대됨을 볼 수 있다.

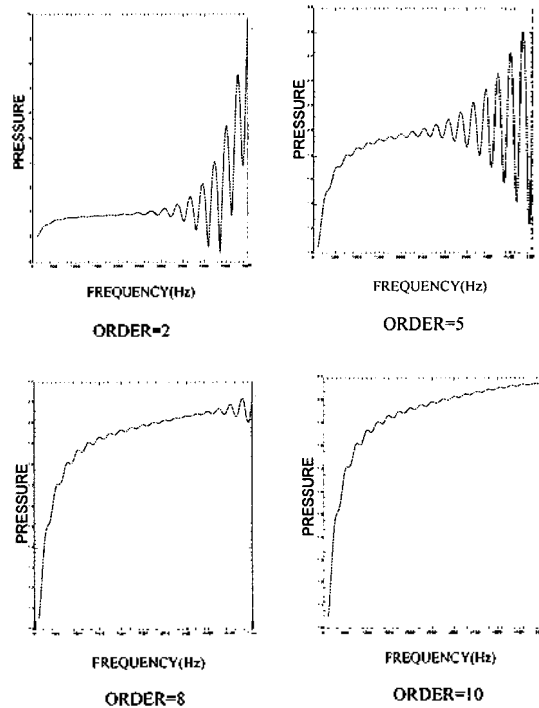


그림 8. 무한요소의 차수에 따른 역산란점에서의 음압
Fig. 8. Pressure at backscattered point with various order of infinite element.

IWEE의 차수를 높여줌에 따라 IWEE의 파동효과에 의해 이산 오차는 줄지만 해석 결과는 이론해와 차이를 보인다. 산란의 수치적 해석에서 이산오차는 한 파장 당 선형요

소를 10개 이상 사용했을 때 10%미만이 되는 것으로 알려져 있다[19]. 이 규칙에 따르면 현재의 요소 크기로는 2900Hz를 넘어가면 정확한 값을 기대할 수 없다. 따라서 IWEE의 차수가 2일 때는 3000Hz를 넘어서면 이산오차가 발생함을 알 수 있다. 그러나 흥미로운 일은 고차의 IWEE를 사용하면 이 규칙과는 다르게 이산오차가 줄어들는 것이다. 이것은 IWEE의 파동효과를 잘 묘사하는 성질 때문인 것으로 사료된다.

3.3.3 유한요소 모델의 크기에 따른 영향

유한요소모델 영역의 크기에 따른 영향을 보기 위하여 Fig. 7 유한요소 모델의 반경방향 길이, b 를 변화 시켜 보았다. 요소 수나 절점 수에는 변화가 없고 모델 크기를 변화시켰다. 이 때, IWEE의 차수는 앞에서 가장 좋은 결과를 보인 10으로 놓았다. Fig. 9에서 보는 바와 같이 기존 유한 요소모델이 커짐에 따라 전체 음압에 공진이 발생하는 현상을 볼 수 있다. $b=0.2$ 일 때는 공진 주파수가 5000Hz를 넘어서 잘 보이지 않지만, 예를 들어 b 가 0.5m 인 경우 약 2800Hz에서 공진이 발생하는데 이 주파수는 파장 길이가 유한 요소모델 크기에 해당하는 주파수에 해당한다. 이를 수식으로 표현하면

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2a} = \frac{1450}{0.5} = 2900\text{Hz} \quad (22)$$

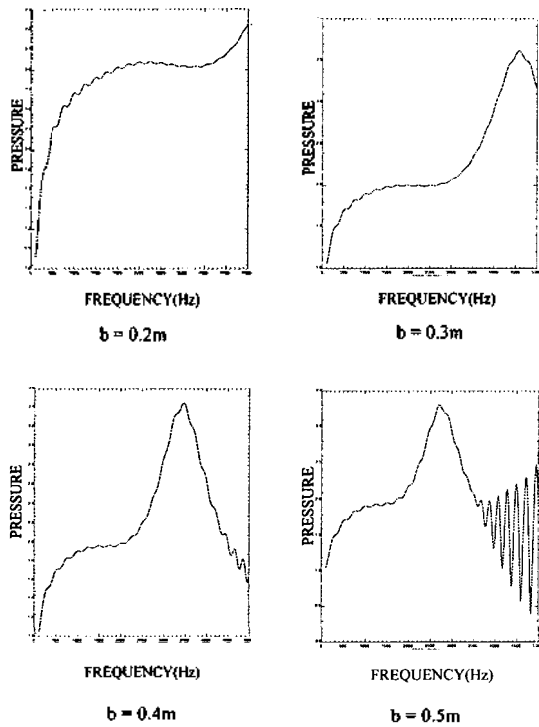


그림 9. 유한요소 모델 차수에 따른 역산란점에서의 음압 (차수=10)

Fig. 9. Pressure at backscattered point with various size of finite element model(order=10).

여기서 c 는 물의 음속으로 1450m/sec이다. 따라서 계산 결과와 같이 2900Hz대에서 비균일 주파수가 발생함을 알 수 있다 (Fig. 9). 이것은 IWEE를 사용했을 때 완전한 비반사 조건이 만족되지 않기 때문이다. 따라서 IWEE를 사용하더라도 비균일 주파수에 대한 신중한 고려가 있어야 한다.

3.3.4. 유한요소 격자 정련(mesh refinement) 및 차수에 따른 영향

지금까지는 유한요소의 개수 및 절점 수를 고정시키고 모델의 크기를 바꿈에 따라 유한요소 격자가 일정하지 않았다. 격자 정련의 영향을 살펴보기 위하여 $b=0.4$ m로 모델 크기를 고정하고 반면에 선형 유한요소를 반경방향으로 4개를 생성하여 더 많은 요소를 만들었다. 이때 IWEE의 차수는 10으로 고정하였다. Fig. 10은 해석결과로서 $b=0.4$ m 일 때의 비균일 주파수인 3500Hz부근에서 압력의 피크가 미약하게 나타남을 알 수 있다.

다음으로 유한요소의 차수를 일차(선형)에서 이차로 올려서 사용하였다. 즉, 8절점 이차 유한요소를 모델영역에서 사용하였고 바깥쪽에는 이차 유한요소와 호환성이 있는 IWEE를 사용하였다. IWEE의 차수는 역시 10을 사용하였다. 이차 요소를 사용한 해석 결과가 Fig. 11에 나타나 있다. 3500Hz 부근에서 공진이 사라진 반면에 또 다른 공진이 5000Hz를 넘어서 존재하는 것을 알 수 있다.

선형 요소를 정련했을 때 해석결과가 좋아진 이유는 IWEE에서는 고차를 사용하고 유한요소 모델 쪽에는 낮은 차수를 사용 함으로서 발생하는 IWEE와 유한요소 모델 간의 연속성 문제 때문인 것으로 판단된다. 다시 말해 선형 유한 요소 내에서는 압력이 직선적으로 변하나 유한요소를 정련함으로써 압력이 유한요소 영역에서 보다 연속적이 되어 IWEE쪽과 잘 이어지기 때문이다. 이 사실은 이차 유한요소를 사용한 결과에서 분명하여진다. 이차 유한요소를 사용하면 압력이 유한요소영역에서 이차적으로 연속이 되므로 IWEE 측 압력과 매끄럽게 연결이 된다. 따라서 IWEE에 의한 비반사조건이 IWEE와 유한요소 모델의 경계면에서 이루어져서 비균일 주파수에서 인위적인 반사가 줄어들었다.

그러나 5000Hz를 넘어서면 또 다른 공진이 발생하는데, 아마도 IWEE의 특성에 기인한 것으로 사료되며 이에 대한 자세한 연구가 필요하다. 그럼에도 불구하고 위의 결과들에서 결론지을 수 있는 것은 첫번째 비균일 주파수를 넘어 3500Hz까지는 이차 유한요소와 고차의 IWEE를 사용하면 산란을 비교적 정확하게 수치적으로 해석할 수 있다. 이 주파수는 $ka=30$ 에 해당하는 아주 높은 주파수이다. 두 번째로는 유한요소 모델의 크기를 주의해서 잡는다면 해석하고자 하는 주파수 내에 비균일 주파수가 발생하지 않도록 할 수 있다. 즉, 유한요소와 IWEE를 사용한 수치적 산란해석에서는 유한요소모델의 크기를 조심스럽게 결정해야 한다.

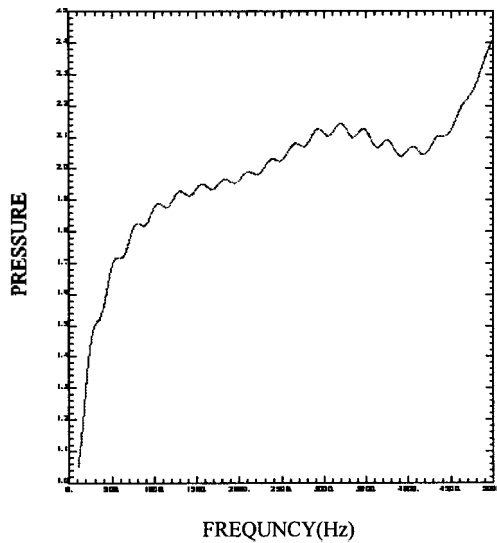


그림 10. 정련된 격자일 때 역산란점의 음압
Fig. 10. Pressure at backscattered point for refined mesh.

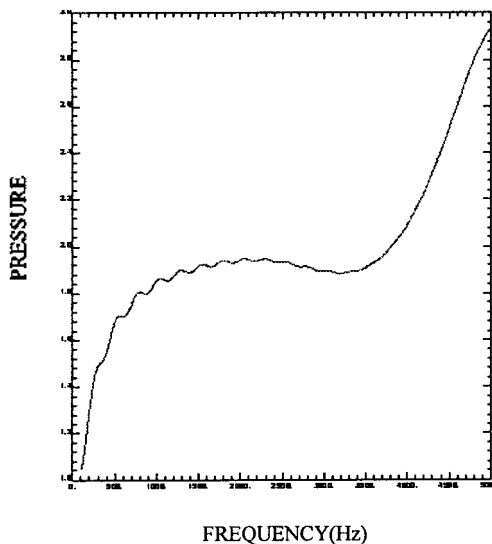


그림 11. 이차 유한요소일 때 역산란점의 음압
Fig. 11. Pressure at backscattered point for quadratic finite element.

IV. 결 론

수중 산란해석을 위한 수치적 방법 중 유한요소와 무한요소를 사용한 방법에 대해 알아 보았고 무한요소 중 파동의 특성을 가미한 IWEE 사용 시 비균일 주파수에 대한 영향을 살펴보았다. 무한 요소를 사용하더라도 인위적 반사에 의한 비균일 주파수에 대한 영향을 수치적으로 완벽하게 제거 하기는 쉽지 않지만 해석의 정확성을 위해서는 몇 가지 사항을 고려해야 함을 알 수 있었다.

첫째로 산란 해석에서 인위적인 반사를 줄이기 위해서는 유한요소와 IWEE의 연결을 유연하게 하기 위하여 유

한요소는 잘게 나누거나 이차요소를 사용하는 것이 좋으며 IWEE에서는 고차를 사용하는 것이 바람직하다.

둘째로 유한요소 모델 크기의 결정은 세심한 주의가 필요하다. 산란체를 포함하는 유한요소 모델의 크기를 가급적 작게 잡아서 비균일 주파수를 높인다면 산란해석을 원하는 주파수 구간에 비균일 주파수가 없도록 할 수 있다. 설령 있다 하더라도 IWEE를 사용하여 그 영향을 해석 주파수 대역 내에서 제거할 수 있다.

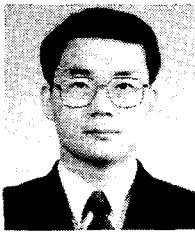
앞으로 비반사 조건을 보다 정확하게 만족시키는 무한 요소에 대해 좀더 깊은 연구를 함으로써 고주파 영역에서의 산란 모델링을 용이하게 하는 것이 필요하다.

참 고 문 헌

1. D.T. Wilton, "Acoustic Radiation and Scattering from Elastic Structures," *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, 13, 123-138, 1978.
2. C.A. Brebbia, J.F.C. Telles and L.C. Wrobel, *Boundary Element Techniques*, (Springer-Verlag, New York 1984) Ch.10.
3. A.J. Burton and G.F. Miller "The Application of Integral Equation Methods to the Numerical Solution of Some Exterior Boundary Value Problems," *Proc. R. Soc. London, Series A323*, 201~210, 1971.
4. H.A. Schenck, "Improved integral formulation for acoustic radiation problems," *J. Acoust. Soc. Am.* 44(1), 41~58, 1968.
5. P.C. Waterman, "Matrix Formulation of Electromagnetic Scattering," *Proc. IEEE*, 53, 805-812, 1965.
6. P.C. Waterman, "New Formulation of Acoustic Scattering," *J. Acoust. Soc. Am.*, 45, 1417-1429, 1969.
7. V.K. Varadan, V.V. Varadan, L.R. Dragonette and L. Flax, "Computation of rigid body scattering by prolate spheroids using T-matrix approach," *J. Acoust. Soc. Am.*, 71(1), 22-25, 1982.
8. V.V. Varadan, K. Eswaran and V.K. Varadan, "A Hybrid FEM-T-Matrix Technique for the Analysis of Acoustic Wave Scattering by Elastic Shells of Revolution," *J. Wave Material Interaction*, 1, 237-250, 1986.
9. D. Givoli, *Numerical Methods for Problems in Infinite Domains*, (Elsevier, New York, 1992), Ch.3.
10. C.I. Goldstein, "A Finite Element Method for Solving Helmholtz Type Equations in Waveguide and Other Unbounded Domains," *Math. Comput.*, 39(160), 309-324, 1982.
11. B. Engquist and A. Majda, "Absorbing Boundary Conditions for the Numerical Simulation of Waves," *Math. Comput.*, 31(139), 625~651, 1977.
12. A. Bayliss, M. Gunzburger and Eli Turkel, "Boundary Conditions for the Numerical Solution of Elliptic Equations in Exterior Regions," *SIAM J. Appl. Math.*, 42(2), 430~451, 1982.
13. D. Givoli and J.B. Keller, "Non-reflecting Boundary Conditions for Elastic Waves," *Wave Motion*, 12, 261~279, 1990.

- Vibration*, 171(4), pp.483-508, 1994.
16. R.J. Astley, G.J. Macaulay and J.P. Coyette, "Mapped Wave Envelope Elements for Acoustical Radiation and Scattering," *J. Sound and Vibration*, 170(1), 97-118, 1994.
 17. O.C. Zienkiewicz, K. Banedo, P. Bettess, C. Emson, T.C. Chiam, "Mapped Infinite Elements for Exterior Wave Problems," *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, 21, 1229-1251, 1985.
 18. J.J. Faran, "Sound Scattering by Solid Cylinders and Spheres," *J. Acoust. Soc. Am.*, 23(4), 405-418, 1951.
 19. Jae-Hwan Kim, "Effects of Drilling Degrees of Freedom in the Finite Element Modeling of P-and SV-wave Scattering Problems," *The Journal of the Acoustical Society of Korea*, 18(1E), 37-43, 1999.

▲김 재 환(Jaehwan Kim)



1985년 2월 : 인하대학교 기계공학과
(공학사)

1987년 2월 : 한국과학기술원 기계공
학과(공학석사)

1995년 12월 : 미국 Pennsylvania 주립
대학교 Engineering Science
& Mechanics(ph.d)

1996년 3월 ~ 현재 : 인하대학교 기계
공학과 조교수

※ 주관심분야 : 지능 구조물의 유한요소 모델링 및 설계,
소나의 유한요소 해석, 지능 패널 및 압전
모터

▲김 세 환(Se-Hwan Kim)

1997년 2월 : 인하대학교 선박해양공학과(공학사)

1999년 8월 : 인하대학교 기계공학과(공학석사)

※ 주관심분야 : 수중음향, 산란해석