Comm. Korean Math. Soc. **15** (2000), No. 1, pp. 111–121

유클리드 기하학

김 홍 종

ABSTRACT. 유클리드 공간의 정의와 평행이동 및 벡터의 성질을 현대적인 관점에서 살펴본다. 또 이를 이용하여 아핀 공간을 정의한다.

1. 머리글

유클리드 평면 또는 유클리드 공간은 오랜 세월 동안 인류가 살며 공부하고 생각하여 온 기본적인 중요한 개념임에도 불구하고 그것의 정의를 쉽게 내리지 못한 것 또한 사실이다. 피타고라스 학파가 신봉하던 통약성이 진실이 아님이 밝혀지자 그리이스의 수학은 논리를 강조할 수밖에 없었다. 기원전 300년경의 유클리드 시절에는 점, 직선 또는 원 등의 개념에서 출발하여 그것들의 관계를 서술하는 공리적인 방법으로 평면과 공간을 이해하였고 ([5,1]), 이러한 공리적인 입장은 실수체계가 완성된 20세기 초에도 힐베르트 등의 학자가 취하였다 ([6]). 기하학을 공리적인 관점에서 바라보는 것은 사고의 전환에 많은 발전을 기여하여 사영기하학, 비유클리드 기하학, 유한기하학 등의 발전에 기여한 것이 사실이지만, 이러한 관점은 기하학을 건조하게 만들고 논리학의 일부로 보는 오해를 일으키기도 한다.

현대적인 기하학책에서는 유클리드 공간을 다음과 같이 정의하고 있다 ([2, p. 202]): 어떤 내적공간이 단순 추이적으로 작용하는 집합을 유클리드 공간이라 한다.

이와 같은 정의가 바른 것은 사실이지만 마치 조그만 호두를 까기 위하여 커다란 망치를 사용하는 것과 같은 느낌을 떨칠 수 없다.

데카르트가 도입한 좌표계를 "폭력행위"라고 말하는 학자도 있고 ([10]), 심지어 유클리드 공간과 데카르트 공간을 "천사와 악마"에까지 비유하는 학자도 있다 ([3]). 하지만 우리는 데카르트가 유클리드 공간을 이해한 방법을 이용하여 ([4]) 유클리드 공간을 정의하고 이러한 정의에서 어떻게 "평행이동"과 "벡

Received April 23, 1999. Revised July 22, 1999.
1991 Mathematics Subject Classification: 51-01.
Key words and phrases: 유클리드 공간, 데카르트 공간, 아핀 공간.
이 연구는 서울대학교 발전기금의 지원으로 이루어졌음.

터"를 유도하는 지를 설명하기로 한다. 이와 같은 해석은 1997년 9월 17일에 발견되었다.

이 글에서 새로운 결과를 보여주는 것은 없지만 새로운 관점에서 출발하였고 이로부터 모든 것을 다 얻을 수 있다는 것을 강조하였다. 또 유클리드 공간의 이해를 통하여 아핀공간을 서술한다. 이와 같은 서술이 공리적이 아니며 자연스럽고 기하학적인 것으로 인식되길 바란다. 그리고 졸문을 평가하여 주신 심사위원에게 깊은 감사를 드린다.

2. 데카르트 공간과 유클리드 공간

우선 실수체 $\mathbb{R}$ 의 유한 곱집합인 $\mathbb{R}^n$ 을 데카르트 공간이라 부르기로 한다. 어떤 저자는 $\mathbb{R}^n$ 을 유클리드 공간이라 부르지만 ([8]) 우리는 이러한 오류를 피한다. 데카르트 공간은 임의의 두 점사이의 거리를 잴 수 있는 자연스러운 방법 $d_0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 이 주어진 거리공간이다:

$$d_0\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) := \left((x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2\right)^{1/2}.$$

앞으로 두 거리공간 사이에 거리를 보존하는 전단사 사상이 존재하면 이 사상을 **합동사상** 또는 **등장사상**이라 부르고, 이때 두 거리공간을 **합동**이라 부르기로 한다.

두 데카르트 공간 $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ 이 합동이면 $n = m$ 이고 이때 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 이 합동사상이면 어떤 직교행렬 f_* 와 $v := f\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ 에 대하여

$$f(p) = f_* p + v \qquad (p \in \mathbb{R}^n)$$

이다.

정의. 데카르트 공간과 합동인 거리공간을 **유클리드 공간**이라 한다.

유클리드 공간의 **차원**이란 그것과·합동인 데카르트 공간의 차원을 뜻한다. 두 데카르트 공간이 합동이면 이들의 차원이 같으므로 유클리드 공간의 차원은 잘 정의된다.

유클리드 공간 $(\mathbb{E}, d)$ 에서 데카르트 공간 $(\mathbb{R}^n, d_0)$ 으로 가는 합동사상 $x : (\mathbb{E}, d) \to (\mathbb{R}^n, d_0)$ 을 (데카르트) **좌표계**라 부르기로 한다. 좌표계가 주어진 유클리드 공간을 **좌표공간**이라 부른다.

유클리드 공간의 대표적인 보기로 데카르트 공간을 들 수 있지만, 유클리드 공간과 데카르트 공간의 차이는 전자에는 (좌표계가 존재하는 것은 사실이지만) 특정한 좌표계가 주어져 있지 않다는 것이다.

3. 평행이동

유클리드 공간 $(\mathbb{E}, d)$ 를 간단히 $\mathbb{E}$ 로 나타내기로 한다. 유클리드 공간 $\mathbb{E}$ 에서 정의된 자기사상

$$T : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$$

가 다음 두 성질을 만족시키면 **평행이동사상**이라 부른다:

(i) T 가 합동사상이다.

(ii) **변위함수**

$$d_T : \mathbb{E} \to \mathbb{R}, \qquad p \mapsto d(p, T(p))$$

가 상수함수이다.

항등사상이 평행이동사상이고, 평행이동사상의 역사상도 여전히 평행이동사상임은 분명하다. 평행이동사상의 정의에서 부동점을 가지는 것은 항등사상뿐이고 다른 평행이동사상은 부동점을 가지지 않음을 알 수 있다.

도움정리 1. 데카르트 공간 $\mathbb{R}^n$ 에서 주어진 점 $v \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여 사상

$$p \mapsto p + v \qquad (p \in \mathbb{R}^n)$$

는 평행이동사상이다. 역으로 사상 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 이 평행이동사상이면

$$T(p) = p + v \qquad (p \in \mathbb{R}^n)$$

를 만족시키는 $v \in \mathbb{R}^n$ 이 오직 하나 존재한다.

증명. 이 정리의 증명은 $\mathbb{R}^n$ 의 등장변환군을 이해하면 바로 얻는다. 처음 명제는 자명하므로 두번째 명제만을 살펴본다. 만약 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 이 합동사상이면

$$T(p) = Ap + v \qquad (p \in \mathbb{R}^n)$$

인 직교행렬 $A \in \mathrm{O}_n$ 과 $v \in \mathbb{R}^n$ 이 오직 한쌍 존재한다. 우리는 항등행렬을 I 로 두기로 한다. 이제 변위함수

$$d_T(p) = |T(p) - p| = |(A - I)p + v|$$

가 상수함수이면 임의의 $p \in \mathbb{R}^n$ 과 임의의 양수 t 에 대하여

$$d_T(p) = d_T(tp) = |(A-I)(tp)+v| = t\left|(A-I)p + \frac{1}{t}v\right|$$

가 상수이다. 이제 t 를 무한대로 보내면, 임의의 $p \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여 $(A-I)p = 0$ 임을 안다. 즉, $A = I$ 이고

$$T(p) = p + v$$

이다. □

도움정리 2. 만약 $T_1, T_2 : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ 가 평행이동사상이면, $T_1 \circ T_2$ 도 평행이동사상이고

$$T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$$

이다.

증명. 이러한 정리의 증명은 여러가지로 생각할 수 있지만 손쉬운 방법 중의 하나가 좌표계를 도입하는 것이다. 우선 이 정리가 데카르트 공간의 경우는 도움정리 1 로부터 자명함을 안다. 일반적인 유클리드 공간 $\mathbb{E}$ 의 경우는 합동사상(즉, $\mathbb{E}$ 의 좌표계) $x : \mathbb{E} \to \mathbb{R}^n$ 을 하나 도입하면 사상

$$x \circ T_1 \circ x^{-1},\ x \circ T_2 \circ x^{-1}\ :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

이 모두 평행이동사상이고 이들의 합성 $x \circ T_1 \circ T_2 \circ x^{-1}$ 가 $\mathbb{R}^n$ 의 평행이동사상이다. 따라서 $T_1 \circ T_2$ 도 $\mathbb{E}$ 의 평행이동사상이다. 한편 $\mathbb{R}^n$ 의 평행이동사상들이 서로 교환가능하므로 처음에 주어진 T_1, T_2 가 서로 교환가능함을 안다. □

앞으로 유클리드 공간 $\mathbb{E}$ 의 평행이동 사상 전체의 집합을 $\mathcal{T}(\mathbb{E})$ 로 쓰기로 한다. 이 집합이 항등사상을 포함하고, 역변환과 합성에 대하여 닫혀 있으므로 $\mathcal{T}(\mathbb{E})$ 는 가환군이다. 이제 실수체 $\mathbb{R}$ 이 **평행이동군** $\mathcal{T}(\mathbb{E})$ 에 어떻게 작용하는가를 설명하면 $\mathcal{T}(\mathbb{E})$ 가 선형공간(linear space, vector space)임을 안다.

우선 위 정리의 증명에서 평행이동사상 $T : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ 가 좌표계 $x : \mathbb{E} \to \mathbb{R}^n$ 에 의하여 $\mathbb{R}^n$ 의 평행이동사상 $x \circ T \circ x^{-1}$ 을 만들고 따라서 도움정리 1 에 의하여

$$x \circ T \circ x^{-1}(q) = q + v \qquad (q \in \mathbb{R}^n)$$

가 성립하는 점 $v \in \mathbb{R}^n$ 이 존재한다. 앞으로 이 점 v 를 $x_*(T)$ 로 쓰기로 한다.[1] 그러면

$$(1) \qquad x(T(p)) = x(p) + x_*(T) \qquad (p \in \mathbb{E})$$

임을 안다. 사상

$$(2) \qquad x_* : \mathcal{T}(\mathbb{E}) \to \mathbb{R}^n$$

이 가환군 사이의 동형임을 쉽게 알 수 있다.

$\mathbb{R}^n$ 의 등장변환 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 에 대하여 f 는 "선형부분" $f_* \in \mathrm{O}_n$ 과 평행이동 $v \in \mathbb{R}^n$ 의 합성이다: $f = f_* + v$. 그러므로 임의의 $q, w \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여 $f(q+w) = f(q) + f_*(w)$ 임은 자명하다.

도움정리 3. 유클리드 공간 $\mathbb{E}$ 의 두 좌표계 $x, y : \mathbb{E} \to \mathbb{R}^n$ 에 대하여 등장변환 $xy^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 의 선형부분을 $(xy^{-1})_*$ 라 하면

$$x_* = (xy^{-1})_* y_* : \mathcal{T}(\mathbb{E}) \to \mathbb{R}^n$$

이다.

증명. 임의의 $p \in \mathbb{E}$ 와 $T \in \mathcal{T}(\mathbb{E})$ 에 대하여

$$\begin{aligned} x(p) + x_*(T) &= x(T(p)) = (xy^{-1})(y(T(p))) \\ &= (xy^{-1})(y(p) + y_*(T)) \\ &= (xy^{-1})(y(p)) + (xy^{-1})_* y_*(T) \\ &= x(p) + (xy^{-1})_* y_*(T) \end{aligned}$$

이므로 원하는 결론을 얻는다. □

이제 실수 t 와 평행이동사상 $T : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ 에 대하여 T 를 t 배한 평행이동사상 T^t 는 다음과 같이 정의한다:

$$T^t := {x_*}^{-1}(t x_*(T)).$$

즉, 사상 (2) 가 선형사상이 되도록 상수곱을 정의한다. 도움정리 3 덕분으로 이러한 정의가 좌표계 $x : \mathbb{E} \to \mathbb{R}^n$ 의 선택과 상관없이 일정함을 쉽게 알 수 있다.

이제 $\mathcal{T}(\mathbb{E})$ 는 선형공간이다.

---

[1] 이러한 기호를 사용하는 이유는 $\mathbb{E}$ 의 각 점에서 사상 $x : \mathbb{E} \to \mathbb{R}^n$ 의 미분이 $x_* : \mathcal{T}(\mathbb{E}) \to \mathbb{R}^n$ 과 같기 때문이다.

도움정리 4. 유클리드 공간 $\mathbb{E}$ 의 두 평행이동사상 T_1, T_2 가 한 점에서 같으면 이들은 모든 점에서 같다.

증명. 두가지 증명을 살펴본다.

(1) 이 정리는 데카르트 공간의 경우는 자명하고, 일반적인 경우는 앞 정리의 증명처럼 좌표계를 도입하여 살펴보면 바로 안다.

(2) T_1, T_2 가 평행이동사상이면 도움정리 2 에서 $T_1^{-1} \circ T_2$ 도 평행이동사상이다. 만약 어떤 점 $p \in \mathbb{E}$ 에 대하여 $T_1(p) = T_2(p)$ 이면 점 p 가 $T_1^{-1} \circ T_2$ 의 부동점이고 따라서 $T_1^{-1} \circ T_2$ 가 항등사상임을 안다. 그러므로 $T_1 = T_2$ 이다. □

정의. 어떤 집합 $\mathbb{A}$ 가 거리함수 $d : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ 에 의하여 유클리드 공간이 되면 이 거리함수를 **유클리드 거리함수**라 부른다.

주목할 만한 사실은 유클리드 공간 $(\mathbb{E}, d)$ 에서 평행이동사상은 처음에 주어진 거리함수 d 대신 다른 유클리드 거리함수에 대하여도 평행이동사상이다. 이 사실은 다음 정리에서 바로 얻는다.

도움정리 5. 데카르트 공간 $\mathbb{R}^n$ 에서 d_1, d_2 가 유클리드 거리함수이면 임의의 등장사상

$$f : (\mathbb{R}^n, d_1) \to (\mathbb{R}^n, d_2)$$

는 선형사상 $f_* \in \mathrm{GL}_n$ 과 평행이동 $v \in \mathbb{R}^n$ 의 합성이다:

$$f(p) = f_*(p) + v \qquad (p \in \mathbb{R}^n).$$

따라서 평행이동사상 전체의 공간 $\mathcal{T}(\mathbb{E})$ 는 유클리드 거리함수의 선택에 따라 변하지 않는 선형공간이다. 이러한 관찰이 나중에 아핀공간을 다룰 때 쓰인다.

4. 벡터

유클리드 공간 $\mathbb{E}$ 에서 순서쌍들의 집합

$$\mathbb{E} \times \mathbb{E} = \{(p, q) \mid p, q \in \mathbb{E}\}$$

에 동등관계 $\sim$ 를 다음과 같이 도입한다:

$$(p, q) \sim (p', q') \quad \Leftrightarrow \quad \exists S \in \mathcal{T}(\mathbb{E}),\ S(p) = p',\ S(q) = q'.$$

앞으로 순서쌍 (p, q) 의 동등류를 **벡터**라 부르고 $\overrightarrow{pq}$ 또는 $q - p$ 로 나타내기로 한다. 또 벡터 전체의 집합을 $\overrightarrow{\mathbb{E}}$ 로 나타내기로 한다:

$$\overrightarrow{\mathbb{E}} := \mathbb{E} \times \mathbb{E} / \sim .$$

두 점 $p, q \in \mathbb{E}$ 로 이루어진 순서쌍 (p, q) 에 대하여

$$T(p) = q$$

인 평행이동사상 $T : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ 가 오직 한가지 존재한다. 이것은 좌표계 $x : \mathbb{E} \to \mathbb{R}^n$ 을 사용하여 데카르트 공간 $\mathbb{R}^n$ 에서 살펴보면 분명하게 알 수 있다. 앞으로 순서쌍 (p, q) 에 대응되는 평행이동사상을 $T_{(p,q)}$ 로 쓰기로 한다.

도움정리 6. 유클리드 공간에서 두 순서쌍 (p, q) 와 (p', q') 이 동등하면

$$T_{(p,q)} = T_{(p',q')}$$

이다.

증명. 우선 평행이동사상 S 를 택하여 $S(p) = p'$, $S(q) = q'$ 이 되도록 하자. 그러면 평행이동사상 $S \circ T_{(p,q)}$ 와 $T_{(p',q')} \circ S$ 가 점 p 에서 같고 따라서 도움정리 4 와 도움정리 2 에서

$$S \circ T_{(p,q)} = T_{(p',q')} \circ S = S \circ T_{(p',q')}$$

이다. 이로부터 $T_{(p,q)} = T_{(p',q')}$ 을 얻는다. □

이 정리 덕분으로 벡터 $\overrightarrow{pq}$ 에 대응되는 평행이동사상을

$$T_{\overrightarrow{pq}} := T_{(p,q)}$$

로 정의하는 것은 잘 정의된다.

또 벡터 $\mathbf{v} \in \overrightarrow{\mathbb{E}}$ 에 대하여

$$p + \mathbf{v} := T_{\mathbf{v}}(p) \qquad (p \in \mathbb{E})$$

로 쓰기로 한다. 이때 벡터 $\mathbf{w} \in \overrightarrow{\mathbb{E}}$ 에 대하여

$$(p + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = p + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

이다. 항등사상에 대응되는 벡터를 $\mathbf{0}$ 으로 나타낸다.

이제 "벡터와 평행이동이 동치 개념"이라는 다음 정리도 쉽게 얻는다.

도움정리 7. 사상

$$\tau : \overrightarrow{\mathbb{E}} \to \mathcal{T}(\mathbb{E}), \quad \mathbf{v} \mapsto T_{\mathbf{v}}$$

는 일대일 대응이다.

위 대응관계에서 벡터들 사이의 연산과 상수곱을

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} := \tau^{-1}(T_{\mathbf{v}} \circ T_{\mathbf{w}})$$
$$t\mathbf{v} := \tau^{-1}({T_{\mathbf{v}}}^t)$$

로 정의하면 $\overrightarrow{\mathbb{E}}$ 는 선형공간이 된다.
다음 정리는 (1)에서 얻는다.

도움정리 8. 유클리드 공간 $\mathbb{E}$ 의 좌표계 $x : \mathbb{E} \to \mathbb{R}^n$ 에 대하여 사상

$$x_* : \overrightarrow{\mathbb{E}} \to \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{v} \mapsto x_*(T_{\mathbf{v}}) =: x_*(\mathbf{v})$$

는 선형동형이고, 임의의 $p \in \mathbb{E}$ 와 $\mathbf{v} \in \overrightarrow{\mathbb{E}}$ 에 대하여

$$x(p + \mathbf{v}) = x(p) + x_*(\mathbf{v})$$

이다.

유클리드 공간 $\mathbb{E}$ 에서 벡터들의 공간 $\overrightarrow{\mathbb{E}}$ 는 $\mathbb{E}$ 의 각점에서의 접공간으로 보아도 된다:

$$\mathbb{E}_p := \{p\} \times \overrightarrow{\mathbb{E}} \simeq \overrightarrow{\mathbb{E}}.$$

유클리드 공간 $\mathbb{E}$ 에서 한점 $O \in \mathbb{E}$ 를 기준으로 하면 사상

$$\overrightarrow{\mathbb{E}} \to \mathbb{E}, \qquad \mathbf{v} \mapsto O + \mathbf{v}$$

는 일대일 대응관계이다.

4.1. 벡터의 크기

벡터공간 $\overrightarrow{\mathbb{E}}$ 는 $\mathbb{E}$ 의 유클리드 거리함수를 달리하여도 변화하지 않는 선형공간이다. 그러나 $\mathbb{E}$ 에 주어진 유클리드 거리함수는 $\overrightarrow{\mathbb{E}}$ 를 내적공간으로 만든다.

유클리드 공간 $\mathbb{E}$ 의 한 벡터 $\mathbf{v}$ 는 평행이동사상 $T : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ 에 대응되고, 이 사상의 "변위상수"를 벡터 $\mathbf{v}$ (또는 평행이동사상 T)의 **크기**라 말한다:

$$|\mathbf{v}| = |T| = d(p, T(p)).$$

그러면 임의의 좌표계 $x : \mathbb{E} \to \mathbb{R}^n$ 에 대하여

$$|\mathbf{v}| = |x_*(\mathbf{v})|$$

임을 안다.

벡터공간 $\overrightarrow{\mathbb{E}}$ 는 평행사변형 법칙을 만족시키는 노옴공간이고, 따라서 내적공간임을 안다.

그러므로 유클리드 공간에서는 두 방향사이의 각을 말하는 것이 자유롭다.

5. 유클리드 운동

유클리드 공간 $\mathbb{E}$ 에서 자기합동사상들의 집합 — 즉, $\mathbb{E}$ 의 운동군을 $\mathcal{M}(\mathbb{E})$ 라 하자. 그러면 임의의 운동

$$f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$$

는 주어진 점 $p \in \mathbb{E}$ 를 고정시키는 등장사상

$$f_p : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$$

와 평행이동사상의 합성이다. 사상 f_p 는 벡터공간 $\overrightarrow{\mathbb{E}}$ 의 선형등장사상

$$f_* : \overrightarrow{\mathbb{E}} \to \overrightarrow{\mathbb{E}}$$

와 같은 것으로 이해하여도 된다. 사상 f_* 는 $\mathbb{E}$ 의 각 점에서 $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ 의 미분사상이다. 이때 사상 f_* 가 항등사상일 필요충분조건은 f 가 평행이동사상인 것이다. 이러한 입장에서 보면 다음과 같은 완전수열을 얻는다:

$$1 \to \overrightarrow{\mathbb{E}} \to \mathcal{M}(\mathbb{E}) \to \mathrm{O}(\overrightarrow{\mathbb{E}}) \to 1.$$

클라인의 프로그램에 의하면 운동군을 이해하는 것이 기하학이다 ([7]). 운동군을 바르게 이해하지 못하면 서투른 서술을 하게 된다 ([9]).

6. 복소 유클리드 공간

지금까지 살펴본 유클리드 공간 $\mathbb{E}$ 는 실수체 상의 유클리드 공간이었다. 만약 복소수체상에서 이러한 이론을 살펴보려면 $\mathbb{E}$ 의 벡터공간 $\overrightarrow{\mathbb{E}}$ 에 내적과 어울리는 복소구조

$$J : \overrightarrow{\mathbb{E}} \to \overrightarrow{\mathbb{E}}, \qquad J^2 = -\,\mathrm{id}$$

를 생각하면 된다.

7. 아핀공간

우리는 유클리드 공간의 좋은 정의를 가지고 있다. 이러한 정의를 이용하여 실수체 위에서 **아핀공간**의 정의를 내려본다:

정의. 유클리드 거리함수가 존재하는 집합을 **아핀공간**이라 정의한다.

이제 아핀 공간 $\mathbb{A}$ 에서 사상 $T : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ 가 $\mathbb{A}$ 의 어떤 유클리드 거리함수 d 에 대하여 평행이동사상이면 **평행이동사상**이라 부른다. 사상 $T : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ 가 한 유클리드 거리함수에 대하여 평행이동사상이면 다른 유클리드 거리함수

에 대하여도 평행이동사상이므로 (도움정리 5) 아핀공간에서 평행이동사상이라는 개념은 잘 정의된다. 따라서 유클리드 공간과 마찬가지로 아핀공간에서도 평행이동사상들의 공간 $\mathcal{T}(\mathbb{A})$ 가 잘 정의되고, 벡터들의 공간 $\overrightarrow{\mathbb{A}}$ 도 잘 정의된다. 아핀공간에서 어떤 "유클리드 구조"에 대한 좌표계 $x : \mathbb{A} \to \mathbb{R}^n$ 을 **아핀좌표계**라 부른다. 사상

$$f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$$

가 **아핀동형**이라는 것은 어떤 아핀좌표계 $x, y : \mathbb{A} \to \mathbb{R}^n$ 에 대하여

$$f = y^{-1} \circ x : \mathbb{A} \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{A}$$

이라는 뜻으로 이해한다. 변환 $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ 가 아핀동형이면 이 사상은 주어진 점 $p \in \mathbb{A}$ 를 고정시키는 변환 $f_p : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ 와 평행이동의 합성으로 주어진다. 한편 한 점을 고정시키는 아핀변환은 벡터공간 $\overrightarrow{\mathbb{A}}$ 의 일반선형사상 $f_* : \overrightarrow{\mathbb{A}} \to \overrightarrow{\mathbb{A}}$ 와 일대일 대응관계를 주므로 아핀변환군 $\mathcal{G}(\mathbb{A})$ 는 다음과 같은 완전수열을 만족시킨다:

$$1 \to \overrightarrow{\mathbb{A}} \to \mathcal{G}(\mathbb{A}) \to \mathrm{GL}(\overrightarrow{\mathbb{A}}) \to 1.$$

7.1. 아핀결합

아핀공간 $\mathbb{A}$ 의 두 점 p, q 와 실수 t 에 대하여 아핀결합 $(1-t)p + tq \in \mathbb{A}$ 를

$$(1-t)p + tq := p + t\overrightarrow{pq}$$

로 정의한다.

이와 같은 정의에서 두점을 지나는 직선을 정의할 수 있고, 더 나아가서 일반적인 점들 $p_1, \ldots, p_n$ 의 아핀결합을 정의할 수 있고, 아핀부분공간을 정의할 수 있다. **아핀사상**이란 아핀부분공간을 보존하는 사상을 뜻한다.

8. 결론

유클리드 공간 $\mathbb{E}$ 에는 벡터들로 이루어진 내적공간 $\overrightarrow{\mathbb{E}}$가 대응되고, 이 내적공간이 유클리드 공간 $\mathbb{E}$ 에 평행이동사상으로 작용한다. 유클리드 공간에서 합동을 주는 사상 $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ 는 선형공간 $\overrightarrow{\mathbb{E}}$ 의 직교사상

$$f_* : \overrightarrow{\mathbb{E}} \to \overrightarrow{\mathbb{E}}$$

를 유도하여 유클리드 운동군 $\mathcal{M}(\mathbb{E})$ 가 완전수열

$$1 \to \overrightarrow{\mathbb{E}} \to \mathcal{M}(\mathbb{E}) \to \mathrm{O}(\overrightarrow{\mathbb{E}}) \to 1$$

을 만족시킨다.

References

[1] 小林昭七, ユークリッド幾何から現代幾何へ, 日本評論社, 1990 (원대연 옮김, 유클리드 기하에서 현대 기하로, 淸文閣, 1999).
[2] M. Berger, *Geometry* I, Springer-Verlag, 1987.
[3] S.-s. Chern, *From Triangles to Manifolds*, Amer. Math. Monthly **86** (1979), 330–349.
[4] R. Descartes, *The Geometry*, Dover, 1954.
[5] Euclid, *Elements*, Dover, 1956.
[6] D. Hilbert, *Foundations of Geometry*, The Open Court Publ. Co., La Salle, Illinois, 1980.
[7] F. Klein, *Erlanger Programme*, 1872.
[8] B. O'Neill, *Elementary Differential Geometry*, Second Ed., Academic Press, 1997.
[9] R. Schwarzenberger, *N-dimensional crystallography*, Pitman Advanced Publishing Program, 1980.
[10] H. Weyl, *Phylosophy of Mathematics and Natural Sciences*, 1949.

서울대학교
자연과학대학
수학과
E-mail: hongjong@math.snu.ac.kr