Comm. Korean Math. Soc. **15** (2000), No. 1, pp. 1–27

초청논문

# 위너공간에서의 푸리에-파인만 변환과 합성곱

장건수, 유 일, 김병수

ABSTRACT. 위너공간과 추상 위너공간 위에서의 푸리에-파인만 변환, 푸리에-위너 변환 그리고 합성곱을 정의하고 여러가지 형태의 함수들에 대한 변환과 합성곱의 존재정리 및 여러가지 성질을 소개한다. 또한, 이 함수들의 파시발 관계와 프란셰렐 관계에 대해서도 알아본다.

## 1. 서론

양자이론의 고전적 접근 방법에 관심을 가졌던 파인만(R. P. Feynman)은 1948년에 발표한 논문 [24] 에서 함수공간에서의 한 적분의 존재성을 가정하고, 이 적분이 양자역학의 슈뢰딩거 방정식의 초기치 문제의 해를 구하는데 사용될 수 있음을 보였다. 이 적분을 파인만 적분(Feynman integral)이라 부르며, 파인만의 논문은 수학과 물리학에 직접 또는 간접적으로 많은 영향을 주었다.

파인만 적분이 소개된 이후 많은 수학자 및 물리학자들이 이 적분에 관심을 가지고 이 적분을 수학적 이론으로 발전시키려고 노력하였다. Cameron 은 위너적분의 해석접속(analytic continuation)의 방법을 사용해서 파인만 해석적분(analytic Feynman integral)을 정의했다.

본 논문에서는 파인만 해석적분의 정의를 이용하여, 위너공간과 추상 위너공간 위에서 푸리에 변환과 유사한 형태의 적분변환과 합성곱, 즉, 푸리에-파인만 변환(Fourier-Feynman transform), 푸리에-위너 변환(Fourier-Wiener transform)과 합성곱(convolution product)을 소개하고 이들의 여러가지 성질에 대하여 알아보기로 하자.

Received November 15, 1999. Revised December 13, 1999.
1991 Mathematics Subject Classification: 28C20.
Key words and phrases: 위너공간, 추상 위너공간, 파인만 해석적분, 푸리에-파인만 변환, 푸리에-위너 변환, 합성곱, 파시발 관계, 프란셰렐 관계.
이 연구는 1999년도 연세대학교 학술연구비의 지원에 의하여 이루어진 것임.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 먼저 2장에서는 위너공간에서 정의된 푸리에-파인만 변환과 합성곱을 소개하고 여러가지 형태의 함수들에 대한 푸리에-파인만 변환과 합성곱의 존재성, 파시발 관계 등에 관하여 다루었다. 3장에서는 추상 위너공간에서 정의된 푸리에-위너 변환, 푸리에-파인만 변환과 합성곱에 관하여 다루었다. 그리고 각 장의 끝 부분에는 본 논문의 내용과 관련된 연구논문들을 소개하였다.

## 2. 위너공간에서의 푸리에-파인만 변환과 합성곱

$C_0[0,T]$를 위너공간(Wiener space)이라 하자. 즉, 위너공간은 $[0,T]$ 에서 정의된 실수값을 갖는 연속함수 $x(t)$ 중에서 $x(0)=0$를 만족하는 함수들의 집합이다. 푸리에-파인만 해석변환에 관한 $L_1$ 이론($L_1$ analytic Fourier-Feynman transform)은 Brue [4]에 의하여 처음 소개되었고, Cameron과 Storvick [10]은 푸리에-파인만 해석변환에 관한 $L_2$ 이론을 소개하였다. 그 후 Johnson 과 Skoug [34]는 $1 \le p \le 2$ 일때 푸리에-파인만 해석변환의 $L_p$ 이론을 전개하여 [4,10]의 결과들을 확장하고 $L_1$ 이론과 $L_2$ 이론 사이의 여러가지 관계를 얻었다.

### 2.1. 정의와 기본 개념

$C_0[0,T]$의 부분집합 중에서 위너측도 가능한 집합들의 모임을 $\mathcal{M}$ 이라 하고 $m$ 을 위너측도(Wiener measure)라 하자. 그러면 $(C_0[0,T],\mathcal{M},m)$ 은 완비측도공간(complete measure space)이 되고 함수 $F$의 위너적분(Wiener integral)은

$$\int_{C_0[0,T]} F(x)\,dm(x)$$

로 표시한다.

일반적인 측도론이나 적분론에서는 "거의 모든점"(almost everywhere)의 개념이 이론전개의 중요한 개념이 되지만 파인만 적분론에서는 이 개념 만으로 충분치 못하다. 즉, 일반 적분론에서는 거의 모든점에서 같은 두 함수의 적분은 같고, 이 두 함수는 같은 함수(동치족)로 취급한다. 그러나 파인만 적분론에서는 $m$-a.e. 에서 같은 두 함수의 파인만 적분이 같지 않을 수도 있다 [35]. 따라서 파인만 적분이론에서는 $m$-a.e. 대신 $s$-a.e. (척도불변 거의모두)의 개념이 필요하다.

$C_0[0,T]$ 의 부분집합 $E$ 가, 모든 $\rho > 0$ 에 대하여 $\rho E \in \mathcal{M}$ 을 만족하면 척도불변 가측집합(scale-invariant measurable set)이라 하고, 척도불변 가측집합 $N$이 모든 $\rho > 0$ 에 대하여 $m(\rho N) = 0$ 이면 척도불변 영집합(scale-invariant null set)이라 한다. 어떤 성질이 척도불변 영집합을 제외하고 성립하면 척도불변 거의 모두 (scale-invariant almost everywhere, $s$-a.e.)에서 성립한다고 한다. 또 모든 $\rho > 0$ 에 대하여 $F(\rho x)$ 가 위너측도 가능하면 $F$는 척도불변 가측함수(scale-invariant measurable function)라 하고, $F$ 와 $G$ 가 $s$-a.e. 에서 같으면 $F \approx G$ 라 나타낸다. 이에 대한 자세한 내용은 [13,35]를 참고하기 바란다.

$\mathbb{C}, \mathbb{C}_+$ 와 $\mathbb{C}_+^\sim$ 를 각각 복소수, 실수부가 양인 복소수, 그리고 실수부가 음이 아닌 복소수중 0 을 제외한 집합이라 하자. $F$ 가 $C_0[0,T]$ 에서 정의되고 복소수 값을 갖는 함수로서 모든 $\lambda > 0$ 에 대하여 위너적분

$$J(\lambda) = \int_{C_0[0,T]} F(\lambda^{-1/2}x)\, dm(x)$$

가 유한한 값으로 존재한다고 하자. 만약 $\mathbb{C}_+$ 에서 해석함수(analytic function) $J^*(\lambda)$ 가 존재하여, 모든 $\lambda > 0$ 에 대하여 $J^*(\lambda) = J(\lambda)$ 이면, $J^*(\lambda)$ 를 $C_0[0,T]$ 위에서 매개변수 $\lambda \in \mathbb{C}_+$ 를 갖는 함수 $F$ 의 위너 해석적분(analytic Wiener integral of $F$ with parameter $\lambda$) 이라 하고

$$\int_{C_0[0,T]}^{anw_\lambda} F(x)\, dm(x) = J^*(\lambda)$$

라 나타낸다.

$q \neq 0$ 인 실수이고, 모든 $\lambda \in \mathbb{C}_+$에 대하여 $F$ 의 위너 해석적분 $J^*(\lambda)$가 존재한다고 하자. 다음 극한값을 매개변수 $q$ 를 갖는 함수 $F$ 의 파인만 해석적분(analytic Feynman integral of $F$ with parameter $q$)이라 하고

$$\int_{C_0[0,T]}^{anf_q} F(x)\, dm(x) = \lim_{\lambda \to -iq} \int_{C_0[0,T]}^{anw_\lambda} F(x)\, dm(x)$$

로 나타낸다. 여기서 $\lambda$는 $\mathbb{C}_+$에서 $-iq$로 접근한다.

다음 정리는 위너적분을 계산하는데 매우 유용한 정리이다.

정 리 2.1. $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$은 $L_2[0,T]$에 속하는 함수로서 정규직교(*orthonormal*) 함수들이라 하자. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$가 르베크 측도가능하면 다음 식

이 성립한다.

$$
\begin{aligned}
&\int_{C_0[0,T]} f\Big(\int_0^T \alpha_1(t)\,dx(t),\cdots,\int_0^T \alpha_n(t)\,dx(t)\Big)\,dm(x) \\
(2.1)\qquad &= (2\pi)^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{u})\exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n u_j^2\Big\}\,d\vec{u}
\end{aligned}
$$

여기서 적분 $\int_0^T \alpha_j(t)\,dx(t)$는 패리-위너-지그문드 확률적분(*Paley-Wiener-Zigmund stochastic integral*)을 의미한다.

다음으로 푸리에-파인만 변환을 정의하기 위해 몇 가지 기호를 도입하자.

기 호 2.2. (i) $\lambda \in \mathbb{C}_+$ 와 $y \in C_0[0,T]$에 대하여

$$(T_\lambda(F))(y) = \int_{C_0[0,T]}^{anw_\lambda} F(x+y)\,dm(x) \tag{2.2}$$

로 쓴다.

(ii) $1 \le p \le \infty$인 실수 $p$에 대하여 $p'$은 다음 관계를 만족하는 실수이다.

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1.$$

(iii) $1 < p \le 2$이고 $\{H_n\}$과 $H$가 척도불변 가측함수로서, 모든 $\rho > 0$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\int_{C_0[0,T]} |H_n(\rho y) - H(\rho y)|^{p'}\,dm(y) = 0$$

이라 하자. 이 경우

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}(w_s^{p'})(H_n) \approx H$$

라 쓰고 $H$ 를 $H_n$ 들의 $p'$차 척도불변 평균극한(scale invariant limit in the mean of order $p'$)이라 한다. 여기에서 $n$을 연속적으로 변하는 변수 $\lambda$로 바꾸어도 같은 의미로 정의한다.

이제 $L_p$ 푸리에-파인만 해석변환과 합성곱을 정의하자.

정 의 2.3. $q \neq 0$인 실수, $1 < p \le 2$에 대하여, 극한

$$(T_q^{(p)}(F))(y) = \underset{\lambda\to -iq}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}(w_s^{p'})(T_\lambda(F))(y) \tag{2.3}$$

가 존재하면 $T_q^{(p)}(F)$를 $F$의 $L_p$ 푸리에-파인만 해석변환($L_p$ analytic Fourier-Feynman transform)이라 한다. 여기서 $\lambda$는 $\mathbb{C}_+$에서 $-iq$로 접근한다. 또, $s$-a.e. $y \in C_0[0,T]$ 에 대하여, 극한

$$(T_q^{(1)}(F))(y) = \lim_{\lambda \to -iq} (T_\lambda(F))(y) \tag{2.4}$$

가 존재하면 $T_q^{(1)}(F)$를 $F$의 $L_1$ 푸리에-파인만 해석변환($L_1$ analytic Fourier-Feynman transform)이라 한다.

$1 \le p \le 2$에 대하여 $T_q^{(p)}(F)$는 $s$-a.e.에서 정의된다. 또 $T_q^{(p)}(F_1)$이 존재하고 $F_1 \approx F_2$이면, $T_q^{(p)}(F_2)$도 존재하고 $T_q^{(p)}(F_1) \approx T_q^{(p)}(F_2)$이다.

정 의 2.4. $F$ 와 $G$ 가 $C_0[0,T]$ 에서 정의된 함수라 하자. $\lambda \in \tilde{\mathbb{C}}_+$에 대하여 다음 적분이 존재하면 이것을 $F$와 $G$의 합성곱(convolution product)이라 한다.

(2.5)
$$(F*G)_\lambda(y) = \begin{cases} \int_{C_0[0,T]}^{anw_\lambda} F\left(\frac{y+x}{\sqrt{2}}\right) G\left(\frac{y-x}{\sqrt{2}}\right) dm(x), & \lambda \in \mathbb{C}_+, \\ \int_{C_0[0,T]}^{anf_q} F\left(\frac{y+x}{\sqrt{2}}\right) G\left(\frac{y-x}{\sqrt{2}}\right) dm(x), & \lambda = -iq,\ q \in \mathbb{R}-\{0\}. \end{cases}$$

$\lambda = -iq$일때 $(F*G)_\lambda$를 $(F*G)_q$로 나타낸다.

### 2.2. $\mathcal{A}_n^{(p)}$의 함수들에 대한 변환과 합성곱

$n$은 자연수이고, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$은 $L_2[0,T]$에 속하는 함수로서 정규직교(orthonormal) 함수들이라 하자. (기호와 증명상의 편의를 위해서 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$은 $L_2[0,T]$에서 정규직교임을 가정한 것이다. 실제로는 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$이 $L_2[0,T]$에서 일차독립인 함수들이면 아래의 결과들은 모두 성립한다.) $1 \le p < \infty$에 대하여 $\mathcal{A}_n^{(p)}$는 $s$-a.e. $x \in C_0[0,T]$에 대하여,

$$F(x) = f\Big(\int_0^T \alpha_1(t)\,dx(t), \cdots, \int_0^T \alpha_n(t)\,dx(t)\Big), \tag{2.6}$$

형태의 함수 $F$들의 공간이다. 여기서 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 는 $L_p(\mathbb{R}^n)$에 속하는 함수이고 적분 $\int_0^T \alpha_j(t)\,dx(t)$는 페리-위너-지그문드 확률적분(Paley-Wiener-Zigmund stochastic integral)을 의미한다. 또, $\mathcal{A}_n^{(\infty)}$는 $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$에 대하여 (2.6) 식과 같이 표현되는 함수들의 공간이며, $C_0(\mathbb{R}^n)$은 $\mathbb{R}^n$에서 정의되는 유계 연속함수로서 무한점에서 0인 (vanish at infinity) 함수들이다.

$F \in \mathcal{A}_n^{(p)}$이면 $F$는 척도불변 가측함수임을 쉽게 알수 있고, $p > 1$일 경우 위에서 정의한 파인만 적분은 위너 해석적분의 척도불변 평균극한(scale-invariant limit in the mean)으로 생각한다.

이제 $\mathcal{A}_n^{(p)}$의 함수들에 대한 $L_p$ 푸리에-파인만 해석변환과 합성곱에 대하여 알아보자.

$1 \le p \le \infty$이고 $F \in \mathcal{A}_n^{(p)}$가 (2.6) 식과 같이 주어진다고 하자. 그러면 모든 $\lambda \in \mathbb{C}_+$에 대하여

$$(T_\lambda(F))(y) = g\Big(\lambda; \int_0^T \alpha_1\, dy, \cdots, \int_0^T \alpha_n\, dy\Big) \tag{2.7}$$

이고, 여기서

$$\begin{aligned} g(\lambda; w_1, \cdots, w_n) &\equiv g(\lambda; \vec{w}) \\ &= \Big(\frac{\lambda}{2\pi}\Big)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{u}) \exp\Big\{-\frac{\lambda}{2}\sum_{j=1}^n (u_j - w_j)^2\Big\}\, d\vec{u} \end{aligned} \tag{2.8}$$

이다. 이 성질의 증명은 $T_\lambda(F)$의 정의와 정리 2.1 의 위너적분공식을 적용하고 해석접속(analytic continuation)의 방법을 사용하여 얻을 수 있다. 그리고 $1 < p \le 2$이고 $Re\lambda = 0$이면, (2.8) 식의 적분은 $L_p$ 푸리에 변환 이론 [50] 에서와 같이 평균극한의 의미로 생각한다.

특히 $F \in \mathcal{A}_n^{(p)}$가 (2.6) 식과 같이 주어지고 $g(\lambda; \vec{w})$가 (2.8) 식과 같이 주어지면 다음 사실을 알 수 있다.

(i) 모든 $\lambda \in \mathbb{C}_+^\sim$에 대하여 $g(\lambda; \cdot) \in C_0(\mathbb{R}^n)$ 이다.

(ii) $\lambda$ 가 $\mathbb{C}_+$에서 $-iq$로 접근하면 $g(\lambda; \vec{w})$는 $g(-iq; \vec{w})$로 점별 수렴(converges pointwise) 한다.

(iii) $\lambda$ 가 $\mathbb{C}_+$에서 $-iq$로 접근하면 $g(\lambda; \vec{w})$는 $C_0(\mathbb{R}^n)$의 원소로서 $g(-iq; \vec{w})$로 약하게 수렴(converges weakly) 한다.

위의 사실들로 부터 다음과 같은 푸리에-파인만 변환의 존재정리를 얻을 수 있다 ([29]).

정 리 2.5. $F \in \mathcal{A}_n^{(1)}$이 (2.6) 식과 같이 주어지면, 모든 실수 $q \neq 0$에 대하여 $T_q^{(1)}(F)$는 존재하고

$$(T_q^{(1)}(F))(y) \approx g\Big(-iq; \int_0^T \alpha_1\, dy, \cdots, \int_0^T \alpha_n\, dy\Big) \in \mathcal{A}_n^{(\infty)} \tag{2.9}$$

이다. 여기서 $g$는 (2.8) 식으로 주어지는 함수이다.

정 리 2.6. $1 < p \le 2$이고, $F \in \mathcal{A}_n^{(p)}$가 (2.6) 식과 같이 주어진다고 하자. 그러면 모든 실수 $q \neq 0$에 대하여 $T_q^{(p)}(F)$는 존재하고 $\mathcal{A}_n^{(p')}$에 속하며

$$(2.10) \qquad (T_q^{(p)}(F))(y) \approx g\Big(-iq; \int_0^T \alpha_1\, dy, \cdots, \int_0^T \alpha_n\, dy\Big)$$

이다. 여기서 $g$는 (2.8) 식으로 주어지는 함수이다.

다음 정리는 푸리에-파인만 변환의 역변환에 관한 정리이다 ([29]).

정 리 2.7. $1 < p \le 2$, $F \in \mathcal{A}_n^{(p)}$이고 $q \neq 0$이라 하자. 그러면,

(i) 모든 $\rho > 0$에 대하여

$$\lim_{\lambda \to -iq} \int_{C_0[0,T]} |(T_{\bar{\lambda}} T_\lambda(F))(\rho y) - F(\rho y)|^p\, dm(y) = 0.$$

(ii) $\lambda$가 $\mathbb{C}_+$에서 $-iq$로 접근하면, $T_{\bar{\lambda}} T_\lambda(F) \to F$ $s$-a.e.이다.

특별히 $p = 2$이고 $F \in \mathcal{A}_n^{(2)}$일때는 푸리에-파인만 변환의 역변환에 관해서

$$T_{-q}^{(2)} T_q^{(2)}(F) \approx F$$

를 얻을 수 있다.

다음에는 두 함수의 합성곱의 성질에 관하여 알아보자.

$1 \le p \le \infty$이고, $F_j \in \cup_{1 \le p \le \infty} \mathcal{A}_n^{(p)}, j = 1, 2$가 (2.6) 식과 같이 주어진다고 하자. 그러면 모든 $\lambda \in \mathbb{C}_+$에 대하여

$$(2.11) \qquad (F_1 * F_2)_\lambda(y) = h\Big(\lambda; \int_0^T \alpha_1\, dy, \cdots, \int_0^T \alpha_n\, dy\Big)$$

이고, 여기서

$$\begin{aligned} & h(\lambda; w_1, \cdots, w_n) \equiv h(\lambda; \vec{w}) \\ (2.12) \qquad & = \Big(\frac{\lambda}{2\pi}\Big)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f_1\Big(\frac{\vec{w} + \vec{u}}{\sqrt{2}}\Big) f_2\Big(\frac{\vec{w} - \vec{u}}{\sqrt{2}}\Big) \exp\Big\{-\frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^n u_j^2\Big\}\, d\vec{u} \end{aligned}$$

이다. 이 사실도 앞에서와 마찬가지로 합성곱의 정의와 정리 2.1 의 위너적분 공식을 적용하고 해석접속의 방법을 이용하여 얻을 수 있다. 또, 위의 결과를 이용하여 푸리에-파인만 변환을 다시 계산하고 앞에서 얻은 (2.7) 식을 이용하면

$$(2.13) \qquad (T_\lambda(F_1 * F_2)_\lambda)(z) = (T_\lambda(F_1))\Big(\frac{z}{\sqrt{2}}\Big)(T_\lambda(F_2))\Big(\frac{z}{\sqrt{2}}\Big)$$

임을 어렵지 않게 보일 수 있다.

위의 결과들로 부터 다음 정리를 얻을 수 있다 (증명은 [29] 참고).

정 리 2.8. (i) $F_1, F_2 \in \mathcal{A}_n^{(2)}$이면, 모든 $\lambda \in \mathbb{C}_+^{\sim}$에 대하여, $(F_1 * F_2)_\lambda \in \mathcal{A}_n^{(\infty)}$ 이다.

(ii) $F_1 \in \mathcal{A}_n^{(1)}$이고 $F_2 \in \mathcal{A}_n^{(\infty)}$이면, 모든 $\lambda \in \mathbb{C}_+^{\sim}$에 대하여, $(F_1 * F_2)_\lambda \in \mathcal{A}_n^{(\infty)}$ 이다.

(iii) $F_1, F_2 \in \mathcal{A}_n^{(1)}$ 이라 하자. 그러면, 모든 $\lambda \in \mathbb{C}_+^{\sim}$에 대하여, $(F_1 * F_2)_\lambda \in \mathcal{A}_n^{(1)}$이고, 모든 실수 $q \neq 0$에 대하여

$$(T_q^{(1)}(F_1 * F_2)_q)(z) = (T_q^{(1)}(F_1))\Big(\frac{z}{\sqrt{2}}\Big)(T_q^{(1)}(F_2))\Big(\frac{z}{\sqrt{2}}\Big) \tag{2.14}$$

이다.

(iv) $F_1 \in \mathcal{A}_n^{(1)}$이고 $F_2 \in \mathcal{A}_n^{(2)}$이라 하자. 그러면, 모든 $\lambda \in \mathbb{C}_+^{\sim}$에 대하여, $(F_1 * F_2)_\lambda \in \mathcal{A}_n^{(2)}$이고, 모든 실수 $q \neq 0$에 대하여

$$(T_q^{(2)}(F_1 * F_2)_q)(z) = (T_q^{(1)}(F_1))\Big(\frac{z}{\sqrt{2}}\Big)(T_q^{(2)}(F_2))\Big(\frac{z}{\sqrt{2}}\Big) \tag{2.15}$$

이다.

### 2.3. 바나하 대수 $\mathcal{S}$ 의 함수들에 대한 변환과 합성곱

1980년 Cameron과 Storvick [11]은 $C_0[0,T]$에서 정의되는 함수들의 바나하 대수(Banach algebra) $\mathcal{S}$를 소개 하였다. $M(L_2[0,T])$ 를 $L_2[0,T]$ 위에서 정의된 복소수 값을 갖는 가산 가법 가능한 보렐측도(countably additive Borel measure)들의 공간이라 하자. 바나하 대수 $\mathcal{S}$는 $f \in M(L_2[0,T])$일때 $s$-a.e. $x \in C_0[0,T]$에 대하여

$$F(x) = \int_{L_2[0,T]} \exp\Big\{i\int_0^T v(s)\,dx(s)\Big\}\,df(v) \tag{2.16}$$

형태의 함수들의 모임이다. 양자역학에서 중요한 역할을 하는 함수

$$F(x) = \exp\Big\{\int_0^T \theta(t, x(t))\,dt\Big\}$$

도 적당한 $\theta$에 대해서 $\mathcal{S}$에 속한다. 이 외에도 많은 형태의 함수들이 $\mathcal{S}$에 속함이 알려져있다. 바나하 대수 $\mathcal{S}$에 대해서는 그동안 많은 연구가 있었으며, 이에 대한 자세한 내용은 [14,15,36,46] 를 참고하기 바란다.

$F \in \mathcal{S}$의 위너 해석적분과 파인만 해석적분을 계산하면 다음과 같다.

$$\int_{C_0[0,T]}^{anw_\lambda} F(x)\, dm(x) = \int_{L_2[0,T]} \exp\Big\{-\frac{1}{2\lambda}\int_0^T (v(t))^2\, dt\Big\}\, df(v), \tag{2.17}$$

$$\int_{C_0[0,T]}^{anf_q} F(x)\, dm(x) = \int_{L_2[0,T]} \exp\Big\{-\frac{i}{2q}\int_0^T (v(t))^2\, dt\Big\}\, df(v). \tag{2.18}$$

이제 $F \in \mathcal{S}$에 대한 $L_p$ 푸리에-파인만 해석변환과 합성곱의 존재정리에 대하여 알아보자. 다음 정리들은 [30] 의 내용이다.

정 리 2.9. $F \in \mathcal{S}$가 (2.16) 식과 같이 주어진 함수이고, $1 \le p \le 2$라 하자. 그러면 모든 실수 $q \ne 0$에 대하여 $F$의 $L_p$ 푸리에-파인만 해석변환 $T_q^{(p)}(F)$는 존재하고

(2.19)

$$(T_q^{(p)}(F))(y) = \int_{L_2[0,T]} \exp\Big\{i\int_0^T v(t)\, dy(t) - \frac{i}{2q}\int_0^T (v(t))^2\, dt\Big\}\, df(v)$$

이다.

정 리 2.10. $F$와 $G$가 $\mathcal{S}$의 원소이고, $F$와 $G$에 대응되는 유한 보렐 측도는 $f, g \in M(L_2[0,T])$라 하자. 그러면 모든 실수 $q \ne 0$에 대하여 $F$와 $G$의 합성곱 $(F * G)_q$는 존재하고, $(F * G)_q$는 다시 $\mathcal{S}$의 원소이며

$$\begin{aligned}(F * G)_q(y) = \int_{L_2^2[0,T]} \exp\Big\{&\frac{i}{\sqrt{2}}\int_0^T [v(t) + w(t)]\, dy(t) \\ &- \frac{i}{4q}\int_0^T [v(t) - w(t)]^2\, dt\Big\}\, df(v)\, dg(w)\end{aligned} \tag{2.20}$$

이다.

(2.20) 식의 푸리에-파인만 변환을 다시 계산하고 (2.19) 식을 이용하면 다음 정리와 같이 합성곱의 푸리에-파인만 변환은 각각의 변환의 곱과 같음을 알 수 있다.

정 리 2.11. $F$와 $G$가 정리 2.10 에서와 같이 주어진 함수이고, $1 \le p \le 2$라 하자. 그러면 모든 실수 $q \ne 0$에 대하여

$$(T_q^{(p)}(F * G)_q)(z) = (T_q^{(p)}(F))\Big(\frac{z}{\sqrt{2}}\Big)\, (T_q^{(p)}(G))\Big(\frac{z}{\sqrt{2}}\Big) \tag{2.21}$$

이다.

위의 정리들의 결과를 이용하면, 다음과 같은 파시발 항등식(Parseval's identity) 을 얻을 수 있다.

정 리 2.12. $F$ 와 $G$ 가 정리 2.10 에서와 같이 주어진 함수이고, $1 \le p \le 2$라 하자. 그러면 모든 실수 $q \neq 0$에 대하여 다음과 같은 파시발 항등식이 성립한다.

$$\begin{aligned}
&\int_{C_0[0,T]}^{anf_{-q}} (T_q^{(p)}(F))\Big(\frac{z}{\sqrt{2}}\Big)\,(T_q^{(p)}(G))\Big(\frac{z}{\sqrt{2}}\Big)\,dm(z) \\
&= \int_{C_0[0,T]}^{anf_q} F\Big(\frac{z}{\sqrt{2}}\Big)\,G\Big(-\frac{z}{\sqrt{2}}\Big)\,dm(z). \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

위의 정리에서 특별히 $G \equiv F$이거나 $G \equiv 1$이면 다음 항등식

$$\int_{C_0[0,T]}^{anf_{-q}} \Big[(T_q^{(p)}(F))\Big(\frac{z}{\sqrt{2}}\Big)\Big]^2 dm(z) = \int_{C_0[0,T]}^{anf_q} F\Big(\frac{z}{\sqrt{2}}\Big)\,F\Big(-\frac{z}{\sqrt{2}}\Big)\,dm(z)$$

와

$$\int_{C_0[0,T]}^{anf_{-q}} (T_q^{(p)}(F))\Big(\frac{z}{\sqrt{2}}\Big)\,dm(z) = \int_{C_0[0,T]}^{anf_q} F\Big(\frac{z}{\sqrt{2}}\Big)\,dm(z)$$

를 얻을 수 있고, 정리 2.12 의 증명과정을 조금 수정하면

$$\int_{C_0[0,T]}^{anf_{-q}} (T_{q/2}^{(p)}(F))(z)\,(T_{q/2}^{(p)}(G))(z)\,dm(z) = \int_{C_0[0,T]}^{anf_q} F(z)\,G(-z)\,dm(z)$$

와 같이 변형된 형태의 파시발 항등식도 얻을 수 있다.

마지막으로 $\mathcal{S}$의 함수에 대한 푸리에-파인만 변환의 역변환에 관한 정리를 알아보자.

정 리 2.13. $F \in \mathcal{S}$ 가 (2.16) 식과 같이 주어진 함수이고, $1 \le p \le 2$ 라 하자. 그러면 모든 실수 $q \neq 0$ 에 대하여

$$T_{-q}^{(p)}(T_q^{(p)}(F)) \approx F \qquad (2.23)$$

이다.

정리 2.13 과 정리 2.11 의 (2.21) 식을 이용하면, 앞에서 정의한 합성곱은 결합법칙이 성립하지 않음을 알 수 있다. 즉,

$$((F * G)_q * H)_q \neq (F * (G * H)_q)_q$$

이다. 왜냐하면 (2.21) 식에 의하여

$$(T_q^{(p)}(((F*G)_q*H)_q))(z)=(T_q^{(p)}(F))\Big(\frac{z}{2}\Big)\,(T_q^{(p)}(G))\Big(\frac{z}{2}\Big)\,(T_q^{(p)}(H))\Big(\frac{z}{\sqrt{2}}\Big)$$

이고

$$(T_q^{(p)}((F*(G*H)_q)_q))(z)=(T_q^{(p)}(F))\Big(\frac{z}{\sqrt{2}}\Big)\,(T_q^{(p)}(G))\Big(\frac{z}{2}\Big)\,(T_q^{(p)}(H))\Big(\frac{z}{2}\Big)$$

이므로

$$(T_q^{(p)}(((F*G)_q*H)_q)(z)\neq(T_q^{(p)}((F*(G*H)_q)_q)(z)$$

이고, (2.23) 식에 의하여

$$(((F*G)_q*H)_q)\neq((F*(G*H)_q)_q)$$

이기 때문이다. 그러나 조금 변형된 의미로 이 합성곱의 결합법칙에 관하여 생각할 수 있다. 이에 대한 자세한 내용은 [19,32] 을 참고하기 바란다.

### 2.4. 기타 형태의 함수들에 대한 변환과 합성곱

$1\le p\le 2$이고, $r\in(\frac{2p}{2p-1},\infty]$이라 하자. $L_{pr}([0,T]\times\mathbb{R})$은 $[0,T]\times\mathbb{R}$에서 정의되고 복소수 값을 갖는 르베크 측도가능한 함수 $f$로서 거의 모든 $t\in[0,T]$에 대하여 $f(t,\cdot)$가 $L_p(\mathbb{R})$에 속하고, 또 $t$의 함수로서, $\|f(t,\cdot)\|_p$가 $L_r([0,T])$에 속하는 함수들의 공간이라 하자. 그러면 $\mathcal{A}_{pr}$은, $f\in L_{pr}([0,T]\times\mathbb{R})$에 대하여

$$F(x)=\exp\Big\{\int_0^T f(t,x(t))\,dt\Big\} \tag{2.24}$$

형태로 표시되는 함수 $F$ 들의 모임이다. 이러한 형태의 함수는 양자역학에서 중요한 역할을 하며, $F(x)$는 $s$-a.e.에서 정의되고 척도불변 가측함수이다 [35].

$F$ 가 (2.24) 식과 같이 주어진 함수이면, 다음과 같이 풀어서 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}F(x)=&1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\Big[\int_0^T f(t,x(t))\,dt\Big]^n\\=&1+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Delta_n(T)}\prod_{j=1}^{n}[f(t_j,x(t_j))]^n\,d\vec{t}.\end{aligned} \tag{2.25}$$

여기서

$$\Delta_n(T)=\{(t_1,\cdots,t_n)\in[0,T]^n:0<t_1<\cdots<t_n\le T\} \tag{2.26}$$

이다. 그러므로 (2.25) 식에 푸리에-파인만 변환의 정의를 적용하고 위너적분 공식을 이용하여 계산하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다. 아래 정리들에 대한 자세한 계산과 증명은 [32] 을 참고하기 바란다.

정 리 2.14. $F \in \mathcal{A}_{pr}$이 (2.24) 식과 같이 주어진 함수이고, $1 \le p \le 2$이라 하자. 그러면 모든 실수 $q \neq 0$에 대하여 푸리에-파인만 변환 $T_q^{(p)}(F)$ 는 존재하고

$$
\begin{aligned}
(T_q^{(p)}(F))(y) =& 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Delta_n(T)} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{n} \Big[ \Big( \frac{-iq}{2\pi(t_j - t_{j-1})} \Big)^{1/2} f(t_j, u_j) \\
& \exp\Big\{ \frac{iq[(u_j - u_{j-1}) - (y(t_j) - y(t_{j-1}))]^2}{2(t_j - t_{j-1})} \Big\} \Big] \, d\vec{u} \, d\vec{t}
\end{aligned} \tag{2.27}
$$

이다. 여기서 $\Delta_n(T)$는 (2.26) 식으로 주어지는 집합이고 $t_0 = u_0 = 0$ 이다.

정 리 2.15. $F \in \mathcal{A}_{pr}$이 (2.24) 식과 같이 주어진 함수이고, $G \in \mathcal{A}_{pr}$는 $g \in L_{pr}([0,T] \times \mathbb{R})$에 대하여

$$
G(x) = \exp\Big\{ \int_0^T g(t, x(t)) \, dt \Big\}
$$

로 주어진다고 하자. 그러면 모든 실수 $q \neq 0$에 대하여 $F$와 $G$의 합성곱 $(F * G)_q$는 존재하고

$$
\begin{aligned}
& (F * G)_q(y) \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Delta_n(T)} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{n} \Big[ \Big( \frac{-iq}{2\pi(t_j - t_{j-1})} \Big)^{1/2} \exp\Big\{ \frac{iq(u_j - u_{j-1})^2}{2(t_j - t_{j-1})} \Big\} \\
& \quad \Big\{ f\Big(t_j, \frac{y(t_j) + u_j}{\sqrt{2}}\Big) g\Big(t_j, \frac{y(t_j) - u_j}{\sqrt{2}}\Big) \Big\} \Big] \, d\vec{u} \, d\vec{t}
\end{aligned} \tag{2.28}
$$

이다.

정 리 2.16. $F$와 $G$가 정리 2.15 와 같이 주어진 함수이고, $1 \le p \le 2$라 하자. 그러면, 모든 실수 $q \neq 0$에 대하여

$$
(T_q^{(p)}(F * G)_q)(z) = (T_q^{(p)}(F))\Big(\frac{z}{\sqrt{2}}\Big)(T_q^{(p)}(G))\Big(\frac{z}{\sqrt{2}}\Big) \tag{2.29}
$$

이다.

다음에는 이 장에서 다루었던 내용과 관련된 연구논문들을 간략히 소개한다.

Chang [20] 은 일반화된 브라운 운동과정에 의해 유도된 함수공간에서 (2.24) 형태로 주어지는 함수들에 대해 일반화된 푸리에-파인만 변환을 정의하고 그 성질을 연구 하였다. Feynman 과 Hibbs 는 자신들의 책 [25] 와 논문 [24] 에서, 적당한 함수 $f : [0,T]^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$에 대하여

$$F(x) = \exp\Big\{\int_0^T \int_0^T f(s,t,x(s),x(t))\,ds\,dt\Big\} \tag{2.30}$$

와 같이 표시되는 함수에 대하여 다루었다. 위에서 얻은 결과들과 비슷한 방법으로 계산하면 (2.30) 식과 같은 함수들에 대해서도 푸리에-파인만 변환과 합성곱에 관한 결과들을 얻을 수 있다 [30]. 이 형태의 함수의 파인만 적분에 관한 내용은 [9,33] 에서도 연구되었다.

Chung, Park 과 Skoug [23] 는 일반화된 파인만 적분의 개념을 도입했는데, Huffman, Park, Skoug 는 이 개념을 이용하여 [31] 에서 일반화된 푸리에-파인만 변환(generalized Fourier-Feynman transform) 과 합성곱을 정의하고 그 성질을 연구 하였으며, [47] 에서는 푸리에-파인만 조건변환(conditional Fourier-Feynman transform) 과 조건 합성곱(conditional convolution) 에 관하여 연구하였다.

Cameron 과 Storvick [6,12] 은 1차 변분(the first variation)과 파인만 적분에 관하여 연구하였으며, Park, Skoug, Storvick 등은 푸리에-파인만 변환, 합성곱, 1차 변분 사이에 성립하는 관계들에 관하여 연구하였다. 이에 관한것은 [40,48,49] 을 참고하기 바란다.

## 3. 추상 위너공간에서의 변환과 합성곱

Cameron 과 Martin [5,8] 은, 위너공간에서 푸리에-위너 변환을 소개하고 어떤 함수들에 대해서 이 변환의 존재성을 보였다. 또 그들은 파시발 관계와 프란셰렐 관계를 유도하였다. Yeh [51] 는 위너공간에서 함수들의 합성곱을 정의하고, 두 함수의 합성곱의 푸리에-위너 변환과 각각의 푸리에-위너 변환의 관계를 증명하였다. 이 절에서는 추상 위너공간에서의 푸리에-위너 변환, 푸리에-파인만 변환과 합성곱을 소개하고 이들의 성질에 관하여 알아보자.

### 3.1. 정의와 기본개념

$H$ 가 무한차원 가분 실 힐버트 공간(real separable infinite dimensional Hilbert space) 이고, 내적(inner product)은 $\langle\cdot,\cdot\rangle$, 노름(norm)은 $|\cdot|$라 표시하기로 하자. $\mu$ 가 $H$위에서

$$\mu(A)=(2\pi)^{-n/2}\int_E \exp\Big\{-\frac{|x|^2}{2}\Big\}\,dx$$

로 정의되는 Gauss 측도라 하자. 여기서 $A=P^{-1}(E)$이고 $E$는 $H$에서의 $n$차원 사영(projection) $P$의 치역에서 보렐 집합이며, $dx$는 $P(H)$에서의 르베크 측도를 의미한다. $\mu$ 는 유한 가법가능(finitely additive) 하지만 가산 가법가능(countably additive) 하지 않음을 쉽게 알 수 있다 [42]. $|||\cdot|||$을 $H$위에서 $\mu$에 대해서 가측 노름(measurable norm) 이라 하자. 그러면 $H$는 $|||\cdot|||$에 대해서는 완비(complete)가 아니므로 [42], $H$를 $|||\cdot|||$에 대해서 완비화한 집합을 $B$라 하자. $H$로 부터 $B$로의 자연 일대일 사상(natural injection)을 $i$라고 하면, $i$의 수반 작용소(adjoint operator) $i^*$는 $B^*$를 $H^*$의 조밀한(dense) 부분집합으로 연속적으로 보내준다. $H$를 $H^*$와, 그리고 $B^*$를 $i^*B^*$와 동일시(identify) 하면 $B^*\subset H^*\equiv H\subset B$를 얻을 수 있고, 모든 $x\in H$와 $y\in B^*$에 대해서 $\langle x,y\rangle=(x,y)$ 이다. 여기서 $(\cdot,\cdot)$는 $B$와 $B^*$사이의 자연 쌍대 순서쌍 (natural dual pairing) 이다. Gross 의 결과 [27] 에 의하면, $\mu\circ i^{-1}$는 $B$의 보렐 $\sigma$-대수 $\mathcal{B}(B)$ 위에서의 가산 가법가능 측도 $\nu$ 로 유일하게 확장되며, 이때 $(H,B,\nu)$를 추상 위너공간(abstract Wiener space) 이라 부르고 $H$ 를 이 추상 위너공간의 생성원(generator) 이라 한다. 또 함수 $F$ 의 추상 위너적분(abstract Wiener integral)을

$$\int_B F(x)\,d\nu(x)$$

로 표시한다.

$\{e_n: e_n\in B^*\}$을 $H$의 완비 정규 직교집합 (complete orthonormal system) 이라 하자. $h\in H$와 $x\in B$에 대해서 확률 내적(stochastic inner product) $(h,x)^\sim$을 다음과 같이 정의 하자.

$$(h,x)^\sim=\begin{cases}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^n\langle h,e_j\rangle(x,e_j), & \text{극한이 존재할 경우}\\ 0, & \text{그 이외의 경우}\end{cases}$$

Kallianpur 등 [37,38] 의 결과에 의하면

(i) $(h,x)^\sim$는 완비 정규 직교집합 $\{e_n\}$의 선택에 무관하다.

(ii) 모든 $\alpha \in \mathbb{R}, h \in H, x \in B$에 대하여

$$(\alpha h, x)^\sim = \alpha(h,x)^\sim = (h, \alpha x)^\sim.$$

(iii) 모든 $h(\neq 0)$에 대하여 $(h,\cdot)^\sim$는 평균이 0이고 분산 (variance) 이 $|h|^2$ 인 가우스 확률변수(Gaussian random variable) 이다. 즉,

$$\int_B \exp\{i(h,x)^\sim\}\, d\nu(x) = \exp\Big\{-\frac{1}{2}|h|^2\Big\}. \tag{3.1}$$

$[X]$를 실 바나하 공간 $X$의 복소화(complexification) 공간 이라 하자. 즉,

$$[X] = \{x_1 + ix_2 : x_1, x_2 \in X\}$$

이고

$$\|x_1 + ix_2\|_{[X]} = (\|x_1\|_X^2 + \|x_2\|_X^2)^{1/2}$$

이다. 편의상 $B$와 $[B]$의 노름을 모두 $\|\|x\|\|$로 나타내기로 하자.

### 3.2. 지수형 해석함수의 푸리에-위너 변환과 합성곱

먼저 추상 위너공간에서의 푸리에-위너 변환과 합성곱의 정의에 대하여 알아보자.

정 의 3.1. $F$ 가 $[B]$에서 정의된 함수라 하자. 적분

$$G_F(y) = \int_B F(x+iy)\, d\nu(x), \quad y \in [B] \tag{3.2}$$

이 존재하면 이것을 $F$의 푸리에-위너 변환(Fourier-Wiener transform)이라 한다.

위의 정의에서

$$G_F^{-1}(y) = \int_B F(x-iy)\, d\nu(x) \tag{3.3}$$

를 $F$ 의 푸리에-위너 역변환(inverse Fourier-Wiener transform) 이라 부르며, $G_F^{-1}(y) = G_F(-y)$ 임을 쉽게 알 수 있다.

정 의 3.2. $F_1$과 $F_2$가 $[B]$ 에서 정의된 함수일때, 적분

$$(F_1 * F_2)(x) = \int_B F_1\Big(\frac{y+x}{\sqrt{2}}\Big) F_2\Big(\frac{y-x}{\sqrt{2}}\Big)\, d\nu(y) \tag{3.4}$$

이 존재하면 이것을 두 함수의 합성곱(convolution) 이라 한다.

이 정의는 2.1절에서 정의했던 합성곱과는 다르다. 그 차이점 중 하나는 2.1절에서의 정의는 교환법칙이 성립하지만, 즉 $(F_1 * F_2)_\lambda = (F_2 * F_1)_\lambda$ 이지만, 위의 정의 3.2 에서는 교환법칙이 성립하지 않는다는 것이다.

다음은 우리가 이 절에서 다룰 함수들의 집합에 관하여 알아 보자.

$h \in H$ 와 $x = x_1 + ix_2 \in [B]$ 에 대하여

$$(h, x)^{\sim}_{[B]} = (h, x_1)^{\sim} + i(h, x_2)^{\sim}$$

라 하자. 그러면 $\mathcal{E}_0$ 는

$$F(x) = \Phi[(h_1, x)^{\sim}_{[B]}, \cdots, (h_n, x)^{\sim}_{[B]}] \tag{3.5}$$

형태의 함수들의 모임이다. 여기서 $\{h_1, \cdots, h_n\}$은 $B^*$의 원소로서 서로 일차독립이고, $\Phi(z_1, \cdots, z_n)$은 $n$개의 복소변수를 가진 완전(entire) 함수로서

$$|\Phi(z_1, \cdots, z_n)| \le A \exp\Big\{B \sum_{k=1}^{n} |z_k|\Big\}.$$

을 만족하는 지수형(exponential type) 이다.

$\mathcal{E}_a$ 는 다음 조건을 만족하는 함수 $F$들의 모임이다.

(i) 모든 $x, y \in [B]$에 대하여 $F(x + zy)$는 복소변수 $z$의 함수로서 완전함수이다.

(ii) 다음 조건을 만족하는 양의 상수 $A_F$와 $B_F$가 존재한다. 모든 $x \in [B]$ 에 대하여

$$|F(x)| \le A_F \exp\{B_F |||x|||\}.$$

특히 $B$가 고전 위너공간 $C_0[0, 1]$일때 $\mathcal{E}_0$는 Cameron 과 Martin 이 [8] 에서 도입했던 $E_0$를 나타내고, $\mathcal{E}_a$는 $E_m$을 포함하는 공간이다. 또 $F \in \mathcal{E}_a$는 $n \to \infty$ 일때 $|||x_n - x||| \to 0$인 $[B]$의 원소 $x$와 $x_n$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x)$를 만족한다.

이제 푸리에-위너 변환과 합성곱의 존재정리를 알아보자. 아래 정리들의 증명은 [53] 에서 볼 수 있다.

정 리 3.3. $F$가 $\mathcal{E}_0$ (또는 $\mathcal{E}_a$)에 속한다고 하면, 모든 $y \in [B]$에 대해서 푸리에-위너 변환 $G_F(y)$는 존재하고 $\mathcal{E}_0$ (또는 $\mathcal{E}_a$)에 속한다. 또, $G^{-1}_{G_F}(z) = F(z)$가 성립한다.

정 리 3.4. $F_1, F_2 \in \mathcal{E}_0$이면, 모든 $x \in [B]$에 대하여 합성곱 $(F_1 * F_2)(x)$는 존재하고 $\mathcal{E}_0$에 속한다. 또한, 합성곱 $F_1 * F_2$의 푸리에-위너 변환 $G_{(F_1 * F_2)}(z)$도

존재하고, 모든 $z \in [B]$에 대하여,

$$G_{F_1 * F_2}(z) = G_{F_1}\Big(\frac{z}{\sqrt{2}}\Big) G_{F_1}\Big(\frac{z}{\sqrt{2}}\Big) \tag{3.6}$$

이다.

이제 정리 3.4 의 결과를 $\mathcal{E}_a$로 확장하기로 하자.

$\{F_{1,n}(x)\}, F_1(x), \{F_{2,n}(x)\}, F_2(x)$ 가 다음 성질을 만족 한다고 하자.

(i) 모든 $x \in [B]$ 와 $k = 1, 2$에 대하여, $\lim_{n\to\infty} F_{k,n}(x) = F_k(x)$ 이다.

(ii) 모든 $n = 1, 2, \cdots$ 과 $k = 1, 2$에 대하여, $F_{k,n}$의 푸리에-위너 변환이 존재하고, 합성곱 $(F_{1,n} * F_{2,n})(x)$가 존재하며 합성곱의 푸리에-위너 변환도 역시 존재하며 모든 $z \in [B]$와 $n = 1, 2, \cdots$ 에 대하여

$$G_{F_{1,n} * F_{2,n}}(z) = G_{F_{1,n}}\Big(\frac{z}{\sqrt{2}}\Big) G_{F_{2,n}}\Big(\frac{z}{\sqrt{2}}\Big) \tag{3.7}$$

을 만족한다.

(iii) 모든 $n = 1, 2, \cdots$ 과 $k = 1, 2$에 대하여

$$|F_{k,n}(x)| \leq A \exp\{B|||x|||\}$$

이고 $A, B > 0$ 이다.

그러면 $F_1$과 $F_2$의 푸리에-위너변환도 존재하고, 모든 $x \in [B]$에 대하여 합성곱 $(F_1 * F_2)(x)$가 존재하고, 합성곱의 푸리에 위너 변환이 존재하며 식 (3.6)을 만족한다.

위의 결과를 이용하면 우리는 다음 정리를 얻는다 ([53]).

정 리 3.5. $(H, B, \nu)$가 추상 위너공간이라 하자. $\{\alpha_n : \alpha_n \in B^*\}$이 $H$의 완비 정규 직교집합이고, 모든 $x \in B$에 대하여, $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n, x)^{\sim}\alpha_n$이 $x$로 노름 수렴한다고 하자. 만약 $F_1, F_2 \in \mathcal{E}_a$이면, 모든 $x \in [B]$에 대하여 합성곱 $(F_1 * F_2)(x)$ 는 존재한다. 뿐만 아니라 합성곱의 푸리에-위너 변환 $G_{F_1 * F_2}(z)$도 존재하고 (3.6) 식을 만족한다.

이제 고전 위너공간이 정리 3.5 의 가정을 만족함을 보이자.

$(H, B, \nu) = (C_0'[0,1], C_0[0,1], m)$을 고전 위너공간이라 하자. 여기서

$$C_0'[0,1] = \{x \in C_0[0,1] : x(t) = \int_0^t f(s)\, ds, f \in L_2[0,1]\}$$

이고, $C_0'[0,1]$에서 내적을

$$\langle x_1, x_2\rangle = \int_0^1 \frac{dx_1}{dt}(t)\, \frac{dx_2}{dt}(t)\, dt$$

라 정의한다. $\{h_n(s)\}$을 $[0,1]$에서 완비 정규직교집합인 하 함수(Haar function) 라 하자. 그러면 $\{\alpha_n(t) = \int_0^t h_n(s)\, ds\}$는 $C_0'[0,1]$의 정규 직교기저가 되고, 모든 $x \in C_0[0,1]$에 대하여, $C_0[0,1]$의 고른위상(uniform topology)에서

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 h_n(s)\, dx(s)\, \alpha_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, x)^{\sim}\, \alpha_n(t)$$

임을 알 수 있다 [26]. 따라서 $(C_0'[0,1], C_0[0,1], m)$은 정리 3.5 의 조건을 만족한다.

다음은 파시발 관계(Parseval's relation)과 프란셰렐 관계(Plancherel relation)에 관한 결과로서 증명은 [53] 을 참고하기 바란다.

정 리 3.6. 정리 3.5 와 같은 가정에서, $F_1(x)$와 $F_2(x)$가 $\mathcal{E}_0$ 또는 $\mathcal{E}_a$에 속한다고 하자. 그러면 다음과 같은 파시발 관계가 성립한다.

$$\int_B F_1\Big(\frac{x}{\sqrt{2}}\Big)\, F_2\Big(-\frac{x}{\sqrt{2}}\Big)\, d\nu(x) = \int_B G_{F_1}\Big(\frac{x}{\sqrt{2}}\Big)\, G_{F_2}\Big(\frac{x}{\sqrt{2}}\Big)\, d\nu(x). \tag{3.8}$$

또 이것으로 부터 다음과 같은 프란셰렐 관계도 얻을 수 있다.

$$\int_B \Big|F_1\Big(\frac{x}{\sqrt{2}}\Big)\Big|^2 d\nu(x) = \int_B \Big|G_{F_1}\Big(\frac{x}{\sqrt{2}}\Big)\Big|^2 d\nu(x). \tag{3.9}$$

### 3.3. 추상 위너공간에서의 적분 변환과 합성곱

Lee [43,44,45] 는 추상 위너공간에서의 푸리에-위너 변환을 좀더 확장한 형태의 적분변환 $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$를 정의하고, 이 적분변환을 무한차원 공간에서의 미분방정식에 적용 하였다. 적분변환 $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$에 관한 다음 정의는 [45]의 내용이다.

정 의 3.7. $F$ 가 $[B]$에서 정의된 함수라 하자. 0 이 아닌 두 복소수 $\alpha$와 $\beta$에 대하여 적분

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta}F(y) = \int_B F(\alpha x + \beta y)\, d\nu(x), \quad y \in [B] \tag{3.10}$$

이 존재하면 이것을 $F$의 적분변환 $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}F$라 한다.

위의 적분변환에서 $\alpha = \sqrt{c}$ $(c > 0)$이고 $\beta = i$일 경우 $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$는 푸리에-위너 $c$-변환 이며 [43], 특히 $c = 1$ 일때는 3.2절에서 다룬 푸리에-위너 변환이다. $\alpha = i$ 이고 $\beta = 1$ 일때는 가우스 변환(Gauss transform)이며 이때 $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}F$는 $\sigma F$로 나타낸다 ([28]). 또 $\alpha = (-iq)^{-1/2}$ $(q > 0)$이고 $\beta = 1$ 일때는 2장에서 다루었던 푸리에-파인만 변환이라 볼 수 있다. 또, $F$가 $\mathcal{E}_0$또는 $\mathcal{E}_a$에 속하면 모든 $y \in [B]$에 대하여 적분변환 $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}F(y)$는 존재하고 $F$와 같은 집합에 속함을 알 수 있다.

정 의 3.8. $F_1$과 $F_2$가 $[B]$에서 정의된 함수라 하자. 0 이 아닌 복소수 $\alpha$ 에 대하여 적분

$$(3.11) \qquad (F_1 * F_2)_\alpha(x) = \int_B F_1\Big(\frac{y+\alpha x}{\sqrt{2}}\Big)F_2\Big(\frac{y-\alpha x}{\sqrt{2}}\Big)\,d\nu(y) \quad y \in [B]$$

이 존재하면 $(F_1 * F_2)_\alpha$를 매개변수 $\alpha$를 갖는 $F_1$과 $F_2$ 의 합성곱이라 한다.

다음 정리는 두 함수의 합성곱의 적분변환과 각각의 적분변환과의 관계에 대한 성질로서 [18] 의 내용이다.

정 리 3.9. $\alpha$와 $\beta$가 0 이 아닌 복소수라 하자. $F_1, F_2 \in \mathcal{E}_0$이면, 모든 $z \in [B]$에 대하여 합성곱 $(F_1 * F_2)_\alpha(z)$는 존재하고 $\mathcal{E}_0$에 속한다. 또, $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(F_1 * F_2)_\alpha(z)$도 존재하고, 모든 $z \in [B]$에 대하여,

$$(3.12) \qquad \mathcal{F}_{\alpha,\beta}(F_1 * F_2)_\alpha(z) = \mathcal{F}_{\alpha,\beta}F_1\Big(\frac{z}{\sqrt{2}}\Big)\mathcal{F}_{\alpha,\beta}F_2\Big(\frac{z}{\sqrt{2}}\Big)$$

이다.

정 리 3.10. $(H, B, \nu)$가 추상 위너공간이고 $\alpha$와 $\beta$가 0 이 아닌 복소수라 하자. $\{e_n\}$이 $H$에서 완비 정규 직교집합이라 하고, 모든 $x \in B$에 대하여, $\sum_{n=1}^{\infty}(e_n, x)^{\sim}e_n$이 $x$로 노름 수렴한다고 하자. 만약 $F_1, F_2 \in \mathcal{E}_a$ 이면, 모든 $x \in [B]$에 대하여 합성곱 $(F_1 * F_2)_\alpha(x)$는 존재한다. 뿐만 아니라 합성곱의 적분변환 $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(F_1 * F_2)_\alpha(z)$도 존재하고 (3.12) 식을 만족한다.

### 3.4. 추상 위너공간에서의 푸리에-파인만 변환과 합성곱

$M(H)$는 $H$에서 정의된 복소수 값을 갖는 가산가법가능한 보렐측도들의 공간이라 하자. 그러면 전변동 노름(total variation norm)을 노름 $\|\cdot\|$로 하고, 측도의 합성(convolution)을 곱으로 간주하면 $M(H)$는 항등원(identity)을 갖고있는 가환 바나하 대수(commutative Banach algebra)가 된다 [3].

추상 위너공간에서의 척도불변 가측집합, 척도불변 영집합, 척도불변 거의 모두, 척도 불변 가측함수의 정의와 위너 해석적분, 파인만 해석적분의 정의는 2장에서 설명한 고전 위너공간에서의 정의와 유사하다. 추상 위너공간에서의 푸리에-파인만 변환과 합성곱에 대한 기호와 정의도 고전 위너공간에서와 유사하므로 생략 한다. 이에 대한 자세한 정의는 [1,21,37] 등을 참고하기 바란다.

다음은 이 절에서 다룰 함수들의 모임인 프레넬 족 $\mathcal{F}(B)$에 대해 알아보자. $\mathcal{F}(B)$는 $M(H)$에 속하는 측도의 확률 푸리에 변환(stochastic Fourier transform)의 동치족(equivalence class)의 모임을 말한다. 즉,

$$\mathcal{F}(B) = \{[F] : F(x) = \int_H \exp\{i(h,x)^\sim\}\, d\sigma(h), x \in B, \sigma \in M(H)\}$$

이다. 관례대로, 하나의 $s$-동치족에 속하는 함수들은 같은 함수로 취급하여 $\mathcal{F}(B)$ 는 동치족들의 모임이라기 보다는 함수들의 모임으로 본다.

$F \in \mathcal{F}(B)$와 $\sigma \in M(H)$가

$$F(x) = \int_H \exp\{i(h,x)^\sim\}\, d\sigma(h), \quad x \in B \tag{3.13}$$

와 같이 관계 되어있을 때, $\mathcal{F}(B)$는 노름을 $\|F\| = \|\sigma\|$으로 주면 바나하 대수가 되고 사상 $\sigma \mapsto F$는 바나하 대수 동형사상(Banach algebra isomorphism)이다 [37,38]. 또 프레넬 족 $\mathcal{F}(B)$ 는 고전 위너공간에서는 2.3절에서 소개한 바나하 대수 $\mathcal{S}$에 해당되며 $\mathcal{F}(B)$에 대한 다른 연구들은 [2,16] 을 참고하기 바란다.

$F \in \mathcal{F}(B)$가 (3.13) 식과 같이 주어진 함수일때, $F$의 위너 해석적분과 파인만 해석적분을 계산하면

$$\int_B^{anw_\lambda} F(x)\, d\nu(x) = \int_H \exp\Big\{-\frac{1}{2\lambda}|h|^2\Big\}\, d\sigma(h), \tag{3.14}$$

$$\int_B^{anf_q} F(x)\, d\nu(x) = \int_H \exp\Big\{-\frac{i}{2q}|h|^2\Big\}\, d\sigma(v) \tag{3.15}$$

임을 알 수 있다.

다음으로 $F \in \mathcal{F}(B)$에 대한 $L_p$ 푸리에-파인만 해석변환과 합성곱의 존재 정리에 대하여 알아보자. 다음 정리들은 [39] 의 내용이다.

정 리 3.11. $F \in \mathcal{F}(B)$가 (3.13) 식과 같이 주어진 함수이고, $1 \le p \le 2$라 하자. 그러면 모든 실수 $q \neq 0$에 대하여 $F$의 $L_p$ 푸리에-파인만 해석변환

$T_q^{(p)}(F)$는 존재하고 $s$-a.e. $y \in B$에 대하여

$$(3.16) \qquad (T_q^{(p)}(F))(y) = \int_H \exp\Big\{ i(h,y)^\sim - \frac{i}{2q}|h|^2 \Big\}\, d\sigma(h)$$

이다.

정 리 3.12. $F$와 $G$가 $\mathcal{F}(B)$의 원소이고 $F$와 $G$에 대응되는 유한 보렐 측도는 $\sigma, \rho \in M(H)$라 하자. 그러면 모든 실수 $q \neq 0$에 대하여 $F$와 $G$의 합성곱 $(F * G)_q$는 존재하고 $\mathcal{F}(B)$의 원소이며, $s$-a.e. $y \in B$에 대하여

$$(3.17) \quad (F * G)_q(y) = \int_{H^2} \exp\Big\{ \frac{i}{\sqrt{2}}(h+k,y)^\sim - \frac{i}{4q}|h-k|^2 \Big\}\, d\sigma(h)\, d\rho(k)$$

이다.

정 리 3.13. $F$와 $G$가 정리 3.12 에서와 같이 주어진 함수이고, $1 \le p \le 2$라 하자. 그러면 모든 실수 $q \neq 0$와 $s$-a.e. $z \in B$에 대하여

$$(3.18) \qquad (T_q^{(p)}(F * G)_q)(z) = (T_q^{(p)}(F))\Big(\frac{z}{\sqrt{2}}\Big)\, (T_q^{(p)}(G))\Big(\frac{z}{\sqrt{2}}\Big)$$

이다.

$\mathcal{F}(B)$ 에 속하는 함수의 푸리에-파인만 변환에 관한 다른 결과들과 파시발 항등식 등에 관한 결과는 [39] 에서 볼 수 있다.

### 3.5. $\mathcal{F}_{A_1,A_2}$ 에서의 푸리에-파인만 변환과 합성곱

1984년 Kallianpur와 Bromley [37] 는 프레넬 족 $\mathcal{F}(B)$보다 확장된 집합이라 할 수 있는 $\mathcal{F}_{A_1,A_2}$를 소개하고 $\mathcal{F}_{A_1,A_2}$에 속하는 함수에 대한 파인만 해석적분의 존재성을 보였다.

이 절에서는 추상 위너 곱공간(product abstract Wiener space)에서의 $L_p$ 푸리에-파인만 해석변환과 합성곱을 소개하고 $\mathcal{F}_{A_1,A_2}$에 속하는 함수들에 대한 푸리에-파인만 변환과 합성곱에 관하여 알아보자.

추상 위너 곱공간에서의 척도불변 가측집합, 척도불변 영집합, 척도불변 거의모두, 척도불변 가측함수, 위너 해석적분, 파인만 해석적분등의 정의는 2.1절의 고전 위너공간에서의 정의나 3.4절의 추상 위너공간에서의 경우와 유사하다. 따라서 여기에서는 생략한다. 자세한 정의는 [17,37,52]에서 볼 수 있다.

다음 정의는 추상 위너 곱공간에서의 푸리에-파인만 변환과 합성곱에 대한 정의로서 정의 2.3과 정의 2.4를 확장한 것이다 ([17]).

정 의 3.14. $q_1$과 $q_2$가 0 아닌 실수라 하고, $1 < p \leq 2$라 하자. 극한

$$(3.19) \qquad (T_{\vec{q}}^{(p)}(F))(y_1, y_2) = \underset{\vec{\lambda} \to (-iq_1, -iq_2)}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} (w_s^{p'})(T_{\vec{\lambda}}(F))(y_1, y_2)$$

가 존재하면 $T_{\vec{q}}^{(p)}(F)$를 $F$의 $L_p$ 푸리에-파인만 해석변환 ($L_p$ analytic Fourier-Feynman transform)이라 한다. 또, $s$-a.e. $(y_1, y_2) \in B^2$에 대하여, 극한

$$(3.20) \qquad (T_{\vec{q}}^{(1)}(F))(y_1, y_2) = \lim_{\vec{\lambda} \to (-iq_1, -iq_2)} (T_{\vec{\lambda}}(F))(y_1, y_2)$$

가 존재하면 $T_{\vec{q}}^{(1)}(F)$ 를 $F$의 $L_1$ 푸리에-파인만 해석변환 ($L_1$ analytic Fourier-Feynman transform) 이라 한다.

정 의 3.15. $F$와 $G$가 $B^2$에서 정의된 함수라 하자. $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$이고 $\lambda_1$과 $\lambda_2$가 $\mathbb{C}_+$의 복소수 일때, 적분

(3.21)

$$\begin{aligned}&(F * G)_{\vec{\lambda}}(y_1, y_2)\\ &= \int_{B^2}^{anw_{\vec{\lambda}}} F\Big(\frac{y_1 + x_1}{\sqrt{2}}, \frac{y_2 + x_2}{\sqrt{2}}\Big)\, G\Big(\frac{y_1 - x_1}{\sqrt{2}}, \frac{y_2 - x_2}{\sqrt{2}}\Big)\, d(\nu \times \nu)(x_1, x_2)\end{aligned}$$

가 존재하면, 이것을 $F$와 $G$의 합성곱(convolution product) 이라 한다. $\vec{q} = (q_1, q_2)$이고 $q_1$과 $q_2$가 0이 아닌 실수일때 두 함수의 합성곱은

(3.22)

$$\begin{aligned}&(F * G)_{\vec{q}}(y_1, y_2)\\ &= \int_{B^2}^{anf_{\vec{q}}} F\Big(\frac{y_1 + x_1}{\sqrt{2}}, \frac{y_2 + x_2}{\sqrt{2}}\Big)\, G\Big(\frac{y_1 - x_1}{\sqrt{2}}, \frac{y_2 - x_2}{\sqrt{2}}\Big)\, d(\nu \times \nu)(x_1, x_2)\end{aligned}$$

라 정의한다.

다음으로 일반화된 프레넬 족 $\mathcal{F}_{A_1, A_2}$에 대하여 알아보자. $A_1$과 $A_2$가 유계이고, 음이아닌 자기수반 작용소(bounded, non-negative self-adjoint operator) 일때, $\mathcal{F}_{A_1, A_2}$는 $\sigma \in M(H)$에 대하여

$$(3.23) \qquad F(x_1, x_2) = \int_H \exp\{[(A_1^{1/2}h, x_1)^{\sim} + (A_2^{1/2}h, x_2)^{\sim}]\}\, d\sigma(h)$$

형태로 주어지는 함수 $F$의 $s$-동치족들의 공간이다.

$\mathcal{F}(B)$ 의 경우와 마찬가지로, $s$-동치족에 속하는 함수들은 같은 함수로 간주하여, $\mathcal{F}_{A_1, A_2}$ 는 동치족들의 모임이라기 보다는 함수들의 모임으로 생각한다. 또 $F$가 (3.23) 과 같이 정의되어 있을때 $A_1 + A_2$의 치역이 $H$에서 조밀(dense)

할 경우에는 사상 $\sigma \mapsto [F]$ 는 $M(H)$와 $\mathcal{F}_{A_1,A_2}$ 사이의 대수 동형사상(algebra isomorphism)이 되고, $\mathcal{F}_{A_1,A_2}$에서 노름을 $\|F\| = \|\sigma\|$로 택했을때 바나하 대수가 된다 [37]. 또, $A_1$이 $H$에서의 항등 작용소(identity operator)이고 $A_2 = 0$ 이면 $\mathcal{F}_{A_1,A_2}$ 는 실질적으로는 $\mathcal{F}(B)$와 같다.

다음 정리들은 $\mathcal{F}_{A_1,A_2}$에서의 푸리에-파인만 변환과 합성곱에 관한 정리들로서 [17] 의 내용이다.

정 리 3.16. $F \in \mathcal{F}_{A_1,A_2}$가 (3.23) 식과 같이 주어진 함수이고, $1 \le p \le 2$ 라 하자. 또, $\vec{q} = (q_1, q_2)$이고 $q_1$과 $q_2$는 0이 아닌 실수라 하자. 그러면 $F$의 $L_p$ 푸리에-파인만 해석변환 $T_{\vec{q}}^{(p)}(F)$는 존재하며 $\mathcal{F}_{A_1,A_2}$ 에 속하고, $s$-a.e. $(y_1, y_2) \in B^2$ 에 대하여

$$
\begin{aligned}
(T_{\vec{q}}^{(p)}(F))(y_1,y_2) = \int_H \exp\Big\{ & i[(A_1^{1/2}h, y_1)^\sim + (A_2^{1/2}h, y)^\sim] \\
& - \frac{i}{2q_1}|A_1^{1/2}h|^2 - \frac{i}{2q_2}|A_2^{1/2}h|^2 \Big\}\, d\sigma(h)
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

이다.

정 리 3.17. $F$와 $G$가 $\mathcal{F}_{A_1,A_2}$의 원소이고, $F$와 $G$에 대응되는 유한 보렐 측도는 $\sigma, \rho \in M(H)$라 하자. $\vec{q} = (q_1, q_2)$이고 $q_1$과 $q_2$가 0이 아닌 실수이면 $F$와 $G$의 합성곱 $(F * G)_{\vec{q}}$는 존재하고 $\mathcal{F}_{A_1,A_2}$에 속하며, $s$-a.e. $(y_1, y_2) \in B^2$에 대하여

(3.25)
$$
\begin{aligned}
(F * G)_{\vec{q}}(y_1,y_2) = \int_{H^2} \exp\Big\{ & \frac{i}{\sqrt{2}}[(A_1^{1/2}(h+k), y_1)^\sim + (A_2^{1/2}(h+k), y_2)^\sim] \\
& - \frac{i}{4q_1}|A_1^{1/2}(h-k)|^2 - \frac{i}{4q_2}|A_2^{1/2}(h-k)|^2 \Big\}\, d\sigma(h)\, d\rho(k)
\end{aligned}
$$

이다.

정 리 3.18. $F$와 $G$가 정리 3.17 에서와 같이 주어진 함수이고, $1 \le p \le 2$라 하자. 또, $\vec{q} = (q_1, q_2)$이고 $q_1$과 $q_2$는 0이 아닌 실수라 하자. 그러면 $s$-a.e. $(z_1, z_2) \in B^2$에 대하여 $(T_{\vec{q}}^{(p)}(F * G)_{\vec{q}})(z_1, z_2)$는 존재하고

$$
(T_{\vec{q}}^{(p)}(F * G)_{\vec{q}})(z_1,z_2) = (T_{\vec{q}}^{(p)}(F))\Big(\frac{z_1}{\sqrt{2}}, \frac{z_2}{\sqrt{2}}\Big)\,(T_{\vec{q}}^{(p)}(G))\Big(\frac{z_1}{\sqrt{2}}, \frac{z_2}{\sqrt{2}}\Big) \tag{3.26}
$$

이다.

마지막으로 3장에서 다루었던 내용과 관련된 논문들을 간략히 소개한다. 3.2절의 푸리에-위너 변환에 대한 다른 결과들은 Yoo 의 [53] 에서 볼수 있는데, 이것은 Yeh [51] 의 결과를 확장한 것이다. 적분변환 $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$를 무한차원 공간에서의 미분방정식에 적용하여 얻은 여러가지 결과에 대해서는 Lee 의 논문 [43,44,45] 를 참고하고, 이 적분변환과 합성곱의 여러 성질에 관해서는 [18] 을 참고하기 바란다.

Ahn [1] 은 프레넬 족 $\mathcal{F}(B)$의 함수들의 $L_1$ 푸리에-파인만 변환에 관한 결과들을 얻었으며, 추상 위너공간 위에서의 1차변분에 관한 결과는 [39] 에서 볼 수 있다. 일반화된 프레넬 족 $\mathcal{F}_{A_1,A_2}$ 에 대한 연구는 [37,52] 에서 볼 수 있으며, [17] 에서는 푸리에-파인만 변환과 합성곱에 관한 기존의 결과들 [1,30,39] 을 확장하였다.

## References


[1] J. M. Ahn, $L_1$ *analytic Fourier-Feynman transform on the Fresnel class of abstract Wiener space*, Bull. Korean Math. Soc. **35** (1998), 99-117.

[2] J. M. Ahn, G. W. Johnson and D. L. Skoug, *Functions in the Fresnel class of an abstract Wiener spaces*, J. Korean Math. Soc. **28** (1991), 245-265.

[3] S. Albeverio and R. Høegh-Krohn, *Mathematical theory of Feynman path integrals*, Lecture Notes in Math. 523, Springer-Verlag, Berin, 1976.

[4] M. D. Brue, *A functional transform for Feynman integrals similar to the Fourier transform*, thesis, Univ. of Minnesota, Minneapolis, 1972.

[5] R. H. Cameron, *Some examples of Fourier-Wiener transforms of analytic functionals*, Duke Math. J. **12** (1945), 485-488.

[6] ______, *The first variation of an indefinite Wiener integral*, Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951), 914-924.

[7] ______, *A family of integrals serving to connect the Wiener and Feynman integrals*, J. Math. Phys. **39** (1960), 126-140.

[8] R. H. Cameron and W. T. Martin, *Fourier-Wiener transforms of analytic functionals*, Duke Math. J. **12** (1945), 489-507.

[9] R. H. Cameron and D. A. Storvick, *An operator valued function space integral applied to multiple integrals of functions of class* $L_1$, Nagoya Math. J. **51** (1973), 91-122.

[10] ______, *An* $L_2$ *analytic Fourier-Feynman transform*, Michigan Math. J. **23** (1976), 1-30.

[11] ______, *Some Banach algebras of analytic Feynman integrable functionals*, Analytic functions, (Kozubnik, 1979), Lecture Notes in Math., 798, pp. 18-67, Springer, Berlin, 1980.

[12] ______, *Feynman integral of variations of functions*, in Gaussian random fields, World Scientific, Singapore (1991), 144-157.

[13] K. S. Chang, *Scale-invariant measurability in Yeh-Wiener space*, J. Korean Math. Soc. **19** (1982), 61-67.
[14] K. S. Chang, G. W. Johnson and D. L. Skoug, *The Feynman integral of quadratic potentials depending on two time variables*, Pacific J. Math. **122** (1986), 11-33.
[15] ______, *Functions in the Banach algebra $\mathcal{S}(\nu)$*, J. Korean Math. Soc. **24** (1987), 151-158.
[16] ______, *Functions in the Fresnel class*, Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 309-318.
[17] K. S. Chang, B. S. Kim and I. Yoo, *Analytic Fourier-Feynman transform and convolution of functionals on abstract Wiener space*, to appear in Rocky Mountain J. Math.
[18] ______, *Integral transform and convolution of analytic functionals on abstract Wiener space*, to appear in Numer. Func. Anal. and Optim.
[19] ______, *Fourier-Feynman transform, convolution and first variation of functionals on abstract Wiener space*, submitted.
[20] S. J. Chang, *Convolution product and generalized analytic Fourier-Feynman transforms*, Comm. Korean Math. Soc. **11** (1996), 707-723.
[21] D. M. Chung, *Scale-invariant measurability in abstract Wiener spaces*, Pacific J. Math. **130** (1987), 27-40.
[22] D. M. Chung and H. T. Hwang, *Cylinder functions in the Fresnel class of functions on abstract Wiener spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **115** (1992), 381-388.
[23] D. M. Chung, C. Park and D. Skoug, *Generalized Feynman integrals via conditional Feynman integrals*, Michigan Math. J. **40** (1993), 377-391.
[24] R. P. Feynman, *Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics*, Rev. Mod. Phys. **20** (1948), 367-387.
[25] R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum mechanics and path integrals*, McGraw-Hill, New York, 1965.
[26] H. C. Finlayson, *Measurability of norm proved by Haar functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **53** (1975), 334-336.
[27] L. Gross, *Abstract Wiener spaces*, Proc. 5th Berkley Sym. Math. Stat. Prob. **2** (1965), 31-42.
[28] T. Hida, *Stationary stochastic processes*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970.
[29] T. Huffman, C. Park and D. Skoug, *Analytic Fourier-Feynman transforms and convolution*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 661-673.
[30] ______, *Convolutions and Fourier-Feynman transforms of functionals involving multiple integrals*, Michigan Math. J. **43** (1996), 247-261.
[31] ______, *Generalized transforms and convolutions*, Internat. J. Math. and Math. Sci. **20** (1997), 19-32.
[32] ______, *Convolution and Fourier-Feynman transforms*, Rocky Mountain J. Math. **27** (1998), 827-841.
[33] G. W. Johnson and D. L. Skoug, *The Cameron-Storvick function space integral: an $L(L_p, L_{p'})$ theory*, Nagoya Math. J. **60** (1976), 93-137.

[34] ———, *An $L_p$ analytic Fourier-Feynman transform*, Michigan Math. J. **26** (1979), 103-127.
[35] ———, *Scale-invariant measurability in Wiener space*, Pacific J. Math. **83** (1979), 157-176.
[36] ———, *Notes on the Feynman integral II*, J. Func. Anal. **41** (1981), 277-289.
[37] G. Kallianpur and C. Bromley, *Generalized Feynman integrals using analytic continuation in several complex variables*, in "Stochastic Analysis and Application (ed. M. H. Pinsky)", Marcel-Dekker Inc., New York, 1984.
[38] G. Kallianpur, D. Kannan and R. L. Karandikar, *Analytic and sequential Feynman integrals on abstract Wiener and Hilbert spaces and a Cameron-Martin formula*, Ann. Inst. Henri. Poincaré **21** (1985), 323-361.
[39] B. S. Kim, *Integral transform of analytic Feynman integrable functionals on abstract Wiener space*, Thesis, Yonsei University, 1998.
[40] J. G. Kim, J. W. Ko, C. Park and D. Skoug, *Relationships among transforms, convolutions, and first variation*, Internat. J. Math. and Math. Sci. **22** (1999), 191-204.
[41] J. Kuelbs, *Abstract Wiener spaces and applications to analysis*, Pacific J. Math. **31** (1969), 433-450.
[42] H. H. Kuo, *Gaussian measures in Banach spaces*, Lecture Notes in Math. 463, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
[43] Y. J. Lee, *Applications of the Fourier-Wiener transform to differential equations on infinite demendional spaces.I*, Trans. Amer. Math. Soc. **262** (1980), 259-283.
[44] ———, *Applications of the Fourier-Wiener transform to differential equations on infinite demendional spaces.II*, J. Differential Equations **41** (1981), 59-86.
[45] ———, *Integral transforms of analytic functions on abstract Wiener spaces*, J. Func. Anal. **47** (1982), 153-164.
[46] C. Park and D. Skoug, *The Feynman integral of quadratic potentials depending on n time variables*, Nagoya Math. J. **110** (1988), 151-162.
[47] ———, *Conditional Fourier-Feynman transforms and conditional convolution product*, preprint.
[48] C. Park, D. Skoug and D. Storvick, *Fourier-Feynman transforms and the first variation*, Rendiconti Del. Circolo Matematico Di Palermo (1998), 277-292.
[49] ———, *Relationships among the first variation, the convolution product, and the Fourier-Feynman transform*, Rocky Mountain J. Math. **28** (1998), 1447-1468.
[50] E. M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier analisis on Euclidean spaces*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.
[51] J. Yeh, *Convolution in Fourier-Wiener transform*, Pacific J. of Math. **15** (1965), 731-738.
[52] I. Yoo, *Notes on a generalized Fresnel class*, Appl. Math. Optim. **30** (1994), 225-233.
[53] ———, *Convolution and the Fourier-Wiener transform on abstract Wiener space*, Rocky Mountain J. Math. **25** (1995), 1577-1587.

장건수
연세대학교 이과대학 수학과
서울 서대문구 신촌동 134
*E-mail*: kunchang@yonsei.ac.kr

유 일
연세대학교 문리대학 수학과
강원도 원주시 흥업면 매지리 234
*E-mail*: iyoo@dragon.yonsei.ac.kr

김병수
연세대학교 이과대학 수학과
서울 서대문구 신촌동 134
*E-mail*: byoungsoo@math.yonsei.ac.kr