大韓數學敎育學會誌 數學敎育學硏究 第 10 卷 第 2 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. Ⅸ, No.2, 247-262. Dec 2000

# 수열의 극한 개념에 대한 인지적 장애의 극복 방안 연구

박 선 화*

## 1. 서 론

극한 개념은 무한 근사 과정의 최종 산물로 정의되는 대상을 수학화한 개념으로, 무한 개념 및 무한 개념을 토대로 하는 개념들을 이해하는 데에 기초가 되는 개념이다. 또한 극한 개념은 함수 개념에 대한 이해를 증진시키고, 방정식의 해를 구하는 문제나 수 개념의 이해 등에서도 매우 중요한 역할을 한다. 특히 극한 개념은 오늘날 수학뿐만 아니라 물리학·생물학 등과 같은 자연과학 및 공학 분야, 경제학·심리학을 비롯한 사회과학 분야에서 기본적인 도구적 지식으로 인식되는 미적분학의 논리적 기초가 되는 개념으로, 이들 분야와 관련된 직업을 선택하거나 관련된 학문을 연마하는 데에 그 이해가 필수적이다.

우리 나라에서는 극한 개념을 대학 진학을 준비하는 인문계 고등학교 2학년 수학 I에서 명시적으로 지도하고 있다. 이것은 금세기 초에 Perry와 Klein 등이 주도한 수학교육 개혁 운동의 영향에 의한 것이다. 그들은 응용성이 강하고 교육적 가치가 풍부한 미적분법을 고등학교에서 지도할 것을 주장하였고, 이에 따라 우리 나라에서는 미적분법과 그의 논리적 기초 개념인 극한 개념을 고등학교 때부터 지도하게 되었다(김응태·김연식, 1985). 그러나 엄밀한 수준의 극한 개념은 매우 어렵기 때문에 우리 나라 고등학교에서는 직관적인 비형식적 극한 개념을 중심으로 지도하고[1], 그 위에서 극한값 계산, 그리고 극한 개념의 응용으로서 무한급수의 합, 함수의 연속성, 미분계수, 도함수, 정적분 등 미적분학의 주요 개념들을 지도해왔다.[2]

그런데, 학교 수학에서 극한 개념 및 미적분학의 학습이 매우 강조됨에도 불구하고, 학생들의 극한 개념의 이해를 조사한 국내외 연구 결과들에 따르면, 학생들은 극한 개념을 이해하는 데에 많은 어려움을 겪고 있고 다양한 유형의 오개념을 갖고 있다(Davis & Vinner, 1986; Dreyfus, 1990; Fischbein et al., 1979; Orton, 1983a, 1983b; Sierpinska, 1985, 1987; Tall, 1986; Tall & Schwarzenberger, 1978; Tall & Vinner, 1981; Williams, 1989, 1991; 한종희, 1997; 박선화, 1998). 학생들이 겪는 어려움이나 오개념은 학생들의 학습 부진의 원인이 되고

---

* 삼성고등학교

1) 제 2차 교육과정기의 수학 I의 지도 내용에 대한 설명 중에는 "수열의 극한에 대해서는 직관적으로 취급하고, 수렴, 발산의 의미를 이해시킨다(박한식, 1982, p. 186)"라는 지도 관점이 제시되어 있는데, 그 이후 지금까지 이 지도 원리는 변한 바가 없다.

2) 본 연구에서는 고등학교 수학에서의 극한의 정의를 간단히 '직관적 정의' 또는 '직관적인 개념'이라고 하고, 대학 수학에서의 극한의 정의는 '형식적 정의' 또는 '형식적인 개념', 또는 '$\varepsilon$-$\delta$식 정의'로 부르기로 한다.

더 나아가 이들 개념을 필요로 하는 다양한 학문이나 직업세계로 나아가는 것을 좌절시키는 주요 원인이 되기도 한다. 특히 학생들의 오개념은, Radatz(1980)도 지적했듯이, 교사가 교육적으로 관여하지 않으면 학교 교육 기간 내내 지속되어 관련있는 상급 교육에서의 지체나 부진의 주된 원인이 되기도 한다. 따라서 학생들의 극한 개념의 이해를 돕거나 개선하고자 하는 교사들은 학생들이 극한 개념의 이해에서 어려움을 겪는 원인이나 그들이 갖는 오개념의 유형 및 오개념 형성에 영향을 주는 요인을 분석하고 그것들에 대한 교수학적 처치를 가하는 노력을 기울이는 것이 필요하다.

학생들의 오개념은 수학적으로 틀린 개념이거나 제한된 영역에서만 성립하는 개념으로서, 학생들이 새로운 지식을 받아들이거나 기존 개념의 적용영역을 확장시키고자 할 때 장애가 된다. 이런 의미에서 학생들의 오개념은 인지적 장애라고 할 수 있다.

본 연구자는 이전의 논문(1998)에서 우리 나라 고등학교 학생들이 갖기 쉬운 극한 개념에 대한 인지적 장애를 분석하고 그러한 장애 형성에 영향을 주는 요인을 분석한 바 있다. 그에 이어서, 본 연구에서는 고등학교 학생들의 극한 개념의 이해 개선을 시도하기 위한 방안의 하나로서 학생들의 인지적 장애를 극복하는 방안을 모색해 보고자 한다. 한편, 본 연구에서는 고등학교 학생들의 극한 개념의 이해 개선에 초점을 두고 있으므로, 고등학교에서 가르쳐지는 비형식적 극한 개념을 중심으로 논의하고, 장애 극복 방안도 현재의 고등학교 수준에 맞추어 제시하고자 한다.

## 2. 인지적 장애의 극복 모델에 대한 이론적 탐색

전통적으로 교사들은 학생들의 개념의 이해를 향상시키기 위해서, 주어진 개념을 거듭 반복해서 설명하거나 많은 예제 문제를 풀어보게 하는 방법을 주로 사용해 왔다. 그런데 이런 방법은 학생들의 개인적인 지식의 형성은 백지에 글을 써 가듯이, 또는 녹음기에 말을 녹음하듯이 누적적이고 연합적으로 형성되는 것으로 바라보는 행동주의 심리학 이론에 근거한 것이다(Davis & Vinner, 1986). 이 이론에 따르면 학생들이 오개념을 갖고 있을 때 오개념을 교정하는 방법은 오개념과 연합되어 있는 본드의 강도를 약화시키고 새로운 옳은 지식의 본드를 반복해서 강화시킨다면, 올바른 개념이 형성되어야 한다. 그러나 실제로 학생들의 개념의 이해를 연구한 여러 연구들에 따르면, 어느 정도 시간이 흐른 후 학생들은 유사한 문제 상황에서 다시 오래된 이전의 개념을 떠올린다는 것이다. 그 오래된 개념은 쉽게 제거되지 않고 끊임없이 거듭해서 되살아나서 학생들의 옳은 개념의 적용을 방해한다는 것이다. 그 이유를 최근의 피아제를 중심으로 한 인지 심리학 이론에서는 다음과 같이 적절하게 설명하고 있다.

학생들이 새로운 지식을 형성하게 되는 것은 자극과 반응의 본드 결합에 의한 것이 아니라, 자신의 기존의 인지 구조에 새로운 개념을 동화시키거나 새로운 개념을 받아들이기에 적절하도록 기존의 인지구조를 조절하여 지식의 관계망을 형성하였음을 의미하는 것이다(우정호 외 2인, 1989; Skemp, 1987). 따라서 학생들의 오개념은 이미 학생들의 기존의 인지 구조와 적절하게 관계망을 형성하고 있는 학생들의 지식의 일부분이기 때문에 단순히 그와 반대되는 새로운 자극이 가해진다고 해서 기존의 지식을 버리고 새 지식을 받아들이는 것이 아니라, 오히려 기존의 인지구조와 적절히 관련맺기 어려

운 새로운 개념을 거부하는 일이 일어나기가 더 쉬워진다는 것이다. 이처럼 새로운 개념을 받아들이는 데에 방해가 되는 기존의 지식을 Bachelard는 인지적 장애라고 말하고 있다. 따라서 학생들이 새로운 개념에 대해 인지적 장애를 갖고 있을 때에는 그 장애를 극복하지 않고서는 올바른 개념의 이해가 일어나기 어렵게 된다.

한편, Rumelhart와 Norman(1978)은 지식의 획득을 기술하는 분류 도식으로서 자연증가(accretion)와 조율(tuning), 그리고 재구조화(restructuring)를 들고 있다. 그들은 "사실 학습의 정상적인 종류로서 우리 대부분이 하고 있는 일상적인 정보의 축적"을 '자연증가'라고 하고, "우리가 새로운 정보를 해석하기 위해 사용하는 바로 그 범주에서의 실제적인 변화"를 '조율'이라고 지칭한다. 한편, '재구조화'는 "새로운 정보를 해석하기 위해 그리고 이미 저장된 정보에 새로운 조직을 부과하기 위해 새 구조가 고안될 때 일어나는 것"을 말한다(Williams, 1989에서 재인용). 이것을 Piaget의 용어와 관련지어 설명하면, 자연증가는 동화, 즉 새 지식을 기존의 지식 구조에 통합시키는 것이라고 할 수 있다. 반면, 조율과 재구조화는 조절의 여러 정도, 즉 새로운 지식에 더 잘 맞도록 기존의 지식 구조를 변경하는 여러 수준으로써 묘사될 수 있다. 이것은 과학적 지식의 발달을 패러다임의 변화로 설명한 Kuhn의 이론과도 적절히 관련지을 수 있다. 즉, 자연증가와 조율은 정상과학으로서 생각될 수 있지만 재구조화는 패러다임 이동과 더 유사한 것으로 볼 수 있다. 이러한 사실들은 개념의 이해라는 것이 기존의 지식구조의 변경을 의미하며, 그것이 때로는 다소 온건하게 때로는 다소 급진적으로 일어나는 것임을 의미한다.

학생들은 긴 학습 기간 동안 다양한 경험을 통해 새로운 지식과 관련된 많은 선행 지식이나 자생적 관념을 가지고 있고, 이것들을 토대로 새로운 개념을 이해하게 된다. 그와 같은 학생들의 선행 지식이나 자생적 관념들은 학생들이 이전에 그것의 유용성과 성공을 경험한 지식이며, 따라서 그것에 대해 확신을 갖고 있는 지식으로, 이것이 없이는 이해가 일어나기가 불가능하다. 그런데 학생들의 선행 지식이나 자생적 관념들 중에는 새로운 개념과 갈등을 일으키는 것들이 있을 수 있다. 이와 같이 갈등을 일으키고 새로운 개념을 이해하는 데에 방해가 되는 선행 지식이나 자생적 관념들이 바로 인지적 장애이다. 이러한 인지적 장애를 갖고 있을 때 학생들은 오류를 범하고, 오개념을 갖게 된다.

새로운 개념과 학습자의 기존의 인지 구조 사이에서 일어나는 갈등은 개념의 이해 과정에서 중요한 요소이다. 지적인 갈등이 없이는 인지 구조의 변화는 일어날 수 없다. 특히 극한 개념과 같이 복잡한 수학적 개념들은 단번에 완성된 형태로 획득될 수 없으며 그 획득 과정에서 갈등의 표출이 불가피해진다. Piaget는 인지 구조의 변화를 지적인 평형화 과정으로 설명하면서 갈등의 중요성을 강조하고 있다(권재술, 1989). Piaget에 따르면, 학습 내용이 학습자가 이미 가지고 있는 인지 구조로는 도저히 설명되지 않는 새로운 내용이면 인지 구조와 그 내용 사이에 의미있는 상호 작용, 즉 동화와 조절이 이루어지지 않는데 이런 상태를 지적인 비평형 또는 갈등 상태라고 한다. 이런 갈등 상태는 내적인 동기 유발에 필수적이고 새로운 인지 구조의 형성을 위해 필수적으로 선행되어야 할 과정이며, 인지적 갈등 상태의 바람직한 해결은 학습자가 가지고 있는 인지 구조의 변화, 즉 조절에 의해서 가능해진다. 조절을 통해 학습자는 새로운 지적인 평형 상태에 도달하게

되며 이 새로운 지적인 평형 상태는 이전의 지적인 평형 상태보다 질적으로 발달된 상태이다. Piaget는 이것을 인지적 발달이라고 보았다.

한편, Posner 등(1986)은 개념 조절(accomodation of concept)이라고 하는 근본적인 개념 변화는 자신의 세계관, 지식과 앎에 대한 기본 가정의 변화이며 그런 개념 변화는 이전의 사고가 확고하게 받아들여져 있을수록 더욱 많은 노력이 필요하고 일어나기가 어렵다고 주장한다. 사람들은 변화에 저항하려고 하며, 자신의 현재 개념에 불만이 느껴지고 지적이고 그럴듯한 새로운 다른 개념이 앞으로의 탐구에도 유용할 것임을 알게 되지 않는 한 그 저항을 계속한다는 것이다.

Posner 등(1986, p. 223)은 개념 변화 과정에 대해서 다음과 같이 말하고 있다.

> 많은 기본 개념들이 매우 복잡한 구조를 가지고 있으며 그 개념의 한 측면은 조절되지만 다른 한 측면은 조절되지 않을 수 있다. ... 개념조절은 점진적이며 일부분에서 점차 확산되듯이 일어난다는 가정이 적절할 것이다. 학생이 처음부터 어떤 주어진 이론을, 그리고 그 이론으로 본 자연 세계를 명백하고 고도로 발달된 형태로 이해하기는 어렵다. 학생들에게 개념조절은 새로운 개념의 주장의 일부를 받아들여 새로운 개념으로 처음 내딛듯이 나아가는 과정이며 다른 사고를 점차적으로 수정시켜 가는 과정을 통해 그 새로운 관점들의 의미와 함의를 완전하게 깨닫게 된다. 초보자에게 있어서 개념조절은 자신의 개념의 점차적인 적응이며 새로운 적응이다. 그 새로운 적응은 다음 단계의 적응의 토대를 구축한다. 그러면서도 최종적으로는 그 자신의 중심 개념이 본질적으로 재조직되거나 바뀌어 간다.

즉, 새로운 개념이 학생에게 그의 확신을 깨뜨릴 만큼 강하게 다가오지 못하면 학생은 자신의 기존 지식을 변화시키려 하기보다는 새 지식을 왜곡해서 받아들이거나 거부하기가 쉽다. 개념의 지도에서 학생들의 장애를 주목해서 다루어야 하는 이유도 바로 여기에 있다.

한편, 학생들의 인지적 장애는 교묘한 방법으로 그것을 회피한다고 해서 학생들이 장애를 갖지 않게 되는 것이 아니다. 그것은 단지 덮어두었을 뿐이다. 이렇게 회피하고 덮어둔 장애는 학생들이 그것을 극복하여 새로운 앎의 세계로 나아가는 것을 계속 방해하게 된다. Bachelard, Broussau, Sierpinska, Hercovics, Cornu, Davis, Vinner 등 많은 학자들도 학생들이 지식을 획득하는 과정에서 장애를 가지는 것은 불가피하고, 따라서 학생들이 갖고 있는 장애에 대해서 교육적으로 적극적으로 대처해야 한다고 말하고 있다(Sierpinska, 1985; Broussau, 1983; Cornu, 1991; Hercovics, 1989; Davis & Vinner, 1986).

학생들이 학습의 과정에서 불가피하게 장애를 가질 수밖에 없다는 사실은 학생들이 인지적 장애를 갖고 있느냐 아니냐 하는 문제보다 이미 갖고 있는 장애를 어떻게 조절해 나갈 것인지에 대한 방법을 탐색하는 것이 더 중요한 문제임을 시사한다. 또한 이것은 장애를 갖지 않기 위해서는 그것에 적극적으로 부딪쳐서 극복해가는 길 밖에 없음을 의미한다. 그리고 그러한 극복은 학생을 더 높은 수준의 새로운 이해에 도달하게 한다는 점에서 장애의 극복의 과정이야말로 진정한 이해의 과정이라고 할 수 있다. 따라서 학생들이 개념을 이해하도록 지도하기 위해서는 학생들의 인지적 장애를 고려하는 교수 전략을 세워야 하고 학생들의 장애를 극복시키는 데에 많은 노력을 기울여야 할 것이다.

그러면 이러한 인지적 장애를 극복하는 방안에 대해서 생각해 보기로 한다.

Posner 등(1986)은 어떤 한 개념을 다른 개념

으로 변화시키는 데에 영향을 주는 주된 요인으로서 변칙사례와 지식에 대한 기본 가정을 들고 있다. 그들에 따르면, 학생들이 변칙사례를 심각하게 받아들이게 되면 그의 현재 개념은 인지적 갈등을 겪게 된다. 학생이 그 변칙사례를 심각하게 받아들일수록 자신의 현재 개념에 더욱 불만을 느끼게 되고, 그것으로서 새로운 개념으로 조절될 준비가 된 것이다. 한편, 형이상학적 신념과 인식론적 관점은 새로운 지식을 받아들이기 위한 판단의 바탕이 된다. 학생 스스로 개념 변화를 일으키기 위한 판단 기준의 변화를 심각하게 느끼면 느낄수록 개념의 변화가 합리적인 것으로 느껴지게 된다. 학생이 새로운 관점을 합리적으로 받아들이질 못하는 상황에서 지식을 수용해야 한다면 교과서에서나 교사가 '옳다'고 말했기 때문이라는 식의 비합리적인 기준을 사용하도록 강요한 셈이 된다.

Posner 등(1986)은 개념 변화가 일어나 새 개념이 수용될 수 있기 위해서는 다음 네 가지 조건이 충족되어야 한다고 말하고 있다(p. 214). 첫째, 현재 가진 개념에 대해서 불만족을 느껴야 한다. 약간의 변화로는 적당치 않다고 느낄 때까지 학생들이나 과학자들은 중심 개념의 변화를 일으키지 않는 경향이 있다. 따라서 풀리지 않는 수수께끼나 변칙현상이 쌓여서 이런 문제를 푸는 데에 현재 가지고 있는 개념으로는 불가능하다고 느껴야 비로소 개념 조절이 일어난다. 둘째, 새로운 개념은 지적이어야 한다. 학생들이 새로운 개념에 의해 경험이 구조화 될 수 있음을 이해할 수 있도록 새로운 개념은 그 가능성을 충분히 드러내 보일 정도로 명확해야 한다. 새로운 개념을 처음 보았을 때 의미있어 보이는지와 지적으로 보이는지의 여부가 중요하다는 것은 많은 사람들이 강조한 사실이다. 셋째, 새로운 개념은 처음에 보았을 때 그럴듯해 보여야 한다. 선택된 새로운 개념은 적어도 그 이전의 개념에 의해 제기된 문제점들을 해결할 수 있는 것처럼 보여야 한다. 그렇지 않으면 새로운 개념은 그럴듯한 선택으로 생각되지 않게 된다. 그 개념이 그럴듯해 보인다는 것은 다른 지식과의 일관성의 결과이기도 하다. 넷째, 새로운 개념은 유용한 연구 프로그램이 가능함을 암시하여야 한다. 새로운 개념을 도입하여 사용해 봄으로써 기존 개념의 사용으로는 얻을 수 없는 효과를 얻거나 지적인 만족이 있어야 한다. 즉 새로운 탐구 영역을 개척하고 확장시키는 잠재적 능력이 있어야 한다.

한편, Vosniadou와 Brewer는 아동이 과학적 지식을 획득할 때 일어날 수 있는 급진적인 재구조화 메커니즘으로써 소크라테스식의 대화법과 유추, 은유, 물리적 모델을 소개하고 있다 (Williams, 1989에서 재인용).

또한 Nussbaum과 Novick은 학생들이 바람직한 개념 변화를 일으키는 것을 격려하도록 고안된, 세 부분으로된 교수열을 제시한다. 그들은 우선 노출 사건(exposing event)의 사용을 주장했는데, 그것은 학생들이 그 사건을 이해하기 위해 자신의 개념을 사용하고 탐구하도록 격려하는 사건이다. 이것에 이어 모순 사건 (discrepant event)이 제시되는데 이것은 변칙사례로서 제시되며 인지적 갈등을 일으킨다. 이것이 학생들이 현재의 개념에 불만을 가진 상태가 되도록 이끌 것으로 기대된다. 뒤이은 해결(resolution) 기간은 대안적 개념이 학생들에게 그럴 듯하고 이해가능한 것으로 되는 때이며 학생들이 바람직한 개념 이동을 이루도록 자극되는 기간이다(Williams, 1989에서 재인용).

Posner 등(1986)이 말한 개념 변화가 일어나기 위한 조건, Vosniadou와 Brewer의 재구조화 메커니즘, 그리고 Nussbaum과 Novick의 개념

변화를 일으키기 위한 교수 이론은 학생들의 인지적 장애를 극복하는 방안에 대해 일관성 있는 유용한 시사점을 준다.

Sierpinska(1987)가 지적했듯이, 학생이 장애를 극복하기 위해서는 그의 확신을 끌어내어, 그가 문제를 푸는데 사용해 왔던 방법을 분석해서 지금까지 암묵적으로 인정해 왔던 가설을 형식화하고, 가능성 있는 경쟁적 가설이 있을 수 있음을 깨달아야 한다. 이것은 장애를 극복하기 위해서는 학생이 자신이나 다른 사람들의 실제적인 또는 정신적인 수학적 활동을 반성해 보는 것이 중요함을 시사한다. 따라서 장애 극복의 출발점은 학생들이 반성을 통해 자신의 사고의 문제점을 깨닫는 것이라고 할 수 있다. 따라서 노출 사건을 통해 학생들이 먼저 자신의 생각을 명확하게 의식하도록 자극하는 것이 필요하다.

그 다음으로는, 학생의 기존의 지식으로는 해결될 수 없는 문제를 제시하거나 자신의 판단 기준을 바꾸어야만 해결될 수 있는 문제를 이용하여 정신적 갈등을 겪게 하는 것이 필요하다. 학생들이 장애를 극복한다는 것은 자신의 인지 구조의 일부를 형성하고 있으면서 장애가 되고 있는 지식을 변화시킨다는 것인데, 그러기 위해서는 먼저 학생 스스로 자신의 현재 개념에 대해서 불만을 느끼거나 의심을 가지는 것이 필요하다. 자신의 기존의 지식에 충분히 만족하고 있고 따라서 참이라고 확신하는 지식을 변화시킬 리는 없기 때문이다. 따라서 교사가 학생의 기존의 지식으로는 해결될 수 없는 문제나 자신의 판단 기준을 바꾸어야만 해결될 수 있는 문제를 학생들에게 제시하게 되면, 학생들은 정신적 갈등을 느끼고 그런 문제를 푸는 데에 현재의 개념이 불충분함을 깨닫고 자신의 개념을 의심하게 되며 다른 대안을 찾아보게 될 것이다. 이것이 두 번째 단계라고 할 수 있다.

이제 학생들이 자신의 생각에 의심을 품게 되고 부족함을 느끼거나 문제점을 의식하기 시작하면 교사는 그와 같은 문제들을 적절하게 설명해줄 수 있는 새로운 개념을 도입한다. 특히 이 새로운 개념은 학생들에게 자신의 기존의 개념이 갖고 있었던 문제점들을 해결할 수 있는 것으로 보여야 한다. 그래야만 학생들은 새로운 개념을 그럴듯하게 생각하게 되고 그런 느낌이 있어야 학생들은 점차 새로운 개념에 대한 신뢰를 쌓을 수 있게 된다. 그리고 그 새로운 개념이 기존 개념으로는 얻을 수 없는 효과를 얻게 해주거나 지적인 만족을 줄 수 있음을 보여주어야 한다. 이러한 경험을 통해 학생들은 새로운 개념이 자신의 기존 개념보다 더 효과적이고 적절한 지식이라는 신뢰를 가지게 되고 비로소 자신의 생각을 바꾸게 된다. 그리고 그러한 개념 변화를 통해 더욱 유용하고 적절한 개념에 이르는 것이야말로 진정한 개념 이해의 과정이라고 할 수 있을 것이다. 이것이 세 번째 해결 단계라고 할 수 있다.

새로운 개념을 도입할 때 한 가지 주의할 점은, 학생들이 자신의 기존의 생각에 의문을 갖고 문제를 느꼈다고 해서 그것을 무조건 버리고 정반대의 확신을 가져야 한다는 것은 아니라는 점이다. 오히려 이런 정반대의 확신을 갖는 것은 또 하나의 장애가 될 수 있다. 예를 들어, 잠재적 무한 개념이 무한급수의 합에서 오류의 원인이 된다고 해서 그것은 틀렸다고 생각하여 실무한 개념을 받아들이고, 그에 따라 실무한의 한 종류인 무한소 양 개념을 부주의하게 사용하는 것은 또 다른 반대편의 장애에 빠지는 것이다. 장애를 극복하였다고 하는 것은 기존의 생각을 버리고 새로운 생각을 수용하라는 것이 아니라 자신의 생각 외에 다른 생각도 존재할 수 있으며 새로운 생각도 타당

성이 있음을 깨닫고, 두 생각의 장점과 단점, 그것들의 유효하고 타당한 영역을 알며, 그것들이 부적합한 이유는 무엇인지에 대해서 종합적으로 이해했을 때 비로소 가능한 것이다. 따라서 장애의 극복은 단순히 기존 개념으로는 해결될 수 없는 문제나 판단 기준을 바꾸어야만 해결될 수 있는 문제를 제시하는 것으로는 충분치 않고 학생들이 두 개념을 비교하고 반성하고 새롭게 적용해 보는 등 다양한 시도를 해 보도록 하는 것이 필요하다.

본 연구에서는 이상과 같은 세 단계를 각각 학생들의 인지적 장애의 노출 단계, 갈등의 의식 단계, 갈등 해결을 통한 장애의 극복 단계라고 명명하고자 한다. 그리고 실제로 이러한 모델을 적용할 때에는, 이러한 세 단계를 이끄는 전체 과정을 교사와 학생 사이의 소크라테스식의 대화법과 동료 학생들 사이의 토론에 따라 진행되는 것이 필요하다. 토론은 학생들이 자신의 사고를 설명하고 정당화하며 논리적으로 추론하고 비판적으로 사고하는 것을 배울 수 있는 좋은 기회를 제공한다(우정호, 1998). 토론을 통해 학생들은 자신의 생각과 다른 사람들의 생각을 비교해보고 자기의 무엇이 잘못되었는지 그것이 어떤 점에서 옳고 틀렸는지 다른 사람들은 어떻게 생각하는지 서로의 의견을 제시하고 응답하고 함께 토론하고 생각해 봄으로써 자신의 사고를 반성해 보게 되고 그 가운데에 학생들은 자신의 생각을 교정하여 자신의 사고를 새롭게 재구성할 기회를 가질 수 있게 된다. 이러한 과정을 통해 학생들은 장애를 극복하고 새로운 이해로 나아갈 수 있게 된다.

따라서 다음절에서는 이상의 이론적 논의를 기반으로 해서 학생들의 수열의 극한 개념에 대한 인지적 장애를 극복하기 위한 구체적인 교수방법을 제시하기로 하겠다.

## 3. 수열의 극한 개념에 대한 인지적 장애 극복을 위한 구체적 방안

### 1) 수열의 극한 개념에 대한 주요 인지적 장애 분석

본 연구자는 1997년 10월에 서울 소재 모 고등학교 2학년 자연계 학생 189명을 대상으로 학생들의 극한 개념의 이해를 조사하여 극한 개념에 대한 학생들의 인지적 장애를 분석하였다. 그 연구에서 조사된 결과에 따르면, 수열의 극한 개념의 이해와 관련된 핵심적인 주요 인지적 장애에는 다음과 같은 것이 있다(박선화, 1998).

① 무한개념과 관련된 장애

- 수열의 극한은 수열이 한없이 가까워지지만 같아질 수 없는 수이다.
- 극한값에 도달할 수 있다.
- 무한대에 가까워질 수 있다.
- 수열의 성질이 극한에서도 성립한다.
- 유한에서 성립하는 성질은 무한에서도 성립한다.
- 극한값은 근사값이다.
- 수열의 항을 나열해 보면 극한값을 구할 수 있다.

② 함수(수열) 개념과 관련된 장애

- 뭔가에 가까워지는 수열은 수렴하는 수열이다(가까워져야 한다는 것에만 주목하고, 가까워져야 하는 대상이 '수'이어야 한다는 것에는 주목하지 못한다).
- 수열은 수를 생성하는 규칙이다(수열의 규칙성에만 주목하고 수열의 항의 크기에 주목하지 못한다).

• 교대 수열은 극한값이 없다(교대수열이 진동한다는 사실에만 주목하고, 수열의 항의 크기 및 그의 변화에는 주목하지 못한다).

• 극한값은 한계값이다.

③ 수 개념의 측면

• 분수는 두 수의 몫이다(분수의 두 수의 몫이라는 측면에만 주목하고 하나의 수로 인식하지 못한다).

④ 수학적 대상에 대한 존재성에 대한 장애

• 어떤 대상이 존재하기 위해서는 그 대상의 예를 보여주거나 그것을 구성할 수 있는 방법이 주어져야 한다.

본 절에서는 이상과 같은 인지적 장애 중에서 수열의 극한 개념을 이해할 때 아주 빈번하게 나타나며 극복하기가 매우 어렵다고 생각되는 다음 3가지 장애를 중심으로 논의를 하도록 하겠다.

(1) "가까워진다", "한없이 가까워진다"는 표현의 일상적 의미

고등학교 수학에서 수열의 극한에 대한 정의는 다음과 같이 주어진다.

무한수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때, 일반항 $a_n$의 값이 일정한 값 $\alpha$에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 $\alpha$에 수렴한다고 하고, $\alpha$를 무한수열 $\{a_n\}$의 극한 또는 극한값이라고 한다. 그리고 이것을 기호

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \text{ (또는 } n\to\infty \text{ 일 때, } a_n\to\alpha)$$

와 같이 나타낸다. (김명렬 외 2인, 1995, p. 83)

이 정의에서는 "한없이 커진다"와 "한없이 가까워진다"와 같은 일상적 표현을 사용함으로써 일상어의 의미에 의존하여 정의를 도입하고 있다. 일상적 표현은 학생들이 이미 그 의미를 잘 알고 있다는 점에서 학생들의 개념의 이해의 토대가 되어 준다. 그러나 수학에서 사용되는 학술적 의미가 일상적 의미와 일치하지 않는 경우가 많이 있다. 일상어가 수학적 용어로 사용되게 되면 그 용어는 합리화되면서, 수학과 같은 전문적 맥락에서는 그 용어가 일상적 의미, 즉 자생적 관념과는 다른 의미를 가진 개념이 될 수 있다. 그러나 일상어에서 온 용어는 그 용어 안에 여전히 이전의 의미, 즉 비수학적인 자생적 관념의 흔적을 은유적으로 남겨둔다. 그러면 학생들은 그 용어가 은유적으로 시사하고 있고 자신들이 잘 알고 있는 자생적 관념을 토대로 하여 그 용어를 이해하게 된다. 이 경우에 그 용어의 수학적 의미에 대한 적절한 지도가 이루어지지 않으면, 자생적 관념이 그 용어의 수학적인 의미를 이해하는 데에 장애가 된다. 극한 개념에서도 그러한 사례가 발생한다. 수열의 극한의 정의에서 사용된 "가까워진다"는 표현의 일상적 의미는 같지는 않으면서 둘 사이의 차이가 줄어든다는 의미를 갖는다. 이러한 의미가 학생들의 극한 개념의 이해를 방해한 예로, 상수 열 3, 3, 3, 3, … 에 대해 이것은 "3으로 일정하지 뭔가에 가까워지는 것이 아니니까 극한값이 없다"는 응답을 들 수 있다.

이것은 극한 개념의 지도가 수학적 의미와 다를 수 있는 일상적 의미에 너무 기대어 지도되는 것이 위험하며, 학생들에게 일상적 표현의 수학적 의미를 분명하고 정확하게 이해시키는 것이 필요함을 시사한다.

수열의 극한에 대한 직관적 정의에서 사용된 "한없이 가까워진다"는 표현은 수학에서는 "두 수의 차가 0으로 얼마든지 원하는 만큼 줄어든다" 또는 "두 수의 차가 얼마든지 원하는 만큼

작아질 수 있다"라는 의미이다. 따라서 수열의 항의 값으로의 3과 극한값의 후보로서의 3 사이의 차는 이미 0이므로 두 수 사이의 오차의 한계를 잡더라도 항상 만족하므로, 상수의 3, 3, 3, 3, ...은 수렴하며 그 극한값은 3이 된다.

(2) 무한대에 가까워질 수 있다는 생각

학생들이 보여준 오개념의 또 다른 예로 "수열 1, 2, 3, 4, …는 무한대에 한없이 가까워지므로 그것의 극한은 ∞이다"를 들 수 있다. 이 오개념은 무한 개념과 관련하여 중요한 장애를 내포하고 있다. 즉, 이 개념에서는 무한대에 가까워질 수 있다고 생각하고 있다. 이것은 무한 개념을 비수학적인 의미로 이해한 것에서 기인한다. '무한'이라는 개념이 일상적으로나 심리학적으로 또는 철학적으로는 무한 상태에 도달한다거나 무한 상태에 가까워진다고 생각할 수 있을지 모르지만, 수학에서 '무한'이라는 용어의 의미는 임의의 어떤 수보다도 더 커질 수 있는 것을 말한다. 따라서 무한과 어떤 수와의 차는 줄어드는 것이 아니라 여전히 무한하다. 즉, 수학에서는 수열이 무한대로 가까워진다고 말할 수 없다. 따라서 수열의 극한 개념에서 '차'의 개념은 수 사이에서 성립하는 개념이지 무한과 어떤 수와 차를 말하는 것은 의미가 없다. 그리하여 수열의 극한값은 언제나 수의 범위에서 존재하는 값이지 무한대와 같이 상태를 나타내는 개념은 극한값이 될 수 없다. 따라서 1, 2, 3, 4, ...과 같이 한없이 커지는 수열은 극한값을 갖지 않는 수열, 즉 발산하는 수열이라고 한다.

(3) 극한값에의 도달가능성에 대한 생각

"수열이 극한값에 한없이 가까워짐으로써 그것에 도달하는가 아닌가" 라는 문제는 학생들에게서 뿐만 아니라 극한 개념의 발달의 역사에서도 가장 많은 논란을 일으켰고 극한 개념의 이해에서 가장 큰 어려움을 겪게 하는 문제이다. Grabiner(1981)에 따르면, 이 문제는 Newton이 오늘날의 도함수에 해당하는 '궁극적인 비'를 설명하는 과정에서 '극한'이라는 용어를 사용한 이래로, 18세기의 수학자들 사이에서 가장 많은 논쟁을 일으킨 문제이었고, 오늘날 우리가 극한 개념에 대한 엄밀한 정의를 최초로 준 사람으로 Cauchy를 드는 이유 중의 하나가 바로 Cauchy가 이 문제를 해결하였다는 데에 있다. 즉, 이 문제는 해결하는 데에 거의 150여년의 세월이 필요했던 것이다. 따라서 학생들이 이 문제에 대하여 많은 혼란과 갈등을 겪는 것은 결코 무리가 아니다.

분명히 무한 수열 1, 1/2, 1/3, …, $1/n$은 극한값 0에 '도달'할 수 없으며 학생들이 수업에서 다루는 대부분의 예들이 이와 유사한 경우들이며 이 개념은 실제로 학생들이 다른 많은 문제 상황에서 극한 개념을 적용할 때 틀린 의미가 아니다. 실제로 학생들의 수열의 극한에 대한 대표적인 개념도 "수열의 극한은 수열이 한없이 가까워지지만 결코 같아질 수 없는 수이다(박선화, 1998, p. 116)"로 나타나고 있다. 그러나 "극한값에 도달할 수 없다"는 생각의 문제점은 그것이 모든 수열에 대해 일관되게 적용될 수 없는 제한된 개념이라는 점이다. 예를 들어, 앞에서 다룬 3, 3, 3, 3, ...와 같은 수열이라든가 1, 0, 1/2, 0, 1/3, 0, 1/4, 0, 1/5, … 과 같은 수열에서는 극한값에 도달하지 않는다는 생각이 적용될 수 없다. 실제로 18세기의 유명한 수학자인 D'Alembert나 L'Huillier도 수열은 절대로 그것의 극한과 같아질 수 없다고 생각하였고, 단조 수열의 맥락에서만 생각하거나 상수열이나 교대수열을 배제시키는 등, 제한된 범위의 수열에 대해서만 성립하는 극한 개념을 가지고 있었다. 만일 수열의 극한에서 이와 같

은 경우를 배제한다면 이것은 미적분 계산에서도 문제가 된다. 일차함수의 도함수는 상수함수인데, 도함수의 정의를 써서 이것을 구할 때 상수열의 극한값을 계산하는 문제에 접하게 되고, 만일 학생이 자신의 이러한 제한된 개념을 바탕으로 판단하게 되면 상수함수의 도함수는 존재하지 않는 것이 되기 때문이다.

이러한 생각이 일으키는 또 다른 문제점의 예는 원의 넓이를 구하는 문제에서 나타난다. 많은 학생들이 원에 내접하면서 점점 더 변의 개수가 늘어나는 다각형들의 넓이로 이루어진 수열의 극한값이 원의 넓이보다 작다고 생각한다. 물론 이것은 학생들이 다각형의 넓이 수열의 극한값을 생각하지 못하고 수열의 항 그 자체와 원의 넓이를 비교했기 때문인 경우도 있지만, 또 다르게는 각각의 수열의 항이 원의 넓이보다 작으므로 그것의 극한도 원의 넓이보다 작다고 생각하는 것이다. 수열에서 성립하는 성질이 그것의 극한에서도 성립한다고 생각하는 것이다. 학생들이 다각형 열이 원에 한없이 가까워진다는 것을 잘 알고 있으면서도 이렇게 생각하는 이유는, 다각형의 넓이 수열의 극한값이 원의 넓이와 같은지 다른지에 대해 학생들이 분명하게 이해하지 못하고 있다는 데에 있다. 따라서 이 오개념의 극복은 다각형의 열이 한없이 원에 가까워진다면 다각형의 넓이 수열의 극한값이 정확히 원의 넓이가 된다는 사실을 이해하고 따라서 극한값의 성질은 수열의 항의 성질과 다를 수도 있음을 깨닫는 데에 있다.

일부 학생들은 이 문제에 대해 무한히 계속되다 보면 다각형이 원에 일치하는 것으로, 즉 극한 상태에 도달하는 것으로 생각하고 또 다르게 원을 무한소 길이를 가진 무한히 많은 변으로 이루어진 다각형으로 생각한다.

이것은 무한에 대한 학생들의 다양한 견해 차이에 근거한다. 앞에서도 지적했듯이 심리학적으로나 철학적으로는 마음속으로 무한의 과정을 다 겪고 무한한 상태에 이를 수 있다고 생각할 수도 있다. 물론 또 다른 학자들은 무한이란 끝없이 계속되는 과정만을 의미하는 것이지 그러한 무한 상태에 도달할 수는 없다고 생각한다. 한편, 극한값은 마치 수열이 무한의 과정을 모두 거쳐서 도달한 결과처럼 보인다. 그런데 무한한 상태에 도달한다라는 생각의 문제점은 다른 개념과 모순없이 수학적으로 엄밀하게 형식화할 수 없다는 점이다.

극한 개념의 엄밀한 형식화에 최초로 성공한 Cauchy는 바로 이 점을 명확히 인식하였고 어떤 종류의 개인적인 무한 개념과도 모순을 일으키지 않게 무한에 대한 논의를 회피할 수 있는 형태로 극한에 대한 엄밀한 정의를 제시하였다.

그의 논의에서 중요한 사실은, 극한값을 수열과 그 값 사이에 무모순하게 주어진 어떤 관계를 만족하기만 하면 존재하는 대상으로 보는 관점, 즉 수학적 대상을 구체적인 사례로부터 추상된 것으로 보거나 그것에 직접 도달하는 구성적 방법이 제시할 수 있을 때에만 그 대상이 존재하는 것으로 보는 것이 아니라 수학적 체계와 모순을 일으키지 않는 정의를 제시할 수 있다면 그 대상이 존재하는 것으로 보는 존재 개념에 근거한 것이다.

따라서 극한값에의 도달 가능성 문제의 해결의 핵심은 수학적으로 명확한 대답을 할 수 있는 문제가 아님을 명확하게 인식하고, 학생들이 계속해서 도달한다 또는 도달하지 않는다는 생각에 매이지 않고 그 개념이 내포한 문제점을 인식하고 더 높은 관점에서 그 모든 곤란을 해결할 수 있는 정의의 필요성을 인식하는 것이 필요하다. 그리하여 엄밀한 극한 개념이 왜 그와 같이 복잡한 형태를 가질 수밖에 없는지

를 이해하는 데에 있다. 물론 이러한 것이 결코 쉬운 것은 아니다.

### 2) 인지적 장애 극복 방안의 구체화

본 절에서는 2장에서 논의된 인지적 장애 극복 방안에 따라 앞에서 논의된 인지적 장애를 극복하는 방안을 구체화하여 제시하도록 하겠다. 즉, 소크라테스식의 대화법을 바탕으로 하면서 학생들의 장애의 노출 단계, 갈등의 의식 단계, 갈등 해결을 통한 장애 극복 단계라고 하는 세 단계를 거쳐서 수열의 극한 개념에 대한 학생의 인지적 장애를 극복하는 방안을 제시해 보고자 한다. 그러나 지면의 한계 상 여기에서는 앞에서 논의된 세 가지 장애 중에서 세 번째 것인 극한값에의 도달가능성 문제와 관련된 장애의 극복을 예시하도록 하겠다. 다음 대화문에서 T는 교사를 지칭하고, S는 학생을 지칭한다. 그리고 [ ]안에 들어 있는 내용은 각 단계의 표시를 나타낸다.

① 수열이 극한값에 도달할 수 없다고 생각하는 경우

T : '수열의 극한'이 무슨 뜻이지?

S : 수열이 한없이 가깝게 다가가는 값이요.

T : 그러면, 수열이 극한값에 한없이 가깝게 다가갈 때, 극한값은 그 수열의 어떤 항과 같은 값을 가질 수 있을까, 없을까?

S : 수열은 극한값에 한없이 가깝게 다가갈 뿐이지 도달할 수는 없으니까 같은 값을 가질 수 없을 것 같은데요. [장애의 노출]

T : 예를 들어, 3, 3, 3, 3, ...와 같은 수열에서는 어떨까? 이 수열은 극한값이 있을까, 없을까?

S : 있어요.

T : 얼마지?

S : 3이요.

T : 그러면 이 수열의 경우에는 극한값과 수열의 항의 값이 어때?

S : 같아요.

T : 그러면, 조금 전에 네가 "수열은 극한값에 한없이 가깝게 다가갈 뿐이지 도달하지 않는다"고 말했는데 지금도 그렇게 생각하니?

S : 그런데요, 1, 1/2, 1/3, ⋯, $1/n$, ⋯ 와 같은 수열은 극한값 0에 분명히 도달하지 않잖아요? [갈등의 의식]

T : 그러면 아까 네가 말한 것이 이 수열에서는 성립하고 3, 3, 3, 3, ...에서는 성립하지 않는다고 볼 수 있겠네.

S : 네.

T : 그러면 네가 말했던 "수열은 극한값에 한없이 가깝게 다가갈 뿐이지 도달하지 않는다"라는 것이 참일까?

S : 아니요. 어떤 것에서는 성립하고 또 다른 어떤 것에서는 성립하지 않으니까 반드시 참이라고 말할 수는 없어요.

T : 그러면, 수열의 극한이 무엇인지 네 생각을 정리해서 다시 한 번 말해 볼래?

S : 수열의 극한이란 수열이 한없이 가깝게 다가가는 값이며, 반드시 극한값에 도달하지 않는다고는 말할 수 없어요. [갈등 해결을 통한 장애의 극복]

② 수열이 극한값에 도달할 수 있다고 생각하는 경우

T : '수열의 극한'이란 말이 무슨 뜻이지?

S : 수열이 한없이 가깝게 다가가는 값이요.

T : 그러면, 수열이 극한값에 한없이 가깝게 다가갈 때, 극한값은 그 수열의 어떤 항과 같은 값을 가질 수 있을까, 없을까?

S : 수열이 한없이 가깝게 다가가다 보면 언

젠가는 도달할테니까 가질 수 있을 것 같아요. [장애의 노출]

T : 그러면, 1, 1/2, 1/3, ⋯, $1/n$, ⋯ 이라는 수열에서는 어떨까? 이 수열은 극한값이 있니?

S : 네

T : 얼마지?

S : 0이요.

T : 그러면 이 수열은 0에 도달할까?

S : 계속 가다보면 언젠가는 도달하겠지요.

T : 그렇다면 이 수열의 어느 항의 값과 극한값이 같아져야 겠네.

S : 네.

T : 그러면 이 수열의 임의의 항을 식으로 나타내면 어떻게 되지?

S : $1/n$이요.

T : 그러면 어느 항인가는 결국 극한값과 같아져야 하니까 $1/n=0$이 되어야 겠네.

S : 네.

T : 그러면 이 식을 만족하는 $n$의 값은 얼마지?

S : 아닌데. 이 식은 성립하지 않는데요. 이 식을 만족하는 $n$값은 없어요. [갈등의 의식]

T : 도달한다면, 이 식이 성립해야 하지 않을까?

S : $n$이 아무리 커져도 $1/n$의 값은 결코 0이 될 수 없어요. 그러니까, 수열은 그것의 극한값에 도달하지 않아요.

T : 그러면 항상 도달하지 않을까?

S : 글쎄요. 그렇지 않을까요?

T : 그러면 3, 3, 3, 3, ...이라는 수열에서는 어떨까? 이 수열은 극한값이 있을까, 없을까?

S : 있어요. 3이요.

T : 이 경우에는 뭐라고 말할 수 있을까?

S : 이 경우에는 도달할 수 있어요.

T : 그러면 수열의 극한을 뭐라고 말할 수 있을까?

S : 수열이 한없이 가깝게 다가가는 값이요. 그러나 반드시 수열이 그 극한에 도달할 필요는 없다. [갈등 해결을 통한 장애의 극복]

③ 원에 내접하는 다각형 열을 이용하여 원의 넓이를 구하는 문제에서 나타나는 극한값에의 도달 불능성과 관련된 장애의 경우

T : 자, 여기에 원이 있고 이 원에 차례로, 정삼각형, 정사각형, 정오각형, ...을 내접하도록 계속해서 그려 넣는다고 하자. 그러면 원에 내접하는 다각형들은 점점 더 무엇에 가까워지지?

S : 원이요.

T : 그러면 원에 내접하는 다각형의 넓이로 이루어진 수열을 생각해 보자. 그 수열의 항의 값들은 점점 더 무엇에 가까워지지?

S : 원의 넓이요.

T : 그러면 내접 다각형 넓이 수열의 극한값과 원의 넓이 사이에는 어떤 관계가 있을까?

S : 내접 다각형 넓이 수열의 극한값이 원의 넓이보다 작아요.

T : 왜 그렇게 생각했지?

S : 내접하는 다각형들의 넓이가 모두 원의 넓이보다 작잖아요.

T : 그러면 그 극한값의 넓이도 원의 넓이보다 작을까?

S : 아무리 원에 한없이 가까이 가도 아주 작은 차이는 나지 않겠어요? [장애의 노출]

T : 그러니까 너는 수열의 각각의 항의 값이 원의 넓이보다 작으므로, 그것의 극한값도

원의 넓이보다 작다고 생각하는구나.

S : 네.

T : 좀 전에 네가 "내접 다각형의 넓이 수열이 원의 넓이에 점점 더 가까워진다"고 말했지? 그러면 얼마나 가까워질까?

S : 그 차가 계속해서 줄어드니까 한없이 가까워져요.

T : 그러면 "내접 다각형의 넓이 수열이 원의 넓이에 한없이 가까워진다"고 말할 수 있겠네?

S : 네.

T : 그러면 이처럼 수열이 한없이 가까워지는 값을 뭐라고 하지?

S : 극한값이요.

T : 그러면 원의 넓이는 내접 다각형의 넓이 수열의 극한값이라고 말할 수 있지 않을까?

S : 그런데요, 내접 다각형들은 아무리 원에 가까워져도 원보다는 작잖아요.

T : 그렇지.

S : 그렇다면 그 극한값도 원보다 작아야 하는 것 아닌가요?

T : 그러면 지금 너는, 내접 다각형의 넓이가 원의 넓이에 한없이 가까워진다는 것까지는 잘 알겠지만, 넓이 수열의 극한값이 정말로 원의 넓이와 같은지는 확신할 수 없다는 것이구나.

S : 네, 바로 그거예요. [갈등의 의식]

T : 자, 그러면 이렇게 해 보자. $n$번째 내접 다각형의 넓이를 $s_n$이라고 하고, 원의 넓이를 s, $s_n$의 극한값을 $s'$이라고 하자. 지금 너는 $s_n$이 s에 한없이 가까워진다는 것은 알고 있지?

S : 네

T : 그런데, $s'$ < s일거라고 생각하는 것이지?

S : 네.

T : 그런데, $s'$은 $s_n$의 극한값이라고 했지?

S : 네.

T : 어떤 것을 극한값이라고 하지?

S : 한없이 가까워지는 값이요.

T : 그러면 $s_n$은 s에도 한없이 가까워지고, $s'$에도 한없이 가까워지지?

S : 네.

T : 그런데, 너는 $s>s'$이라고 생각하는 거지?

S : 네.

T : 그럼 이렇게 생각해 보자. 만일 $s>s'$이라면, $s-s'>0$이겠지?

S : 네.

T : 그런데 아까, "$s_n$은 s에도 한없이 가까워지고, s'에도 한없이 가까워진다"고 했는데 이것을 기호로 표시하면 어떻게 쓸 수 있을까?

S : $|s_n-s|\to 0$ 그리고 $|s_n-s'|\to 0$이라고 할 수 있어요.

T : 그러면, $|s-s'|\le|s-s_n|+|s'-s_n|$이라고 쓸 수 있겠지?

S : 네.

T : $|s_n-s|\to 0$ 그리고 $|s_n-s'|\to 0$ 이므로, $|s-s'|\to 0$ 이라고 할 수 있겠지?

S : 네.

T : 그러면, $|s-s'|\to 0$의 뜻이 뭘까?

S : s와 $s'$사이의 차가 한없이 작아진다는 것이요.

T : 한없이 작아진다면 얼마나 작아질 수 있을까?

S : 아주아주 작은 값이요.

T : 자, 어떤 매우 작은 양이 있다고 하자.

그런데, 한없이 작아지는 것이니까 그 차가 계속 줄어들겠지?

S : 네.

T : 네가 아무리 작은 차를 말해도 계속 줄어들다보면 그것보다 더 줄어들 수 있지 않을까?

S : 네, 그래요.

T : 그러면 한없이 작아지는 두 수 사이의 차를 얼마라고 정해서 말할 수 있을까?

S : 아니요.

T : 그렇다면, s와 $s'$사이의 차는 뭐라고 말할 수 있을까?

S : 차가 얼마라고 하면 계속 줄어들다보면, 또 언젠가는 그것보다 더 차가 줄어들테니까 차를 정해서 말할 수 없어요.

T : 어떤 두 수 사이의 차를 정해서 말할 수 없다면, 그 두 수는 어떤 관계에 있다고 말할 수 있을까?

S : 같을 수밖에 없겠네요. 차가 있다고 하면 모순이 생기니까.

T : 그렇다면, $s=s'$이라고 말할 수 있겠네.

S : 네.

T : 그러면, 원에 내접하는 다각형의 넓이 수열의 극한값은 무엇이 되지?

S : 원의 넓이요.

T : 그러면 정리해 보자. 어떤 수열이 한없이 가까워지는 값을 뭐라고 하지?

S : 극한값이요.

T : 극한값이 존재하는 수열의 경우에 극한값이 몇 개나 있을 수 있을까?

S : 정확히 한 개요.

T : 그렇지. 그리고 각각의 내접 다각형의 넓이가 원의 넓이보다 작으면 반드시 그것의 극한값도 원의 넓이보다 작으니?

S : 아니요. 같을 수도 있어요. [갈등 해결을 통한 장애의 극복]

T : 잘했어요.

④ 원에 내접하는 다각형 열을 이용하여 원의 넓이를 구하는 문제에서 나타나는 극한값에 도달 가능하다고 생각하는 것과 관련된 장애의 경우

이 경우는 ②와 유사하게 논의를 진행할 수 있으므로 생략하기로 한다.

## 4. 결 언

본 연구에서는 수열의 극한 개념에 대한 학생들의 이해 개선을 시도하려는 노력의 하나로서 이전의 연구에서 극한 개념에 대한 학생들의 인지적 장애를 분석한 결과를 토대로 그와 같은 학생들의 인지적 장애를 극복하는 방안을 모색하고자 하였다. 먼저 제 2장에서 인지적 장애를 극복하기 위한 모델로서 학생의 장애의 노출, 갈등의 인식, 갈등 해결을 통한 장애의 극복이라는 3단계 모델을 제시하였고, 3장에서는 학생과 교사가 소크라테스식의 대화를 나누면서 이 3단계를 거치면서 학생이 수열의 극한 개념과 관련된 인지적 장애를 극복해 가는 과정을 제시하였다.

이 모델은 학생들의 사고를 자극하여 자신의 장애를 의식하게 하고 그것의 문제점을 깨닫고 장애를 극복하도록 교사가 적절히 안내함으로써 학생이 새로운 확신을 갖게 하는 데에 초점을 둔 것이다.

학생들은 개념의 이해의 과정에서 인지적 장애를 갖게 되는 것은 불가피한 일이다. 이것은 학생의 인지 능력의 한계라기 보다는 모든 인간이 보편적으로 가지는 한계를 가지고 있는 것이다. 따라서 학생들의 개념의 학습 과정은 그와 같은 장애를 극복하는 과정이라고 말할

수 있고 장애의 극복을 통해 학생들은 새롭고 더 높은 수준의 이해에 도달하게 되는 것이다. 그리고 그것이야말로 진정한 개념의 이해의 과정이라고 할 수 있다. 그런데 이와 같은 장애의 극복은 교사의 일방적인 설명의 제시만으로는 이루어지지 않는다. 장애의 극복은 학생의 내면에서 일어나는 학생 자신의 인지 구조의 변화이므로 학생 자신의 자발적인 노력에 의해서만이 가능하다. 특히, 학생의 기존의 지식은 이미 학생이 확신을 갖고 있는 지식이기 때문에 학생 스스로 자신의 생각에 문제가 깨닫지 못하는 한, 학생 내부에서의 개념의 변화, 즉 장애의 극복은 일어나기 어렵다. 따라서 본 연구에서 제시한 방안에서는 학생의 반성적 사고를 자극하는 데에 초점을 두었다.

그러나 본 연구에서 제시한 방안은 이론적 탐색에 근거한 가상적 수업 사례이므로 실제 학생들을 지도하는 과정에서 적용해보고 실제 상황에서 일어날 수 있는 또 다른 문제점에 대해서 보완하려는 후속 연구가 필요하고 생각된다.

## 참고문헌


김명렬 외 2인(1995). 고등학교 수학 I. (주) 중앙교육진흥연구소.

김응태, 김연식(1985). 수학교육교재론. 이우출판사.

박선화(1998). 수학적 극한 개념의 이해에 관한 연구. 교육학 박사학위 논문. 서울대학교 대학원

박한식(1982). 수학교육사. 교학사.

우정호(1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부.

우정호 외 2인(1989). 수학교육학개론. 서울대학교 출판부.

정동명, 조승제(1983). 실해석학개론. 이우출판사.

한종희(1997). 고등학교 2학년 학생의 극한에 대한 오개념과 오류에 관한 연구. 석사학위 논문. 한국교원대학교 대학원.

Brousseau, G.(1983). Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques,* 4(2).

Cornu, B.(1991). Limit. In D. Tall(ed.). *Advanced mathematical thinking.* Kluwer Academic Publishers.

Davis, R. B. & Vinner, S.(1986). The notion of limit: Some Seemingly Unavoidable Misconception Stages. *Journal of Mathematical Behavior,* 5(3).

Dreyfus, T.(1990). Advanced mathematical thinking. In P. Nesher & J. Kilpatrick (eds.). *Mathematics and Cognition.* Cambridge University Press.

Fischbein, E. et al.(1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics,* 10.

Grabiner, J. V.(1981). *The origin of Cauchy's rigorous calculus.* Cambridge. MA: MIT Press.

Herscovics, N.(1989). Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (eds.). *Research issues in the learning and teaching of algebra,* Vol. 4. National Council of Teachers of Mathematics, INC.

Orton, A.(1983a). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics,* 14(1).

Orton, A.(1983b). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics,* 14(3).

Posner, et al.(1986). Accommodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change. *Science Education,* 66.

Radatz, H.(1980). Students' errors in the mathematical learning process: A survey. *For the Learning of Mathematics,* 1(1).

Sierpinska, A.(1985). Obstacles epistemologiques relatifs á la notion de limite. Recherches en *Didactique des Mathematiques,* 6(1).

_____(1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Journal of Research in Mathematics Education,* 18.

Skemp, R. R.(1987). *The psychology of learning mathematics.* Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Tall, D.(1986). *Building and testing a cognitive approach to the calculus using interactive computer graphics.* Ph. D Thesis. The University of Warwick.

Tall, D. O. & Schwarzenberger, R. L. E.(1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching,* 82

Tall, D. & Vinner, S.(1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limit and continuity. *Educational Studies in Mathematics,* 12.

Williams, S. R.(1989). *Understanding of the limit concept on college calculus students.* Ph. D dissertation.

Williams, S.(1991). Models of limits held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education,* 22(3).

## A Study on a Model of Overcoming Cognitive Obstacles Related to the Limits of Mathematical Sequences.

Park, Sun Hwa (Samsung High School)

This study suggests a theoretical model and examples of overcoming cognitive obstacles related to the limits of mathematical sequences. The model includes 3 stages, that is, an exposure of obstacles, the awareness of conflicts, and the resolutions of conflicts. Also this model emphases discussions of teacher and students or among students. Such a discussion stimulates reflections of students having cognitive obstacles, helps them to cast away their old conceptions and to obtain right concepts.