

직관기하의 정의 사용 양태 분석과 증명 지도에 대한 시사점

조 영 미*

서론

<기하학의 정신>이라는 글에서 파스칼은 “논증할 때에는 언제나 머릿속으로 피정의항에 정의항을 대치시켜 생각할 것”이라는 규칙을 제시하고 있다. 이는 논증과정에서는 대상을 어떻게 정의하였는지를 늘 염두에 두어야 한다는 것이다. 예컨대, 짝수(피정의항)를 말할 때에는 언제나 그것이 바로 “동등한 두 부분으로 나눌 수 있는 숫자”(정의항)를 의미하도록 하고 그 두 가지가 생각 속에서 전혀 분리되지 않도록 함으로써, 진술 가운데 그 중 하나가 나타나기만 하면, 즉시 우리의 생각이 거기에 나머지를 하나를 밀착시킬 수 있도록 하는 것이다(이항, 1974). 파스칼의 입장에서 보면, 논증을 할 때 암기의 대상인 것이다.

대체로, 현행 교육과정에서 초등학교와 중학교 1에서의 기하는 직관기하로, 중학교 2에서의 기하는 논증기하로 분류된다. 논증기하에서는 증명을 지도하게 되는데, 학생들이 증명하는 것을 매우 어렵게 생각하고, 증명의 의미를 살리지 못하는 수업이 지속되고 있다는 지적은 익히 알려진 사실이다. 이러한 비관적인 상황을 극복하려고 해도 대책이 결코 쉽게 마련되지 않는다. 그 이유는 무엇보다도 증명지도를 어렵게 하는 요소들이 워낙 다양하기 때문일

것이다(서동엽, 1999).

이 글은 증명 지도를 어렵게 하는 다양한 요소들 중에서 定義에 한정된 것이다. 파스칼의 말을 고려할 때, 논증기하에서는 이전까지 배웠던 직관기하에서와는 구별되는 정의에 대한 태도를 요구한다. 논증기하에서는 이등변삼각형이라고 할 때, \triangle 이라는 이미지보다 “두 변의 길이가 같다”, 혹은 이를 기호로 표현한 ‘ $\overline{AB} = \overline{AC}$ ’라는 표현이 더욱 필요하다. 다음의 인용문을 보자.

예제 3

이등변삼각형 ABC에서 꼭지각 $\angle A$ 의 이등분선과 밑변 BC의 교점을 D라고 하면, \overline{AD} 는 \overline{BC} 를 수직이등분함을 증명하여라.

[가정] $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\angle BAD = \angle CAD$

[결론] $\overline{BD} = \overline{DC}$, $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

[증명] $\triangle ABD$ 와 $\triangle ACD$ 에서

$$\overline{AB} = \overline{AC} \text{ (가정)} \dots \textcircled{1}$$

(생략)

(김연식, p.218)

위의 인용문에서 보듯이, 이등변삼각형에 관한 성질을 증명하기 위해 필요한 요소 중의 한 가지는 바로 이등변삼각형의 ‘정의(문장)’이다. 따라서, 정의문장은 適材適所에서 사용할 수 있도록 암기해야 할 대상인 것이다.

논증기하에서 학습자에게 요구하는 정의에 대한 이러한 태도를 생각할 때, “논증기하를

* 서울대학교 대학원

배우는 단계에 입박한 학생들은 직관기하를 배우면서 정의에 대해 어떤 태도를 익혀왔는가”라는 질문은 의미 있는 것으로 여겨진다. 이 질문에 대한 답을 구하기 위해서 연구자는, 논증기하를 본격적으로 다루는 중학교 2학년 이전인, 초등학교와 중학교 1 수준의 직관기하에서 정의가 사용되는 양태를 교과서를 중심으로 살펴보고자 하였다. 그런데, 중학교 1 수준에서 다루어지는 직관기하는 대략적으로 말해, 초등학교 6년을 걸쳐 배운 내용들이 약간 개선되어 재 진술된 것이라고 평할 수 있다. 따라서, 연구자는 초등학교에서 다루어지는 직관기하의 내용만을 검토하는 것으로도 충분하다고 보았다. 게다가, 중학교 2 수준에서 이루어지는 논증기하는 평면도형을 대상으로 하기 때문에, 초등학교 직관기하 중에서도 평면도형을 다룬 부분으로 한정하였다.

연구 주제를 다시 요약하면, “초등학교 수학 교과서¹⁾에 기술된 평면도형의 지도 내용들을 분석하여 정의가 사용되는 양태를 알아보고, 이를 바탕으로 논증기하에서 요구하는 정의에 대한 태도와 비교하며 이에 기초하여 논증기하 지도에 대한 시사점을 이끌어 내는 것”이라고 말할 수 있다.

이를 위하여, 본론에서는 먼저 증명과 정의의 관계를 파스칼과 Vinner의 주장을 중심으로 하여 살펴본다. 다음에는 본격적으로 교과서 분석 작업에 들어가, 분석의 틀을 제시하고 그 분석 결과를 해석하였다.

본론

1. 증명과 정의

증명에 대한 여러 가지 관점 중에서(나귀수, 1998) 이 글은 정당화의 관점에 한정된 것이라고 볼 수 있다. 즉, 이미 발견된 진리가 참임을 확신시켜 주는 증명의 기능에 초점을 두고 있다. 무정의 용어, 정의된 용어, 공리, 이미 증명된 명제들만을 근거로 하여 새로운 진리가 참임을 보여준다. 여기서 정의에 한정하여 보면, 증명에서 사용하는 용어에는 정의되는 용어와 무정의 용어 두 종류가 있다.

먼저 정의되는 용어에서, 정의는 용어의 의미를 한정한다. 사실 우리는 각각의 용어에 대해 나름의 의미, 표상, 이미지, 관념 등을 부착시키고 있다. 이는 자연스럽게 형성된 것이기도 하고 인위적으로 부과된 것이기도 하다. 사정이야 어떻든지 간에, 증명에서 정의는 용어의 의미를 특정한 방향으로 고정시키며 이 의미만을 사용할 것을 강요한다. 파스칼은 다음과 같이 말하고 있다.

이 정의의 효용과 기능은 여러 가지 말로써 설명될 수 없는 것을, 우리가 명명한 이름 하나로 표현함으로써 진술을 명료하게 함과 동시에 축약하는 데에 있다. 그러나 그렇기 때문에 명명된 이름은 만약 그것이 다른 의미들을 가진 말일지라도, 그 다른 의미들은 모두 벗어 던져 버리며, 우리의 명명에 의해 목적된 의미만을 가지게 되는 것이다. (이항, 1974)

다음으로 무정의 용어를 살펴보자. 증명에서 모든 용어들은 원칙적으로 정의되어 있어야 한다. 그런데, “어떤 말을 정의한다는 것은 언제나 그것을 다른 말로 정의한다는 것을 의미하기 때문에 우리는 정의의 출발점으로 삼을 말을 골라서 그것은 정의 없이도 이해될 수 있는 말이라고 간주하는 선에서 만족하지 않으면 안 된다(Russell, p.159, 재인용).” 무정의 용어가 불

1) 6차 교육과정을 따른 교과서를 참조하였다.

가피한 것이다. 이러한 무정의 용어에 대하여 파스칼은 다음과 같이 설명하고 있다. 정상적인 사람이라면 그 용어가 가리키는 바가 무엇 인지를 아는, 그러한 용어들이 무정의 용어이다. 신이 인간에게 부여한 '자연적 인지'로 인하여 이러한 일, 즉 특정 용어를 듣는 순간 인간의 마음이 곧장 그 용어가 가리키는 대상으로 향하는 일이 가능한 것이다.

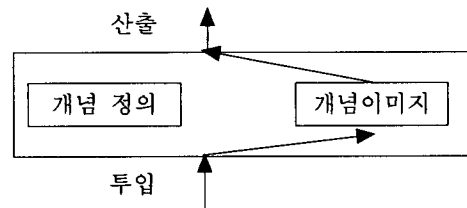
요컨대, 정의되는 용어는 물론, 무정의 용어의 의미 역시 우리에게 이미 알려져 있는 것이다. 증명에서는 이렇게 그 의미가 이미 알려진 용어들만을 사용하며, 따라서 각각의 용어에 대해 무정의 용어인지, 정의된 용어인지를 우선 구별하고 후자의 경우, 용어가 일단 등장하면 곧장 정의를 떠올릴 수 있을 정도로 암기하고 있어야 한다.

그런데, 증명에서는 왜 그 의미가 알려진 용어들만을 사용해야 하는 것일까? 이는 '정당화'라는 증명의 중요한 본질에 기인한다. 증명에서는 '확신'이라는 단계를 딛고 다음 단계로 넘어간다. 다시 말해, 증명하는 당사자나 다른 사람들에게 이미 확실한 것으로 증명된 것에 기초하여 또 다른 진리를 구축하는 것이다. 용어에 있어서도, 이미 그 의미가 알려진 용어, 즉 증명하는 당사자나 다른 사람들이 이미 받아들인 용어만을 사용하여 새로운 용어를 정의한다. 따라서, 이러한 용어의 정의를 암기한다는 것은, 인정되고 있는 기존의 의미들이 무엇 인지를 애써 기억하고 이에 근거하여 용어를 사용하는, 지적 신중함의 표현이다.

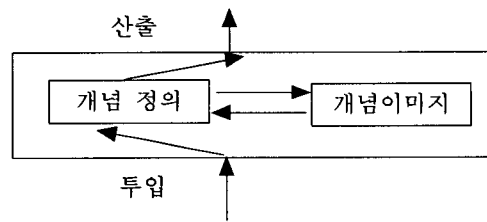
이런 식으로 정의를 대하게 되는 것은 결코 쉬운 일이 아니다. 다시 말해, 파스칼의 주장대로라면 정의는 암기의 대상인데, 암기의 필요성, 또는 지적 신중함의 필요성을 깨닫는 일이 결코 쉬운 일이 아니다. 이는 Vinner의 연구가 간접적으로 보여 주고 있다.

Vinner에 따르면, 사고 양식을 일상적 양식과 전문적 양식으로 나누었을 때 정의는 전문적 양식에서 주요한 역할을 한다. 그는 다음과 같은 네 개의 다이어그램을 보여주고 있다. 이 다이어그램을 통해 그가 생각하는 일상적 양식과 전문적 양식을 확연히 구별할 수 있다.

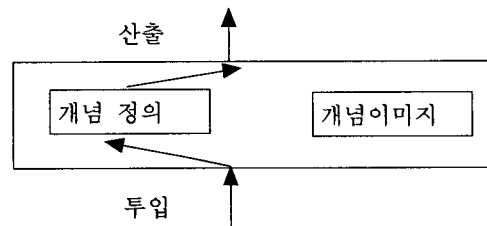
<일상적 양식>



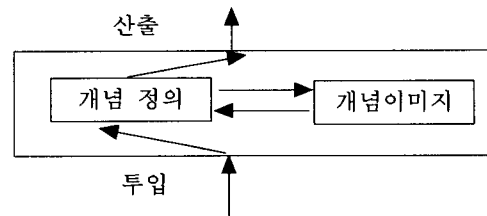
<전문적 양식>



<정의와 개념이미지의 상호작용>



<순수한 형식적 추론>



<직관적 사고를 따르는 연역>

일상적 양식과 전문적 양식을 가르는 가장 큰 기준은 개념정의의 개입 여부이다. 일상적 양식에서는 개념 이미지만으로도 사고가 가능하다. 그러나 전문적 양식에서는 개념 정의에 유념할 수 있어야 한다. 더 정확히 말하면, 개념 정의에 유념해야 하는 상황을 전문적 양식이라고 말해야 할 것이다. 상황에 따라 이러한 구별이 있어야 함에도 일상에 젖어 있는 우리들은 개념 정의에 유념하는 것을 곧잘 잊곤 한다.

Vinner는 이를 고등학생들을 대상으로 확인하고 있다. 그는 함수, 접선, 극한 개념을 소재로 설문 조사를 한 결과, 개념 정의를 필요로 하는 전문적 상황에서 대부분의 학생들이 정의를 사용하지 않고 개념 이미지에 의존하여 인지적인 과제를 수행한다는 점을 밝히고 있다.

증명은 일종의 학문으로 결코 일상적 사고로 이루어지는 것이 아니다. 전문적 양식 중에 최고의 자리에 있다고 말해도 좋을 만큼 전문적이다. 따라서 증명이라는 전문적 상황에서 파스칼의 주장에 합당하는 정의의 기능이 학생들에게 발휘되기는 쉽지 않아 보인다. 하지만 증명을 포기하지 않는 한, 전문적 상황에서 요구되는 정의에 대한 이러한 태도를 방지할 수도 없을 것이다. 서동엽(1999, p.152)은 다음과 같은 제안을 하였다.

중학교 단계에서 증명의 시작은 가정에 포함되어 있는 도형의 정의를 아는 것에서 출발하는 경우가 적지 않음을 감안한다면, 주의 깊은 정의의 지도가 필요함은 당연하다. 더욱이 정의를 모르는 것이 가정과 결론의 구분이나 기호화에서의 어려움의 주된 원인이 된다는 점에서 정의에 대한 신중한 지도의 필요성은 증대된다.

다음의 분석을 통하여 증명 지도를 위한 ‘주의 깊은 정의의 지도’, ‘정의에 대한 신중한 지도’에 대한 시사점을 얻고자 한다.

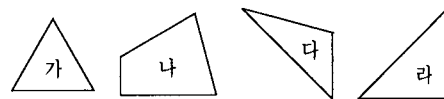
2. 분석의 틀

초등학교의 교과서 기술 양식만을 고려할 때 정의는 각 단원이나 차시에서 다룰 주제를 도입하는 기능을 가지고 있다. 직관기하의 경우, 교과서를 살펴보면, 각각의 주제의 정의가 맨 처음에 제시되어 있지 않다. 정의를 도입하기 위한 선행 활동이 있고, 일단 정의가 제시된 후에는, 정의된 개념을 공고히 하기 위한 활동들이 다양하게 진행된다. 다음의 예시를 보자.

<교과서 2-1, p.26>

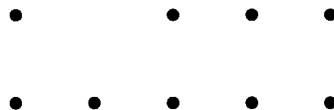
삼각형과 사각형을 알아봅시다.

다음 도형은 몇 개의 선분으로 되어 있습니까?



가, 다, 라 도형과 같이 3개의 선분으로 둘러싸인 도형을 삼각형이라고 합니다.

다음에서 점을 선분으로 이어 삼각형을 그려보시오.



연구자는, 정의를 축으로 하여, ‘정의를 내리기 이전의 활동’, ‘정의를 내린 후의 활동’으로 구분하였다. 이를 위의 경우에 적용하면, “다음 도형은 몇 개의 선분으로 되어 있습니까?”라는 질문과 함께 제시된 그림들은 삼각형의 정의를 발견하는 과정으로 “정의를 내리기 이전의 활동”에 해당하며, “다음에서 점을 선분으로 이어 삼각형을 그려보시오”라는 질문과 함께 제시된 그림들은 삼각형의 정의를 사용하는 과정으로 “정의를 내린 후의 활동”에 해당한다. 연구자는 정의가 사용되는 양태를 살펴보기 위해 후자에

해당하는 “정의를 내린 후의 활동”들을 조사, 분석의 틀을 마련하였다. 이들을 대상으로 한 분석의 틀은 8가지로 구성할 수 있었으며 각 항목의 예는 다음과 같다.

(1) 따라 읽어보기

<교과서 2-1, p. 25>

이와 같이 두 점을 끝게 이은 선을 선분이라고 합니다.

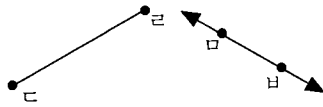
위의 선분을 선분 ΓL 이라고 읽습니다. 또, 선분 $\text{L}\Gamma$ 이라고도 읽습니다.

...

이와 같이 선분을 양쪽으로 끝없이 늘린 곧은 선을 직선이라고 합니다.

위의 직선을 직선 ΓL 이라고 읽습니다. 또, 직선 $\text{L}\Gamma$ 이라고 읽습니다.

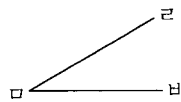
다음 선을 읽어보시오.



<교과서 3-1 p. 49>

왼쪽 그림과 같이 점 L 을 각의 꼭지점이라고 하고, 두 직선 $\text{L}\Gamma$, LD 을 각의 변이라고 합니다. 이 때, 각을 각 $\Gamma\text{L}\text{D}$ 또는 각 $\text{D}\text{L}\Gamma$ 이라고 읽습니다.

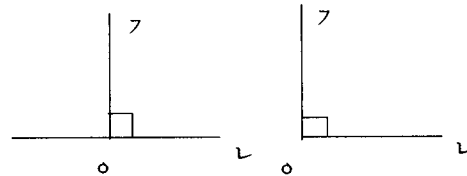
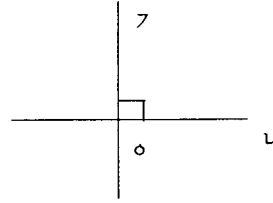
다음 각을 읽고, 꼭지점과 변을 말하시오.



<교과서 4-1, p. 89>

두 직선이 만나서 이루는 각이 직각일 때, 두 직선은 서로 수직이라고 한다. 두 직선이 수직일 때, 한 직선을 다른 직선에 대한 수선

이라고 한다.



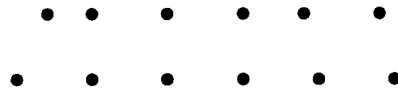
위의 그림에서 각 $\Gamma\text{O}\text{L}$ 은 직각이다. 그러므로 직선 ΓO 과 직선 OL 은 서로 ()이고, 직선 OL 에 대한 수선은 직선 ()이다.

(2) 그려보기

<교과서 2-1, p. 27>

...과 같이 4개의 선분으로 둘러싸인 도형을 사각형이라고 합니다.

다음에서 점을 선분으로 이어 사각형을 그려보시오.



(3) 재어 보기 (세어 보기)

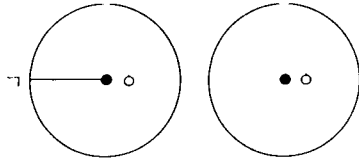
<교과서 2-1, p. 26>

삼각형에서 선분 ΓL , LD , $\text{D}\Gamma$ 을 변이라 하고, 두 변이 만난 점 Γ , L , D 을 꼭지점이라고 합니다.

삼각형의 꼭지점은 몇 개입니까?

또, 변의 꼭지점은 몇 개입니까?

<교과서 3-2, p. 38>

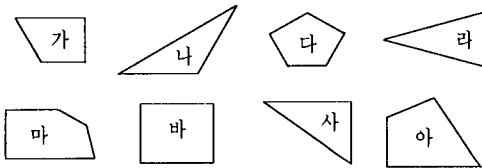


왼쪽의 그림에서 점 o 는 원의 중심이다. 원의 중심 o 와 원 위의 점 $가$ 을 이어보시오. 이와 같이 이은 선분 $가o$ 을 원의 반지름이라고 합니다.

오른쪽 그림에서 점 o 는 원의 중심이다. 이 점을 이용하여 반지름을 여러 개 그리고, 그 길이를 재어 보시오.

(4) 찾아보기

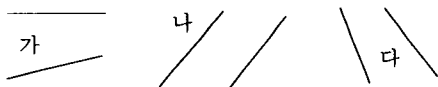
<교과서 2-1, p. 28>



삼각형은 어느 것인지 말해 보시오.
사각형은 어느 것인지 말해 보시오.

<교과서 4-1, p. 93>

다음에서 두 직선이 평행인 것은 어느 것인가?



(5) 이유 말하기

<교과서 2-1, p. 28>

다, 마도형²⁾은 삼각형도 사각형도 아닙니다.

그 이유를 말해 보시오.

<교과서 3-1, p. 59>

다, 라 사각형과 같이 4각이 모두 직각이고, 4변의 길이가 같은 사각형을 정사각형이라고 합니다.

정사각형을 직사각형이라고 말할 수 있습니까?

<교과서 4-2, p. 36-37>

마름모는 평행사변형입니까?

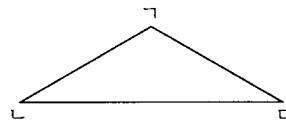
직사각형은 평행사변형이라고 말할 수 있습니까?

정사각형은 평행사변형이라고 말할 수 있습니까?

(6) 문제풀기

<교과서3-1 p. 56>

오른쪽 그림은 이등변 삼각형이다. 변 $가$ 나 이 3cm이면, 변 $가$ 드은 몇 cm입니까?



<교과서 3-2, p. 40>

오른쪽 그림에서 두 원의 중심을 지나는 선분 $가$ 나 은 몇 cm입니까?

<교과서 4-2, p. 34>

나, 라 사각형과 같이 두 쌍의 마주보는 변이 서로 평행인 사각형을 평행사변형이라고 한다.

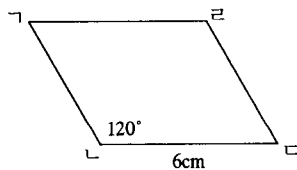
2) (4) 찾아보기에 나오는 도형

...평행사변형의 성질을 알아보자.
 ...사각형 $ABCD$ 은 평행사변형이다.
 변 BC 와 길이가 같은 변은 어느 것인가?
 변 AB 은 몇 cm인가?
 각 A 는 몇 도인가?
 각 D 는 몇 도인가?

(7) 성질 알아보기

<교과서 3-2, p. 38>

왼쪽의 그림³⁾에서 점 O 은 원의 중심이다. 원의 중심 O 와 원 위의 점 A 을 이어보시오. 이와 같이 이은 선분 OA 을 원의 반지름이라고 합니다.



...
 한 원 위에 있는 반지름의 길이는 모두 같습니까?⁴⁾

<교과서 4-2, p.38>

나, 라 사각형과 같이 두 쌍의 마주보는 변이 서로 평행인 사각형을 평행사변형이라고 한다.

평행사변형 모양의 종이를 다음 그림과 같이 잘라 만든 두 삼각형을 겹쳐 보고, 평행사변형의 성질을 알아보자.

(8) 새롭게 보기

<교과서 4-1, p. 91>

위와 같이 한 직선에 수직인 두 직선은 서로 평행이라고 한다. 이 때, 평행인 두 직선을 평행선이라고 한다.

다음은 직사각형이다.⁵⁾



변 AB 과 변 DC 은 서로 평행이다.
 변 AD 과 평행인 변은 어느 것인가?
 평행선을 모두 말하여라.

<교과서 4-2, p. 37>

(평행사변형과 마름모를 정의한 후 ...)

직사각형에 대하여 알아보아라.⁶⁾

두 쌍의 마주 보는 변이 서로 평행인가?
 두 쌍의 마주 보는 변의 길이가 각각 같은가?
 두 쌍이 마주 보는 각의 크기가 각각 같은가?
 직사각형은 평행사변형이라고 말할 수 있는가?

3. 분석 결과

앞서 언급한 정의 사용 양태 중에서 해당 학년에서 한 번이라고 그러한 양태가 등장하면, ○를 기입하여 아래의 표를 만들었다. 이 글에서의 초점은, '직관기하를 거치면서 정의에 대해 어떤 태도를 익혀왔는가'이며 특히 '어떤'을 강조하여 직관기하에서 정의를 사용하는 양태

3) (3) 재어 보기 그림 참조

4) 동일한 원에서 반지름의 길이는 같다는, 반지름의 성질을 알게 하려는 것이다.

5) 직사각형은 앞서 이미 배운 개념이다. 그런데, 평행이라는 새로운 개념으로 직사각형을 새롭게 보고자 하는 것이다.

6) ○과 마찬가지로, 직사각형을 평행사변형과 마름모에 비추어 새롭게 보려는 것이다.

들의 다양성이었기 때문에, 매 학년 각각의 양태들이 등장하는 횟수를 분석하지는 않았다.

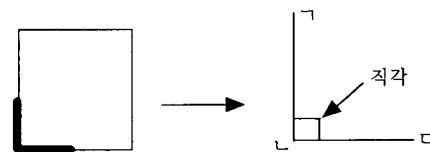
표에서 알 수 있다시피, 찾아보기, 재어 보기, 그려보기 등이 거의 전학년에 걸쳐서 등장한다는 점에서 볼 때, 초등학교에서 지도하는 기하가 직관기하임을 다시 한 번 확인할 수 있다. 정의를 이용한 문제 풀기, 성질 알아보기, 새롭게 보기 등이 주로 4-6학년에서 차지하고 있다는 점은, 초등학교에서 학년이 올라갈수록 정의를 제시한 후에 다양한 시도를 한다는 것을 보여준다.⁷⁾

	읽어 보기	그려 보기	재어 보기	찾아 보기	이유 말하기	문제 풀기	성질 알아보기	새롭게 보기
1-1				○				
1-2		○		○				
2-1	○	○	○	○	○			
2-2	입체도형							
3-1	○	○	○	○	○	○		
3-2		○	○	○		○	○	
4-1	○	○	○	○				○
4-2		○	○	○	○	○	○	○
5-1		○		○	○	○	○	○
5-2	입체도형							
6-1		○	○			○		○
6-2	○	○	○	○		○		

이제 본격적으로 각 분류 항목별 특징들을 분석해 보자. 초등학교 직관기하에서 평면도형을 지도할 때 학습자로 하여금 정의 문장을 어떻게 대하도록 하고 있는지를 교과서와 교사용 지도서를 중심으로 살펴보고자 한다.

그 전에, 정의 문장 자체와 관련하여 언급해 둘 점이 있다. 논증기하에서는 분석적인 정의 문장을 필요로 한다. 다시 말해, 원의 정의의 경우, ‘동그란 모양을 원이라고 한다’와 같은 정의문장이 아니라, ‘한 점에서 일정한 거리에 있는 점들로 이루어진 도형을 원이라고 한다’와 같이 원 개념을 분석해 놓은 정의 문장을 필요로 한다. 그런데, 직관기하에서는 반드시 분석적인 정의문장만을 사용하지는 않는다. 물론 실제로 교과서를 들여다보면 분석적인 정의 문장들이 훨씬 많지만, 필요에 따라서 분석적이지 않은 정의문장들이 사용된다. 이러한 정의문장일 경우에는 정의 문장 자체에 주목하는 활동은 ‘원칙적으로’ 의미가 없다. 분석적이지 않은 정의문장을 사용할 때에는 이미 교육과정 개발자의 전제 속에 정의 문장 이외의 다른 요소들이—이를테면, 이미지, 직관—에 충실할 것을 권하고 있는 것이기 때문이다. 그러한 예로, ‘상자모양을 직육면체라고 합니다’(수학 2-2, p.37) 라는 정의를 들 수 있다. 이 경우, 직육면체라는 용어에 대해 정의문장을 떠올리는 것은 곧 ‘상자모양’을 떠올리는 것인데, 이는 분명히 이미지를 부각시키는 것이다. 또 다른 예로, 직각 개념을 들 수 있다.

<3-1, p.51>



7) 참고로, 평면 도형에 한정하여 각 학년별 내용체계는 다음과 같다(교육부, 1994).

- 1학년 : 여러 가지 모양 알아보기, 여러 가지 모양 만들기
- 2학년 : 선분, 직선, 삼각형의 변, 꼭지점, 사각형의 변, 꼭지점, 원 만들기
- 3학년 : 각, 직각, 직각이등변삼각형, 이등변삼각형, 정삼각형, 직사각형, 정사각형
- 4학년 : 수직, 평행, 평행선의 성질, 예각, 둔각, 삼각형의 내각의 크기와 그 합, 예각삼각형, 둔각삼각형, 사다리꼴, 평행사변형, 마름모, 사각형의 내각의 크기와 그 합, 다각형
- 5학년 : 도형의 합동, 삼각형의 합동의 작도, 평면도형에서의 선대칭, 점대칭
- 6학년 : 정다각형, 원주, 부채꼴의 호, 확대, 축소, 닮음, 닮음비

위와 같은 각 7-2을 직각이라고 합니다.

이에 대해 교사용 지도서(p. 99)에서는 다음과 같이 기술하고 있다.

3학년에서 직각을 정의할 때에는 ... 구체물에서 직관을 통하여 이해하도록 한다. ...이러한 이해를 바탕으로 수학책이나 책받침, ...의 직각 부분과 같은 모양을 찾아 그와 같은 각을 직각이라 하여 용어를 도입한다. 이 단계에서는 단지 직관을 통하여 각의 용어로 도입해야 한다.

따라서 다음에서는 용어를 분석적으로 정의해 놓은 정의 문장에 한정하고 있다. 그리고, 이제 본격적으로 살펴볼 내용을 다시 한번 요약하면 다음과 같다. 일단 용어를 대하였을 때, 우리의 사고 속에서는 그 용어로 인하여 곧장 그 용어의 정의 문장이 떠오를 수 있다. 이것이 파스칼이 말한, 증명에서 요구되는 정의에 대한 태도이다. 그런데, 이는 전문적인 것으로 일상의 세계에서 쉽게 익혀지는 태도가 결코 아니다. 오히려 우리들은 그 용어가 동반하는, 정의 문장 이외의 요소들을 떠올린다. 초등학교에서 다루는 직관 기하는 특히, 여러 개념들에 대해 적절한 심상을 형성시켜 주는 것을 중요한 목적으로 삼고 있기 때문에 이러한 현상이 일어날 것은 충분히 예상할 수 있다. 한편, 교육내용의 연계성을 생각해 볼 때, 초등학교 직관기하에서 시종일관 이러한 현상에 머물러 있지 않을 것이라는 점도 또한 예상할 수 있다. 다시 말해, 초등학교는 직관기하로, 중학교 2학년은 논증기하로 구분하지만, 이 두 기하 사이에는 연속성이 있을 것이다. 정의에 제한하여 생각해 볼 때, 논증기하에서 요구하는 정의에 대한 태도가 직관기하를 지도하는 과정에 스며들어 있을 것이라는 점이다. 필자는 다음의 분류 항목별 분석을 통해 그 '스며들'이 어

는 정도이며 어떤 양태인가를 살펴보고자 한다
우선, '따라 읽어보기'는 정의 문장과 무관하다. 비유컨대, 교사가 "세 변으로 둘러싸인 도형을 삼각형이라고 합니다"라고 말하고 나서, 학생들에게 "자! 삼각형이라고 다함께 복창해 봅시다"라고 요구한다면, 이는 정의 문장과는 거의 무관한 활동이라고 봄이 타당할 것이다.

'그려보기'의 경우에는 사정이 다르다. 결론부터 말하면, 교사의 재량에 따라 정의문장에 주목하는 기회가 마련될 수도 있고 전혀 그렇지 않을 수도 있다. 이를 교과서와 교사용 지도서에 기록된 내용들을 중심으로 살펴보자.

<교과서 2-1 p. 26 >

가, 다, 라 도형과 같이 3개의 선분으로 둘러싸인 도형을 삼각형이라고 합니다.

다음에서 점을 선분으로 이어 삼각형을 그려보시오.



<교사용 지도서 2-1, p.64>

... 그 다음에는 세 점은 선분으로 이어서 삼각형을 그려보게 하여 삼각형의 이해를 깊게 하도록 한다.

일단 삼각형을 정의한 후, 삼각형이라는 용어를 대하였을 때 정의 문장에 초점이 모아지도록 하고 있는가? "전적으로 그렇다"라고는 말할 수 없다. △라는 이미지에 초점이 두어질 수 있다. 그런데, 교사용지도서에서 '삼각형의 이해를 깊게 한다'라고 하면서 "세 점은 선분으로 이어서"라는 단서를 붙이고 있다. 이는 △이라는 이미지 보다 세 선분으로 이루어진 것을 더욱 강조하라는 의미로 해석할 수 있다.

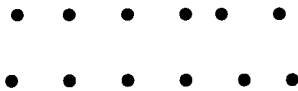
이를 '확대 해석'하면, 정의 문장에 초점을 두도록 하는 것이다. 곧, 교사의 해석 여하에 따라, 정의 문장에 한번이라도 더 관심이 모아질 수도 있으며, 반대로 이미지의 형성에 초점을 둘 수 있다.

비슷한 예를 또 하나 들어보자.

<교과서 2-1 p. 27 >

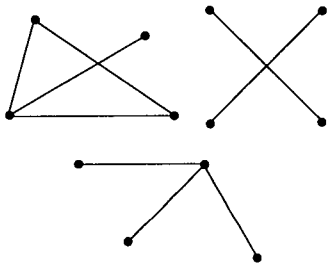
...과 같이 4개의 선분으로 둘러싸인 도형을 사각형이라고 합니다.

다음에서 점을 선분으로 이어 사각형을 그려보시오.



<교사용 지도서 2-1, p. 65>

... 그 다음에는 네 점을 선분으로 이어 사각형을 그려보도록 한다. ...그렇게 유도를 했는데도 다음과 같은 도형을 그린 어린이가 있다면, 그것을 사각형의 잘못된 예로써 보여주고 사각형의 이해를 깊게 하는 기회로 삼는다.



위와 같은 잘못된 예들을 학생들이 제시하였을 때, 교사는 □라는 이미지를 재차 강조하여 바람직한 이미지 형성을 도모할 수 있으며, 또는 '네 선분으로 둘러싸인 도형'이라는 정의 문장을 강조할 수 있다.

다음의 예는 '평행'으로, 우리는 평행에 대해 '나란하다'라는 이미지를 가지고 있다. 이 이미

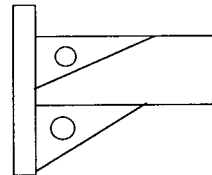
지를 갖도록 하는 것도 중요하지만, 초등학교에서는 이 이미지를 만들어내는 방법에 더욱 초점을 두고 있는 것으로 보인다. 다음의 평행의 정의가 그 점을 잘 보여준다. 즉, 나란한 직선을 그으려면, 한 직선에 수직인 두 직선을 그으면 가능한데, 이를 정의 문장에 고스란히 담고 있다. 또한 교사용 지도서에서는 정의를 내린 후에 하는 활동들에서 이 정의를 적극 사용할 것을 권하고 있다. 다시 말해, 나란하다라는 평행의 이미지보다도, 그러한 이미지를 만들어내는 방법을 담은 정의 문장에 초점을 두도록 하고 있다.

<교과서 4-1, p.91 >

한 직선에 수직인 두 직선을 그으면, 이 두 직선은 서로 만나지 않는다.

이와 같이 한 직선에 수직인 두 직선은 서로 평행이라고 한다. 이 때, 평행인 두 직선을 평행선이라고 한다.

삼각자를 이용하여 평행선을 그어 보아라.



<교사용 지도서 4-1, p. 152>

삼각자를 사용하여 평행선을 그어 보게 함으로써 평행선에 대한 이해를 더욱 깊게 한다. 평행선을 정의할 때에 한 직선에 수직인 두 직선을 그어서 정의하였으므로 평행선을 그릴 때에도 정의의 조건에 따라 그리도록 한다. 즉, 한 직선에 두 개의 수선을 긋게 하여 평행선 긋는 방법을 알게 한다.

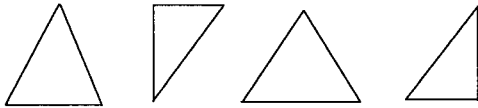
지금까지 '그려보기' 항목에 대해 살펴보았는데, '찾아보기', '재보기', '새롭게 보기', '문

제 풀기' 등도 이와 유사하다. 다시 말해, 교사의 의사에 따라, 학생들로 하여금 정의 문장에 관심을 갖도록 동기 부여를 할 수도 있고 그렇지 않을 수도 있다는 것이다. '찾아보기'에서 한 가지만 더 예를 들도록 하자.

<교과서 3-1, p.54>

가, 다, 라 삼각형과 같이 직각이 있는 삼각형을 직각삼각형이라고 합니다.

다음 삼각형 중에서 직각삼각형을 찾아보시오.



<교사용 지도서 3-1, p. 102>

교과서 54쪽에 주어진 삼각형들 중에서 직각삼각형을 찾아보게 한다. 우선 직각삼각형을 찾기 위해서는 직각삼각형이 어떤 도형인지 먼저 확인하고, 다음 순서에 따라 식별하도록 한다.

① 직각삼각형의 정의를 알아본다.

→직각이 있는 삼각형이다.

② 식별 기준을 정한다.

→삼각형 중에서 직각이 있는 것을 찾아본다.

교사용 지도서에 대한 참조 없이, 교과서만을 본다면, 정의 문장에 대해 주목해야 할 필요성이 드러나 있지 않다. 그런데, 교사용 지도서를 보면, 한 번쯤 정의문장에 주목해야겠다는 생각이 들게 된다.

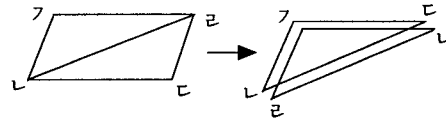
한편, 논증기하에서는 정의와 성질이 논리적으로 긴밀히 연결되어 있다. 즉, 정의로부터 성질들이 연역된다. 그런데, 직관기하에서는 내용 전개상 거리가 가까울 뿐, 논리적으로 정의와

성질간에 관계가 있는 것은 아니다. 성질을 보이는 데 정의는 전혀 이용되지 않는다. 오히려 정의된 개념이 지닌 이미지만으로 성질들이 파악된다. '성질에 대해 알아보기'는 정의문장과 무관하다고 말할 수 있다.

예를 들면 다음과 같다.

<교과서 4-2, p. 33>

평행사변형 모양의 종이를 다음 그림과 같이 잘라 만든 두 삼각형을 겹쳐 보고, 평행사변형의 성질을 알아보아라.



변 a 와 변 c 의 길이는 같은가?

각 a 와 각 c 의 길이는 같은가?

마주 보는 변의 길이는 같은가?

마주 보는 각의 크기는 같은가?

<교사용 지도서 4-2, p. 77>

평행사변형의 성질

구체적인 조작 활동으로 평행사변형은 마주 보는 변의 길이가 같고, 마주 보는 각의 크기도 같음을 알게 하는 활동이다.

마지막으로, '이유 말하기'에서는 근본적으로 정의문장이 중요한 역할을 한다. 만약 이미지에만 주목하도록 지도한다면, 본연의 의도를 무시한 것이다.

<교과서 3-1, p.59>

다, 라 사각형과 같이 4각이 모두 직각이고, 4변의 길이가 같은 사각형을 정사각형이라고 합니다.

정사각형을 직사각형이라고 말할 수 있습니까?

이러한 내용들은 다음과 같이 지도될 것이다.

직사각형은 네 각이 모두 직각인 사각형(직사각형의 정의)인데, 정사각형은 네 각이 모두 직각이므로, 정사각형은 직사각형이다.

결론 및 제언

위의 분석에 비추어 볼 때, 초등학교 직관기하에서 정의 문장이 전적으로 무시되고 있는 것은 아니다. 의도적으로, 정의 문장에 주목해야 하는 활동이 분명히 포함되어 있다. 교과서에 드러나지 않더라도 교사용 지도서의 설명에 분명하게 드러나 있는 경우들을 앞서 확인해 보았다. 교사의 재량에 따라, 정의 문장이 부각될 수 있는 여지를 가지고 있다는 것이 교재 분석 차원에서 드러났다고 여겨진다.

연구자는 중학교 2 학년에서 다룰 논증기하를 위해 초등학교에서 정의 문장을 일부러 보다 강조해야 한다고 주장하려는 것은 아니다. 순전히 논증기하를 위한 전 단계로 직관기하가 기능 하는 것이 아니라, 직관기하 고유의 기능이 있기 때문이다. 다만, 정의 문장에 주목해야 되는 내용을 지도할 때에는 소중한 기회이니만큼, 충분히 그 의도를 살릴 필요가 있다는 것이다. 교사의 경각심과 판단력이 요구되는 것이다. 교사는 자료를 제시하고 적절한 환경을 마련해 주는 것 이상으로 학생들이 발견해야 할 내용에 관하여 질문을 하고 할 일을 시사하는 등 “언어를 미묘하게 구사하고 경험을 안내하는(박재문, p. 75, 재인용)” 일을 해야 하는 것이다.

연구자는 논증기하에 대비한 정의에 대한 태도와 관련하여 다음과 같은 제언을 하고자 한다. 현재 교육과정에서 중학교 1학년은 초등학

교에서 배운 직관기하의 내용들을 재 진술하는 형태로 되어 있다. 이 단계에서 주로 하는 작업의 큰 특징은 기호화라고 말할 수 있다. 예를 들면 다음과 같다.

<교과서 4-1, p. 91>

한 직선에 수직인 두 직선을 그으면, 이 두 직선은 서로 만나지 않는다. 이와 같이 한 직선에 수직인 두 직선은 서로 평행이라고 한다. 이 때, 평행인 두 직선을 평행선이라고 한다.

<교과서 중1, p. 202>

한 평면 위의 두 직선 l, m 이 서로 만나지 않을 때, 이 두 직선은 평행이라 하고, 이것을 기호로 $l // m$ 와 같이 나타낸다. 서로 평행인 두 직선을 평행선이라고 한다.

기호화 작업은 다음 학년에 다루게 될 논증기하 학습을 위한 준비작업의 성격이 짙다. 마찬가지로, 만약 논증기하를 의미 있게 지도할 수 있는 방안들이 강구된다면, 그 방법에는 정의 문장 자체에 주목하도록 하는 활동이 고려될 필요가 있다고 생각한다. 사실, 본론에서 살펴본 대로, 초등학교 직관기하에서도 정의 문장을 전적으로 도외시 할 수 없긴 하지만, 이는 어디까지나 정의되는 개념 또는 심상의 형성에 종속되어 있다고 볼 수 있다. 개념 또는 심상의 형성에 기여하는 한도 내에서 정의 문장이 주목받는 것이다. 따라서, 정의 문장 자체에 주목해야 한다는 지적 필요성을 느낄 수 있는 계기를 마련하는 것이 요구된다. 이러한 생각이 더 간절한 이유는, 은연중에 정의 문장이 부각되어 학생들이 거의 무의식적으로 정의문장들을 기억하고 있는 것—이는 직관기하에서 볼 수 있는 수준이라고 여겨진다—과, 지적 필

요성에 의해 의식적으로 정의문장들을 기억하고 암기해야 할 대상으로 여기는 것에는 수준의 차이가 있는 것으로 여겨지기 때문이다.

이를 위해 새로운 내용이 도입되어야 하는지에 대해서는 보다 연구가 되어야겠지만, 현재의 교육내용에서도 이런 기회를 마련할 수 있을 것으로 짐작된다. 현행 교육과정에서 그 단계는 중1 수준이 되어야겠지만, 설령 논증기하를 가르치는 학년이 옮겨지더라도, 정의 문장에 대해 주목하는 활동들이, 기호화 활동과 마찬가지로, 선행되는 것은 논증기하를 효율적으로 지도하기 위한 바람직한 배려라고 생각한다.

참고문헌

교육부(1996). 수학1-1. 서울: 교육부
 _____(1996). 수학1-2. 서울: 교육부
 _____(1996). 수학2-1. 서울: 교육부
 _____(1996). 수학2-2. 서울: 교육부
 _____(1996). 수학3-1. 서울: 교육부

_____ (1996). 수학3-2. 서울: 교육부
 _____ (1996). 수학4-1. 서울: 교육부
 _____ (1996). 수학4-2. 서울: 교육부
 _____ (1996). 수학5-1. 서울: 교육부
 _____ (1996). 수학5-2. 서울: 교육부
 _____ (1996). 수학6-1. 서울: 교육부
 _____ (1996). 수학6-2. 서울: 교육부
 김연식, 김홍기(1996). 중학교 수학 2. 서울: 두산동아
 나귀수(1998). 증명의 본질과 지도 실제의 분석. 서울대 대학원 박사학위 논문.
 박재문(1998). 지식의 구조와 구조주의. 서울: 교육과학사
 서동엽(1999). 증명의 구성 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색. 서울대 대학원 박사학위 논문.
 이항(1974). 파스칼 소품집. 서울: 정음사
 Vinner(1991), The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall(ed), *Advanced mathematical thinking*(pp.65-81). Kluwer Academic Publishers.

An analysis of the functions of definitions in intuitional geometry and the implications for proof teaching

Cho Young Mi (Seoul National University, Graduate School)

This study is on the differences of the functions of definitions between in proof geometry and in intuitional geometry. There are the functions of definitions in intuitional geometry which may connect to those in

proof geometry. We assert that when we teach them, we should be careful, for the teaching of the functions of definitions in proof.