

비정상 포텐셜 유동의 패널법 해석에서 포텐셜의 2차 미분값의 수치계산

양진호* · 전호환**

*부산대학교 조선해양공학과 대학원(현재 현대선박해양연구소)

**부산대학교 조선해양공학과 기계기술연구소

Numerical Evaluation of 2nd Derivatives of the Potential in the Panel Method for the Unsteady Potential Flow Problem

JIN-HO YANG* AND HO-HWAN CHUN**

*Dept of Naval Architecture & Ocean Engineering, Pusan National University (presently, Hyundai Maritime Research Institute, Jeonha-dong, Dong-ku, Ulsan 682-792, Korea)

**Dept of Naval Architecture & Ocean Engineering, Research Institute of Mechanics and Technology, Pusan National University, Pusan 609-735, Korea

KEY WORDS: Unsteady flow analysis 정상 유동해석, Rankine source method 랭킨소오스법, Double body 이중모형, Low order panel method 저차패널법, 2nd derivative of potential 포텐셜의 2차 미분, Extrapolation 외삽법

ABSTRACT: In solving the unsteady potential flow problem of the ship in waves with the panel method, in general one can consider the basic flow as the free stream or double body solution. For the double body solution, the body boundary condition has the 2nd derivatives of the velocity potential. Low order panel methods are known to suffer from the significant error in the 2nd derivatives computed at the body surface. This paper analyzes the numerical error in the 2nd derivatives for a 2-D cylinder and a 3-D sphere problem, and an extrapolation method to obtain the correct derivatives on the body surface is suggested.

1. 서 론

최근에는 랭킨소오스를 이용한 패널법이 선박의 비정상 유동 해석에 널리 사용되고 있다. 이 방법은 랭킨 소오스를 그린 함수로 사용하고 선체 및 자유표면에 특이점을 분포시켜 문제를 해석하는 것이다. Betram(1990), Sclavounos and Nakos(1990), Nakos(1990), Hong(1994), Betram and Yasukawa(1996), Bruzzone and Gualeni(1998) 등이 이러한 랭킨소오스법을 이용하여 선박의 비정상 유동 해석에 적용하였다.

이러한 랭킨소오스법으로 경계치 문제를 해석할 때 기본 유동을 입사 자유유동(free stream)과 이중모형(double body) 유동으로 가정할 수 있다. 이중모형 유동을 사용할 경우, 물체표면 경계조건은 이중모형 포텐셜의 2차 미분형태로 표현된다. 저차 패널법에 의한 포텐셜의 2차 미분 값 계산은 상당한 오차를 가지고 있는 것으로 알려져 있다. Zhao and Faltinsen(1989)은 2차원 실린더 표면에서 포텐셜의 2차 미분값을 엄밀해와 비교하고 외삽법에 의해 올바른 미분 값을 구할 수 있음을 보였다. Nakos(1990)는 Stokes 정리를 이용해서 이중모형 포텐셜의 2차 미분형태를 1차 미분으로 바꿔 계산함으로써 오차를 제거하였다.

본 논문에서는 문제를 간단히 하기 위해 자유표면이 없는 2

차원 실린더와 3차원 구가 정상 유동인 경우, 포텐셜과 또한 그 2차 미분을 저차 패널법으로 구하고 엄밀해와 비교하였다. 물체표면에서 포텐셜의 2차 미분은 표면에서 떨어진 점들의 값들로부터 다항식 근사에 의한 외삽으로 구하는데 다항식의 차수와 계산점들의 위치 변화에 따른 2차 미분 값을 조사하였다.

2. 물체표면 경계조건

파랑중 전진하는 선박문제에 대한 선형이론 (Ogilvie & Tuck(1969), Newman(1978))이나 파랑-조류-물체의 상호간섭 문제(Zhao & Faltinsen(1988))에서 강제 운동의 비정상 포텐셜에 대한 물체표면 경계조건은 다음과 같다

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial n} = i\omega n_j + Um_j \quad j = 1, 2, \dots, 6 \text{ on } S \quad (1)$$

S는 물체의 평균 침수표면이다. n_j 와 m_j 는 기본 유동을 입사 자유유동으로 가정하면 다음으로 되지만,

$$[n_1, n_2, n_3] = \vec{n}$$

$$\begin{aligned}
 [n_4, n_5, n_6] &= \vec{x} \times \vec{n} \\
 [m_1, m_2, m_3] &= [0, 0, 0] \\
 [m_4, m_5, m_6] &= [0, n_3, -n_2]
 \end{aligned} \quad (2)$$

기본 유동을 이중모형으로 가정하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 [m_1, m_2, m_3] &= -(\vec{n} \cdot \nabla) \nabla \phi_D \\
 [m_4, m_5, m_6] &= -(\vec{n} \cdot \nabla)(\vec{x} \times \nabla \phi_D)
 \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 n_j 는 물체표면의 법선벡터, \vec{x} 는 물체표면의 위치벡터, ϕ_D 는 이중모형 포텐셜이다. 따라서, m_j 에는 ϕ_D 의 2차 미분값이 필요하다. 이러한 m_j 항에 포함된 2차 미분값은 저차 패널법으로는 물체표면에서 상당한 오차를 가진다.

문제를 간단히 하기 위해 무한원방에서 정상상태의 2차원 실린더와 3차원 구 주위의 포텐셜과 2차 미분 값을 저차 패널법으로 계산하고 엄밀해와 비교하였다.

3. 2차원 실린더 문제

Green 정리에 의해 2차원 교란(perturbed) 속도 포텐셜은 다음과 같다.

$$2\pi\phi = \int_s (\sigma \log r - \mu \frac{\partial \log r}{\partial n}) ds \quad (4)$$

여기서 σ, μ 는 소오스와 다이폴의 강도, s 는 경계면, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 이다. 다이폴을 분포시키지 않고 소오스만 분포시키고, 기본 유동을 입사 자유유동이라 가정하면 전체 속도 포텐셜은

$$\phi = Ux + \frac{1}{2\pi} \int \sigma \log r ds \quad (5)$$

이다. (1)식으로부터 정상문제의 물체표면 경계조건인 법선방향의 유속이 0이라는 조건을 만족하는 소오스 강도를 구하면 입의점에서의 포텐셜을 얻을 수 있다.

반경 R 인 2차원 실린더 주위의 정상 유동에 대한 엄밀한 전체 속도 포텐셜은 다음과 같다.

$$\phi = U(x + \frac{R^2 x}{r^2}) \quad (6)$$

Fig. 1은 반경 R 인 실린더가 입사 자유유동의 유속($U=1$)속에 있을 경우의 좌표계를 보여주고 있다. 패널의 길이를 ds , 패널의 법선방향의 길이를 dl 이라고 한다. 포텐셜의 2차 미분값을 비교하기 위한 점은 실린더 표면 $\theta = 45^\circ$ 인 점으로 하였다. 그 이유는 패널수가 증가해도 똑같은 점에서 포텐셜의 2차 미분값을 보고자 함이다. 그리고 이 점에서는 $\phi_{xx}, \phi_{xy}, \phi_{yy}$ 가 부호만 다르고 값이 같으므로 ϕ_{xx} 결과만 보여도 되기 때문이다. 패널수를 64개, 256개로 변화시켜 포텐셜의 2차 미분값을 계산해 보았다.

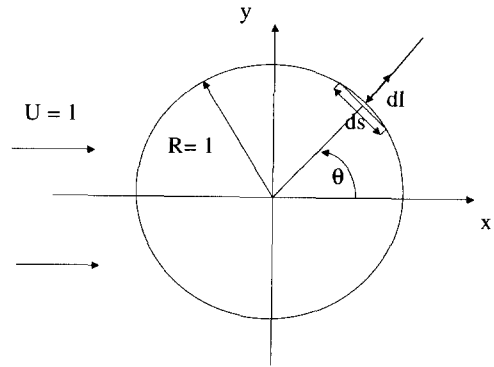


Fig. 1 Coordinates for cylinder in uniform flow

포텐셜의 1차 미분값은 압력계수(C_p)를 구하는데 필요하고 압력계수는 Fig.2에서 보듯이 패널수 64개에서도 엄밀해와 동일함으로 여기서는 비교하지 않았다. 여기서는 물체표면 근처에서 포텐셜의 2차 미분값을 패널 길이(ds)에 대한 패널의 법선방향 길이(dl)의 비를 변화시킴으로써 나타내어 보았다(Fig.3 ~ Fig.4). Fig.3에서 dl/ds 의 변화에 따른 포텐셜의 2차 미분값이 dl/ds 가 작아짐에 따라 즉, 물체표면에 가까워질수록 엄밀해와는 많은 차이가 있음을 알 수 있다.

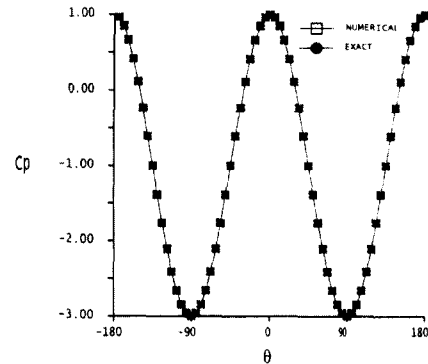


Fig. 2 C_p variation on the cylinder surface (panel no. = 64)

따라서, 물체표면에서 포텐셜의 2차 미분 값을 올바르게 계산하기 위해서는 물체표면에서 떨어진 값들로부터 외삽에 의해 구할 필요가 있다. Fig. 3과 Fig. 4를 보면 대체로 dl/ds 값이 1 이상에서 포텐셜의 2차 미분값이 엄밀해와 거의 같음으로 이 점에서부터 외삽을 시작하였다. Fig 3.(패널수 64개)과 Fig. 4.(패널수 256개)에서는 Table 1 에서 보인 간격(표에서 interval 1이란 나중에 Table 2에서 보이는 x 좌표의 간격과 구분하기 위함임)으로 다항식의 차수를 3, 4, 5, 6, 7차로 변화시키면서 외삽하여 물체표면에서 포텐셜의 2차 미분값을 나타내었다.

2차원 문제에서는 패널수에 대해 특별히 민감하지도 않고 3차, 4차 외삽만으로도 물체표면에서 포텐셜의 2차 미분값이 엄밀해와 거의 같아짐을 알 수 있다.

4. 3차원 구 문제

Green 정리에 의해 3차원 교란 속도 포텐셜은 다음과 같다.

$$4\pi\varphi = \iint_s \left(\sigma \frac{1}{r} - \mu \frac{\partial(1/r)}{\partial n} \right) ds \quad (7)$$

여기서, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 이다. 다이폴을 분포시키지 않고 소오스만 분포시키고, 기본 유동을 입사 자유유동이라 가정하면 전체 속도 포텐셜은

$$\phi = Ux + \frac{1}{4\pi} \iint_s \sigma \frac{1}{r} ds \quad (8)$$

이다. 이 식을 사용하여 정상문제의 물체표면 경계조건인 법선방향의 유속이 0이라는 조건을 만족하는 소오스 강도를 구하면 입의점에서의 포텐셜을 얻을 수 있다.

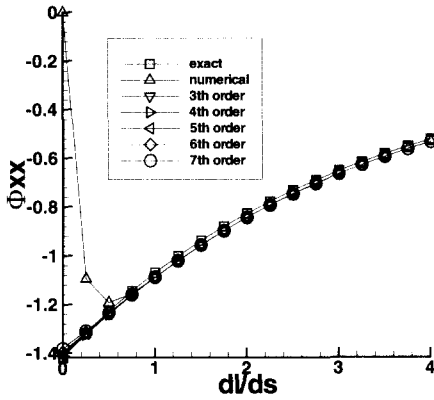


Fig. 3 ϕ_{xx} for cylinder (panel no. = 64)

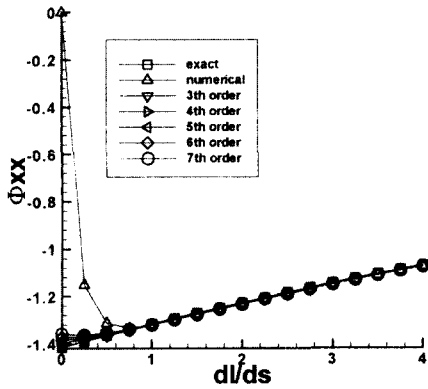


Fig. 4 ϕ_{xx} for cylinder (panel no. = 256)

Table 1 x coordinates for extrapolation (interval 1)

polynomial order	dimensionless x coordinates (dl/ds)
3th order	1, 1.5, 2.0
4th order	1, 1.5, 2.0, 2.5
5th order	1, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0
6th order	1, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5
7th order	1, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0

반경 R인 3차원 실린더 주위의 유동에 대한 엄밀한 전체 속도 포텐셜은 다음과 같다.

$$\phi = U \left(x + \frac{R^3 x}{2r^3} \right) \quad (9)$$

입사 자유유동의 유속(U)이 1이고, 구의 반경(R)이 1인 구에 대해서 패널의 대각선 길이를 ds, 패널 법선방향의 길이를 dl이라고 한다. 포텐셜의 1차, 2차 미분값을 비교하기 위한 계산은 위도(v)와 경도(u)가 45°인 점으로 한다. 그 이유는 패널수가 증가해도 똑같은 점에서 포텐셜의 2차 미분값을 보고자 함이다. 패널수를 324개, 900개로 변화시켜 계산해 보았다.

Fig. 5는 패널수 324개를 사용하여 계산(v = 45°이고, u가 변할 때 포텐셜값)한 포텐셜값과 엄밀해를 보여주고 있으며, 두 값은 거의 일치함을 보여주고 있다. 따라서, 패널의 변화에 따른 포텐셜값은 보이지 않는다.

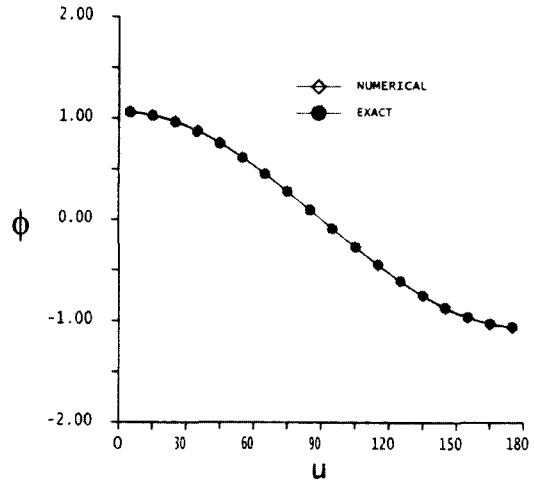


Fig. 5 ϕ for sphere in $v = 45^\circ$ (panel no. = 324)

물체표면 근처에서 포텐셜의 1차, 2차 미분값을 패널 길이(ds)에 대한 패널의 법선방향의 길이(dl)의 비의 변화에 대해서 Fig. 6 ~ Fig. 10에 보여주고 있다.

Fig. 6은 패널수가 324개일 때 dl/ds의 변화에 따른 포텐셜의 1차 미분 ϕ_x , ϕ_y , ϕ_z 값을 보여주고 있으며, 그 위치에 관계없이 엄밀해와 거의 비슷함을 알 수 있다. 즉, 포텐셜의 1차 미분값은 물체표면에서 엄밀해와 일치함을 알 수 있다.

Fig. 7 ~ Fig. 10은 dl/ds의 변화에 따른 포텐셜의 2차 미분 ϕ_{xx} 값을 계산한 결과를 보여주고 있다. 나머지 포텐셜의 2차 미분 ϕ_{xy} , ϕ_{xz} , ϕ_{yy} , ϕ_{yz} , ϕ_{zz} 값들도 ϕ_{xx} 와 거의 같은 모양을 보여주므로 본 논문에서는 보이지 않는다. Fig. 7에서 dl/ds의 변화에 따른 포텐셜의 2차 미분값이 dl/ds가 점점 작아짐에 따라서 즉, 물체표면에 가까워질수록 엄밀해와는 차이가 커짐을 알 수 있다.

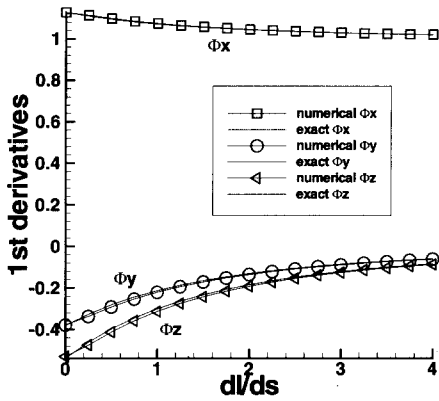


Fig. 6 1st derivatives for sphere (panel no.=324)

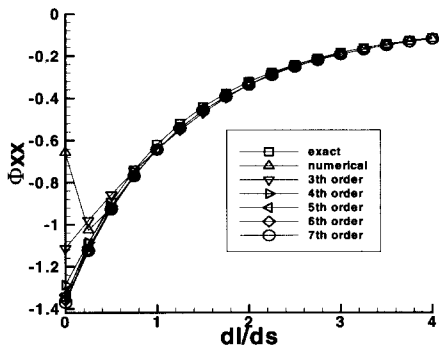


Fig. 7 Φ_{xx} for sphere (panel no.=324, interval 1)

따라서, 물체표면에서 포텐셜의 2차 미분값을 올바르게 계산하기 위해서는 물체표면에서 떨어진 값들로부터 외삽에 의거할 필요가 있다. 2차원 문제에서와 마찬가지로 대체로 dl/ds 값이 1 이상에서 포텐셜의 2차 미분값이 엄밀해와 거의 같으므로 이 점에서부터 외삽을 시작하였다.

외삽을 위한 다항식의 차수는 3 ~ 7차로 변화시키고 외삽의 x 좌표는 Table 1 과 Table 2에 보인 바와 같다. Table 1 은 x 좌표가 $0.5(dl/ds)$ 간격이고 (이를 interval 1이라 부름), Table 2 는 $0.25(dl/ds)$ 간격이다 (이를 interval 2라 부름). 이는 x 좌표 간격의 변화에 따라 같은 다항식의 차수로 외삽을 할 때, 물체표면에서 포텐셜의 2차 미분값이 어떻게 다른지를 보기 위함이다.

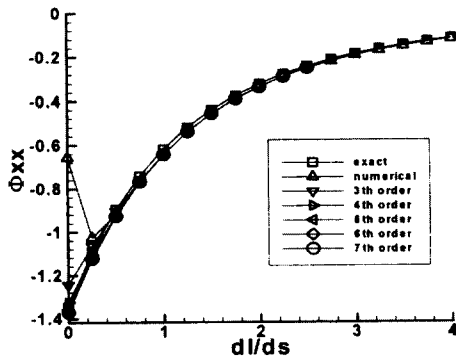


Fig. 8 Φ_{xx} for sphere (panel no.=324, interval 2)

Table 2 x coordinates for extrapolation (interval 2)

polynomial order	dimensionless x coordinates (dl/ds)
3th order	1, 1.25, 1.50
4th order	1, 1.25, 1.50, 1.75
5th order	1, 1.25, 1.50, 1.75, 2.00
6th order	1, 1.25, 1.50, 1.75, 2.25
7th order	1, 1.25, 1.50, 1.75, 2.25, 2.50

Fig. 7(패널수 324개)과 Fig. 9(패널수 900)에서는 Table 1에서 보인 간격으로 다항식의 차수를 3 ~ 7차로 변화시키면서 외삽하여 물체표면에서 포텐셜의 2차 미분값을 나타내었다. 패널수 324개인 경우는 5차이상, 패널수 900개인 경우는 4차이상의 외삽을 함으로써 엄밀해와 거의 같아짐을 알 수 있다.

Fig. 8(패널수 324개)과 Fig. 10(패널수 900)에서는 Table 2에서 보인 간격으로 다항식의 차수를 3 ~ 7차로 변화시키면서 외삽하여 물체표면에서 포텐셜의 2차 미분값을 나타내었다. 패널수 324개인 경우는 4차이상, 패널수 900개인 경우는 3차이상의 외삽을 함으로써 엄밀해와 거의 같아짐을 알 수 있다.

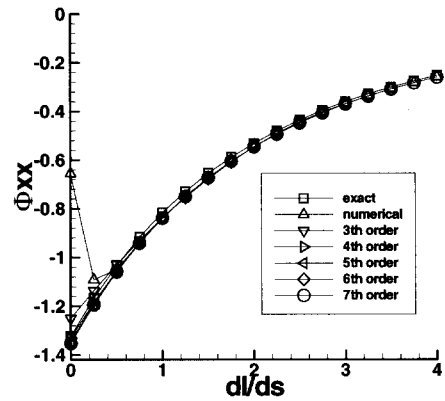


Fig. 9 Φ_{xx} for sphere (panel no.= 900, interval 1)

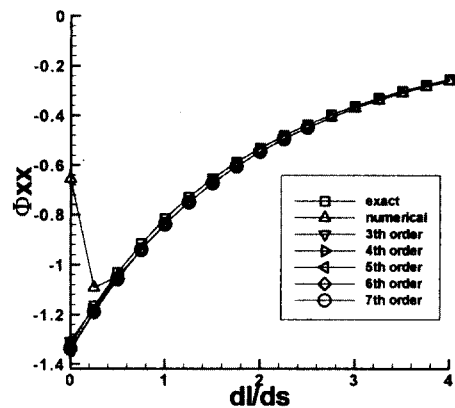


Fig. 10 Φ_{xx} for sphere (panel no.=900, interval 2)

5. 결 론

2차원 실린더와 3차원 구 표면에서 저차 패널법에 의해 계산된 포텐셜의 2차 미분값은 엄밀해와 상당히 다르다. 본 논문에서는 물체표면에서 포텐셜의 2차 미분값을 표면에서 떨어진 점들의 값들로부터 다항식 근사에 의한 외삽으로 구하였다. 2차원 문제에서는 패널수에 관계없이 3차이상의 외삽에 의해 물체표면에서 포텐셜의 2차 미분값을 정확히 얻어낼 수 있었다. 3차원 문제에서는 패널수가 많아질수록 외삽의 간격이 좁을수록 낮은 차수의 외삽으로도 물체표면에서 포텐셜의 2차 미분값을 정확히 구해낼 수 있었다.

참 고 문 헌

- Betram, V.(1990), "A Rankine Source Method for Forward Speed Diffraction Problem", Ph. D. Thesis, University of Hamburg.
- Betram, V. and Yasukawa, H.(1996), "Rankine Source Methods for Seakeeping Problems", STG Jahrbuch, pp 411~425.
- Bruzzo, D. and Gualeni, P.(1998), "Three Dimensional Seakeeping Calculation by a Rankine Source Method", Proc. of 3rd International Con. on Hydrodynamics(ICH), pp 149~154.
- Hong S. Y.(1994), "Analysis of Steady and Unsteady Flow around a Ship Using a Higher-Order Boundary Element Method", Ph. D. Thesis, Seoul National University, Korea (in Korean).
- Nakos, D. E.(1990), "Ship Wave Patterns and Motions by a Three Dimensional Rankine Panel Method", Ph. D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- Newman, J. N.(1978), "The Theory of Ship Motions", Advances in Applied Mechanics, Vol. 18, pp 221~283.
- Ogilvie, T. F. and Tuck, E. O.(1969), "A Rational Strip Theory of Ship Motion: Part I", Report no. 013, University of Michigan.
- Scavounos, P. D. and Nakos, D. E.(1990), "Ship Motions by a Three Dimensional Rankine Panel Method", Proc. 18th Symposium on Naval Hydrodynamics, USA., pp 1~19.
- Zhao, R. and Faltinsen, O.(1988), "Interaction between Waves and Current on a Two Dimensional Body in the Free Surface", Applied Ocean Research, Vol. 10. No. 2, pp 87~99.
- Zhao, R. and Faltinsen, O.(1989), "A Discussion of the m-terms in the Wave-Current-Body Interaction Problem", 3rd International Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Norway, pp 1~4.

2000년 1월 14일 원고 접수

2000년 8월 3일 수정본 채택