한국해양공학회지 제14권 제3호, pp 35~40, 2000 (ISSN 1225-0767)

가상수조에서 자유표면을 가진 유체흐름의 가시화시뮤레이션

김남형* · 김남국**
*제주대학교 해양토목공학과, **제주대학교 대학원

The Visual Simulation of Fluid Flow with Free Surface in a Virtual Water Tank

NAM-HYEONG KIM* AND NAM-KUK KIM**
Department of Ocean Civil Engineering, Cheju National University, Cheju 690-756, Korea

KEY WORDS: SMAC method 에스맥법, Marker particles 마커입자, Flow analysis 유동해석, Virtual water tank 가상수조, Free surface 자유표면

ABSTRACT: *SMAC method is, one of the numerical simulation techniques, modified from the original MAC for the time-dependent variation of fluid flows. The Navier-Stokes equation for incompressible time-dependent viscous flow is applied and, Also marker particles which move with the fluid are used. Two-dimensional numerical computations of fluid flow are carried out in a virtual water tank. This paper has shown very well the movements of marker particles using SMAC method.*

1. 서 론

컴퓨터의 용량과 연산속도가 급속히 증가함에 따라, 이론적으로 해석이 쉽지 않은 물리적 현상들을 해결하기 위하여 컴퓨터를 이용한 수치기법들이 활발히 연구되어 왔다. 수치유체역학의 분야에서는 연속차원의 문제를 유한차원의 문제로 해석하는 기법의 하나인 유한차분법(FDM, finite difference method)이 주로 사용되어 왔다. 그러나 유체와 대기가 접하는 부분, 즉 자유표면의 위치와 형상을 인식하거나, 그 표면에서의 속도 등을 계산하는 문제는 그리 쉬운 문제는 아니다.

이러한 이유로 자유표면을 가진 2차원의 비압축성 유동을 해석하기 위하여 MAC법이 개발되었다(Harlow and Welch, 1965; Welch *et al.* 1966; Hirt and Harlow, 1967; Hirt, 1968). MAC법은 대상으로 하는 계산영역을 5종류의 셀로 구분하고 그 특성에 따라 몇개의 Marker를 배치하여 유체의 형상을 파악하도록 하는 것이다. 이 입자는 중량을 가지고 있지 않은 이상화된 입자로서 유체의 형상을 나타내기 때문에 MAC법(marker and cell)으로 불려진다. 이 Marker는 속도장 · 압력장 등의 계산에는 직접 관여하고 있지는 않지만, 계산결과의 시각화 · 흐름의 가시화에 중요한 역할을 한다. MAC법이 발표된 이후에 많은 수정을 거쳐 계산 시간을 현저하게 단축시킬수 있도록 Scheme을 개량한 SMAC법(simplified marker and cell)이 제안 되었다(Amsden and Harlow, 1970; Hirt *et al.* 1974). MAC 및 SMAC계열의 수치해석법은 유체의 표면형상이 시간과 더불어 연속적으로 변화하는 문제의 해석에 유용한 방법이며, 저자도 SMAC법을 이용한 수치해석의 타당성과 유효성을 검증한바 있다(김과 김, 1996).

본 연구는 SMAC법을 이용한 기초적인 연구로서, 가상 수조 안에 장애물을 설치했을 때의 유체 흐름을 예로 들어, 수치시뮤레이션을 수행하고 그 결과를 가시화한 것이다.

2. 기본방정식

2차원 직교좌표계에서의 비압축성인 흐름을 해석하기 위한 기본방정식은 연속방정식과 Navier-Stokes방정식으로 다음과 같다.

$$D=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+F_x \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+F_y \tag{3}$$

여기서, u, v는 x, y방향의 속도성분, p는 압력, ρ는밀도, ν는 동점성계수, F_x, F_y는 x, y방향에 작용하는 단위질량당의 외력성분을 나타낸다. 식(1)을 이용하여, 식(2)와 식(3)을 약간 변형하면 다음과 같이 된다.

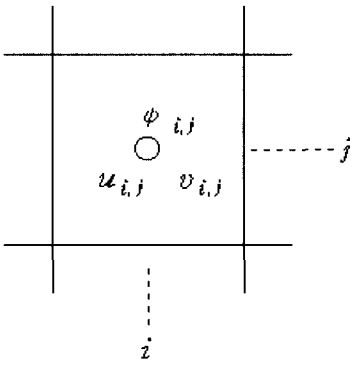
$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u^2}{\partial x}+\frac{\partial (uv)}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+F_x \tag{4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial (uv)}{\partial x}+\frac{\partial v^2}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-\nu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+F_y \tag{5}$$

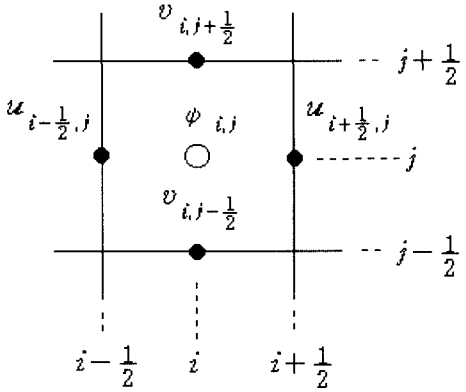
으로 된다. 본 논문에서는 식(1), 식(4), 식(5)을 기초방정식으로 이용한다.

3. 기초방정식의 이산화

편미분형태의 기초방정식을 차분하기 위해서는 엇갈린 격자망(staggered mesh)을 사용한다. 일반적으로 쓰이는 격자망에서는 속도와 압력을 격자의 중앙에서 정의하지만 엇갈린 격자망의 경우, 속도는 격자의 중심에서, 압력은 격자의 중앙에서 정의한다. 엇갈린 격자망을 사용한 이유는 일반적인 격자망에서와 같이 속도, 압력을 동일점에서 정의하는 경우에 수치해석의 부정확성과 불안정성을 초래할 수 있기 때문이다. 일반적인 격자망과 엇갈린 격자망에서 각 변수들의 정의는 Fig. 1에 나타냈다. 식(1)과 식(4)-(5)에서 시간은 전진차분, 공간은 중심차분을 이용하면, 다음과 같은 차분방정식이 얻어진다. 단, 이송항의 차분에는 Doner-Cell법을 이용한다.



(a) The variables in a typical mesh



(b) The variables in a staggered mesh

Fig. 1 Comparison of the variables in 2 mesh types

$$D_{i,j}^{n+1}=\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}-u_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}}{\delta x}+\frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}-v_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\delta y}=0 \tag{6}$$

$$\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}=u_{i+\frac{1}{2},j}^{n}+\delta t\left[\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{n}\left(u_{i-\frac{1}{2},j}^{n}-u_{i+\frac{3}{2},j}^{n}\right)}{\delta x}+\frac{(u\cdot v)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n}-(u\cdot v)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n}}{\delta y}+\frac{\theta_{i,j}-\theta_{i+1,j}}{\delta x}+\nu\left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1}^{n}+u_{i+\frac{1}{2},j-1}^{n}-2u_{i+\frac{1}{2},j}^{n}}{\delta y^2}-\frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{n}-v_{i+1,j-\frac{1}{2}}^{n}-v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n}+v_{i,j-\frac{1}{2}}^{n}}{\delta x\delta y}\right)+F_x\right] \tag{7}$$

$$\tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}=v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n}+\delta t\left[\frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n}\left(v_{i,j-\frac{1}{2}}^{n}-v_{i,j+\frac{3}{2}}^{n}\right)}{\delta y}+\frac{(u\cdot v)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n}-(u\cdot v)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n}}{\delta x}+\frac{\theta_{i,j}-\theta_{i,j+1}}{\delta y}-\nu\left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1}^{n}-u_{i-\frac{1}{2},j+1}^{n}-u_{i+\frac{1}{2},j}^{n}+u_{i-\frac{1}{2},j}^{n}}{\delta x\delta y}-\frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{n}+v_{i-1,j+\frac{1}{2}}^{n}-2v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n}}{\delta x^2}\right)+F_y\right] \tag{8}$$

여기서,

$$u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}=\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}+u_{i+\frac{1}{2},j+1}}{2},\quad v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}=\frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}+v_{i+1,j+\frac{1}{2}}}{2}$$

$$u_{i,j}=\frac{u_{i-\frac{1}{2},j}+u_{i+\frac{1}{2},j}}{2},\quad v_{i,j}=\frac{v_{i,j-\frac{1}{2}}+v_{i,j+\frac{1}{2}}}{2}$$

$$(u\cdot v)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}=u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\cdot v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$$

또, 윗첨자 $n+1$은 새로운 시간 $t=(n+1)\Delta t$의 유속값을 나타내며, 식(7)과 식(8)에 있어서 유속 u^{n+1}, v^{n+1}에 ~ 기호가 붙어 있는 것은 시간의 전진차분에 의해 시간 $(n+1)$의 값이 구해지는 것으로, 각각의 u, v는 식(6)을 만족하고 있지 않기 때문에, "임시유속"의 의미이다. 식(6)을 만족하기 위한 반복계산은 포텐셜함수 ψ를 이용하는데 그 이유는 ψ함수는 모든 경계에서 균일한 경계조건(homogeneous boundary condition)을 가지며 속도의 반복적 보정시 압력을 직접사용하는 것보다 수렴이 빠르기 때문이다. 포텐셜함수 ψ를 이용한 2차원 속도보정식은 다음과 같다.

$$u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}=\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}-\frac{\psi_{i+1,i}-\psi_{i,j}}{\delta x},\quad v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}=\tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}-\frac{\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j}}{\delta y} \tag{9}$$

식(9)을 이용하여 식(6)을 차분하면, 다음식이 구해진다.

$$D_{i,j}^{n+1}=\tilde{D}_{i,j}-\frac{\psi_{i+1,j}-2\psi_{i,j}+\psi_{i-1,j}}{\delta x^2}-\frac{\psi_{i,j+1}-2\psi_{i,j}+\psi_{i,j-1}}{\delta y^2} \tag{10}$$

$$\phi_{i,j}^{k+1}=\frac{1+\alpha}{\left(\frac{2}{\delta x^2}+\frac{2}{\delta y^2}\right)}\left[-D_{i,j}+\frac{\phi_{i+1,j}^{k}+\phi_{i-1,j}^{k+1}}{\delta x^2}+\frac{\phi_{i,j+1}^{k}+\phi_{i,j-1}^{k+1}}{\delta y^2}\right]-\alpha\phi_{i,j}^{k} \tag{11}$$

여기서, 변수 ϕ의 기호 k는 반복계산에 의한 ϕ의 수렴값으로 반복계산횟수를 나타내고 있다. 변수 α는 완화계수로서 다음의 범위 $(0\leq\alpha<1)$의 값을 사용해야 하며, 본 계산에서는 0.75를 사용하고 있다. 반복계산할 때에 수렴기준은 다음식을 사용한다.

$$\left|\frac{|\phi_{i,j}^{k+1}|-|\phi_{i,j}^{k}|}{|\phi_{i,j}^{k+1}|+|\phi_{i,j}^{k}|}\right|<\varepsilon \tag{12}$$

여기서는, ε은 0.0002로 했다.

4. 계산영역의 분류 및 경계조건

SMAC법에서는 공간으로 이산화된 유체를 Fig. 2에서 나타내듯이 5종류의 Cell로 나눈다.

① Empty Cell(빈 공간의 셀, E) : 입자를 포함하지 않은 셀, 즉 유체가 존재하지 않는 영역

② Surface Cell(표면셀, S) : 입자를 포함하면서 주위에 1개 이상의 빈 셀과 이웃하는 셀

③ Full Cell(유체의 셀, F) : 입자를 포함하면서 주위에 빈 셀과 이웃하지 않는 셀, 즉 유체로만 채워진 영역

④ Boundary Cell(경계의 셀, B) : 해석영역을 둘러싸는 경계의 셀

⑤ Obstacle Cell(장애물 셀, OB) : 해석영역 내부의 고체벽과 같은 장애물을 나타내는 셀

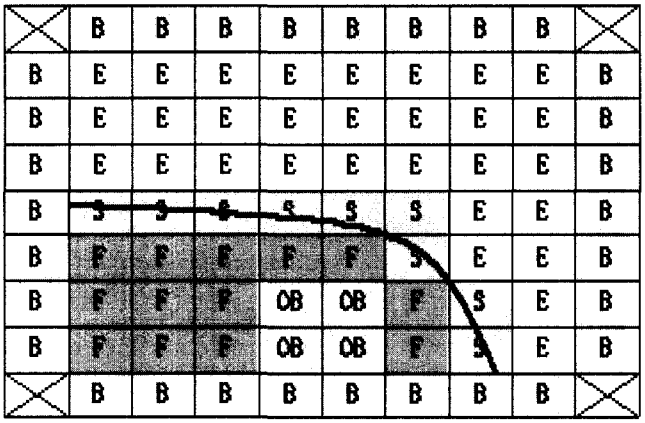


Fig. 2 Computing mesh and cell

해석하는 유체의 좌우상하벽면에 있어서 경계조건은 non-slip조건, slip조건, 주어진 유입조건을 사용했다. non-slip조건은 벽면이 점착성 또는 조면(粗面)인 경우로, 마찰력이 작용하는 것을 의미한다. Fig. 3의 기호를 이용하여 경계조건을 나타내면, 다음과 같다.

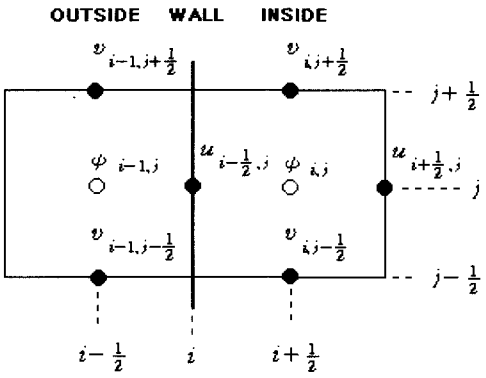


Fig. 3 The positions of variables at a left wall

a) non-slip조건

$$u_{i-\frac{1}{2},j}^{n}=0 \quad , \quad \psi_{i-1,j}=\psi_{i,j}$$
$$v_{i-1,j+\frac{1}{2}}^{n}=-v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n} \quad , \quad v_{i-1,j-\frac{1}{2}}^{n}=-v_{i,j-\frac{1}{2}}^{n} \tag{13}$$

b) slip조건

$$u_{i-\frac{1}{2},j}^{n}=0 \quad , \quad \psi_{i-1,j}=\psi_{i,j}$$
$$v_{i-1,j+\frac{1}{2}}^{n}=v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n} \quad , \quad v_{i-1,j-\frac{1}{2}}^{n}=v_{i,j-\frac{1}{2}}^{n} \tag{14}$$

c) 주어진 유입조건

$$u_{i-\frac{1}{2},j}^{n}=\text{주어진 유입속도} \quad , \quad \psi_{i-1,j}=\psi_{i,j}$$
$$v_{i-1,j+\frac{1}{2}}^{n}=v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n} \quad , \quad v_{i-1,j-\frac{1}{2}}^{n}=v_{i,j-\frac{1}{2}}^{n} \tag{15}$$

또, 자유수면의 경계조건은 입자의 운동의 궤적에서 S Cell을 식별하며, 접선응력의 조건은 다음식으로 주어진다.

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0 \tag{16}$$

식(16)에서 $u_{i+\frac{1}{2},j+1}^{n}$은 다음식의 이산형을 취한다.

$$u_{i+\frac{1}{2},j+1}^{n}=u_{i+\frac{1}{2},j}-\frac{\delta y}{\delta x}\left(v_{i+1,j+\frac{1}{2}}-v_{i,j+\frac{1}{2}}\right) \tag{17}$$

또, 식(15)을 점성항에 대입하면, 점성항은 소거된다. 법선응력의 조건은 다음과 같다.

$$\phi_{i,j}^{n}=\phi_{i,j}^{n}(\text{외부압력})+\frac{2\nu}{\delta y}\left(v_{i,j+\frac{1}{2}}-v_{i,j-\frac{1}{2}}\right) \tag{18}$$

5. 해석결과 및 고찰

계산의 수순을 Fig. 4에 나타낸다. Fig. 4에서 나타내듯이 계산의 전 과정은 크게 나누어 3개의 부분으로 구성이 된다. 먼저 제1단계에서는 초기계산영역에 있어서 와도이송을 보존하

는 $\tilde{u}, \tilde{v}$을 구하고, 다음의 제2단계에서 질량보존 $D=0$을 만족하는 u, v을 결정하며, 마지막 단계에서 이들을 이용하여 Marker를 이동시켜, 계산영역을 재설정한다. 이 3단계를 반복하는 것에 의해 각 시각에서의 속도, 압력을 구하며 연속적으로 Marker를 화면에 출력시킴으로서 애니메이션 효과를 얻는 것이다.

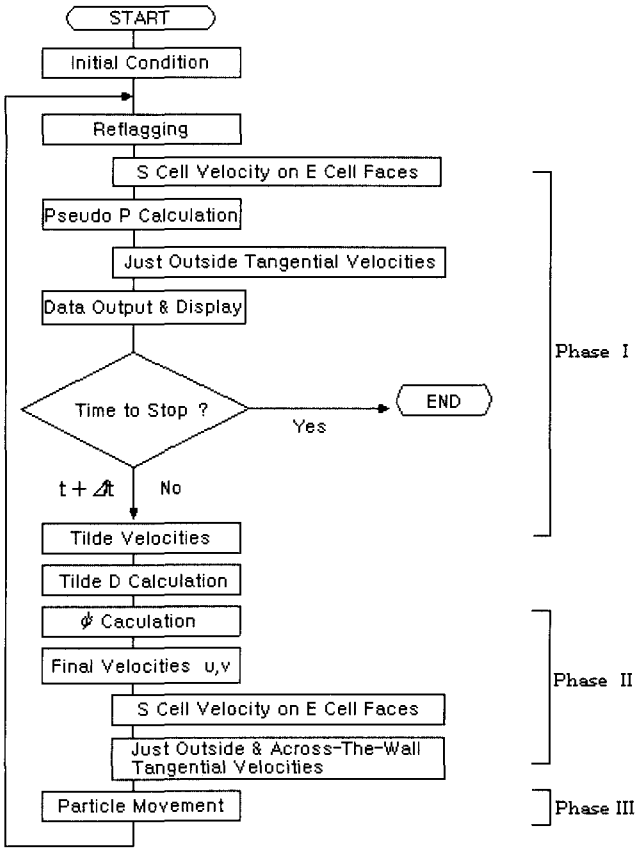
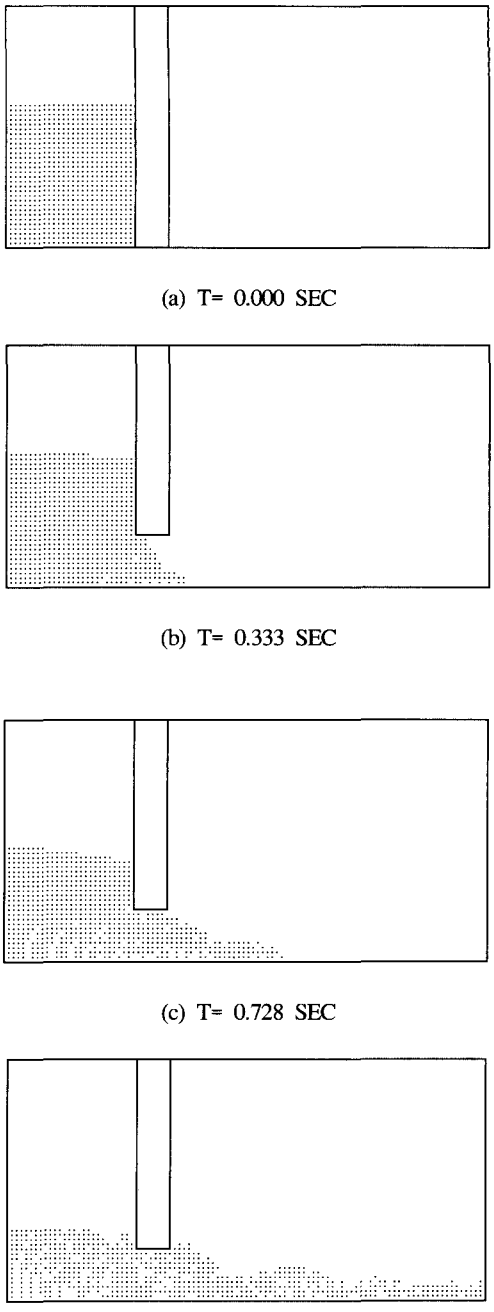


Fig. 4 The calculation cycle

첫번째의 계산예로서 격벽이 있는 수조의 왼쪽에만 유체를 채운 후 격벽을 약간 들어 올리는 경우를 시뮤레이션하였다. x방향으로 30Cell, y방향으로 15Cell로 하고 $\delta x=\delta y=0.5cm$으로 했기 때문에 전체 영역은 $15cm\times7.5cm$이며 초기 유체 영역은 $4cm\times4.5cm$이다. 유체의 동점성계수는 $\nu=0.001cm^2/\sec$로 하였으며, 경계벽의 조건은 이상화된 수조로 생각하여 마찰이 없는 slip조건으로 하였다. 중력가속도는 가상적 상황임을 감안하여 $-10\,cm/\sec^2$으로 하였다. 격벽 왼쪽에 채워진 유체가 격벽을 약간 들어 올렸을 경우, 유체의 이동형상을 Fig. 5에 시간의 경과에 따라 나타냈다. Fig. 5(b)는 격벽이 들어 올려진 직후의 유체의 초기 유동이 관찰되며, Fig. 5(c)에서는 유체가 바닥을 따라 흘러가는 형상이 관찰된다. Fig. 5(d)는 흘러나온 유체가 오른쪽벽에 부딪친 직후의 형상인데, 유체의 표면이 심하게 요동치는 현상을 알 수 있다.



(a) T= 0.000 SEC

(b) T= 0.333 SEC

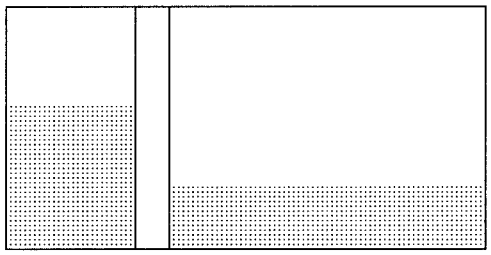
(c) T= 0.728 SEC

(d) T= 1.426 SEC

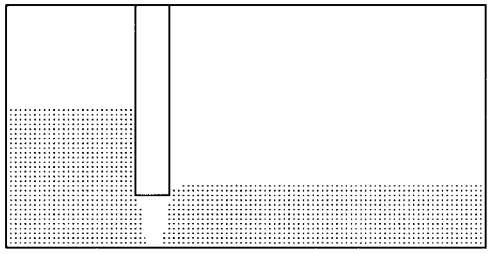
Fig. 5 Configuration of markers for the opening gate in the tank of not filled right-side at four different times

두 번째의 계산예로서는 첫 번째와 동일한 조건이나 격벽으로 나누어진 양쪽에 유체를 채운 후 처음과 같이 격벽을 들어 올리는 경우를 시뮤레이션하였다. 이 경우 격벽의 오른쪽 부분에 채워진 유체의 영역은 $10cm\times1.5cm$이다. 두 번째 예의 결과를 Fig. 6에 나타내었다. Fig. 6(b)는 격벽을 들어올린 직후의 유체의 유동인데 양쪽으로 나뉘어진 유체가 혼합되는 현상을

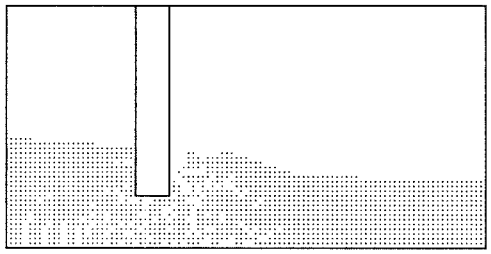
볼 수 있으며, Fig. 6(c)와 Fig. 6(d)에서는 혼합된 유체가 소용돌이를 형성하며 유체의 양이 적은 오른쪽으로 이동하는 현상을 알 수 있다. Fig. 5와 Fig. 6은 모두 일반적으로 생각할 수 있는 와도현상과 자유표면의 형상을 잘 나타내고 있다.



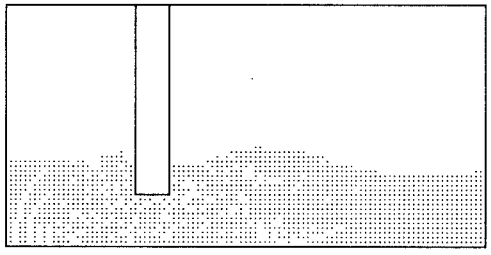
(a) T= 0.000 SEC



(b) T= 0.136 SEC



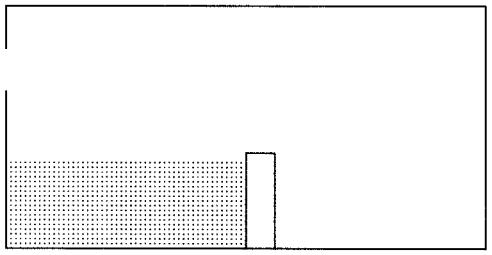
(d) T= 1.079 SEC



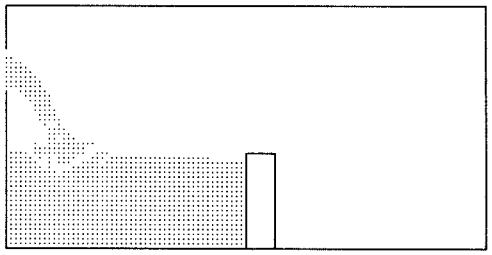
(d) T= 1.558 SEC

Fig. 6 Configuration of markers for the opening gate in the tank of a little filled right-side at four different times

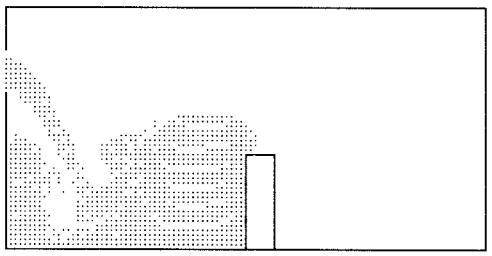
세 번째의 계산예로서는 장애물로 나뉘어져 있는 수조의 왼편에 유체를 채우고 유입구를 통해 유체를 주입시키는 경우에 유체의 거동에 대해서 시뮤레이션하였다. 유체의 동점성계수는 $\nu=0.3cm^2/\sec$로 하였고, 왼쪽 윗부분에서 유입되는 유체의 유입속도는 $3\,cm/\sec$이며 중력가속도는 $-10\,cm/\sec^2$이다. 첫 번째, 두 번째의 경우와는 달리 경계벽의 조건은 마찰이 있는 non-slip조건의 경우로 하였으며 시간의 경과에 따라 수조에 유체가 유입되는 과정을 Fig. 7에 나타내었다. Fig. 7(c)는 왼편의 유량의 증가와 유입되는 유체의 낙하 에너지에 의해서 유체가 장애물을 넘기 바로 직전의 형상을 보여주며, Fig. 7(d)는 장애물 꼭대기까지 도달한 유체의 일부는 장애물을 넘어가고, 일부는 장애물에 부딪친 충격으로 인해 반시계방향으로 돌아 왼편으로 이동하는 현상을 볼 수 있다. Fig. 7(e)는 오른편으로 넘어간 유체는 물결치며 오른편 수조를 채우기 시작하는 모습을 볼 수 있으며, Fig. 7(f)에서는 연속적인 유입으로 인해 형성되는 와도현상과 함께 유체의 수면 높이가 똑같이 높아지는 것을 알 수 있다.



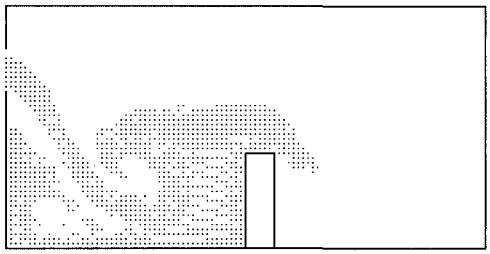
(a) T= 0.000 SEC



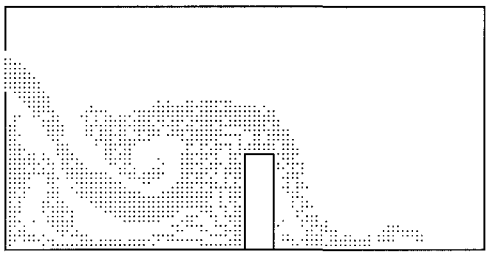
(b) T= 1.002 SEC



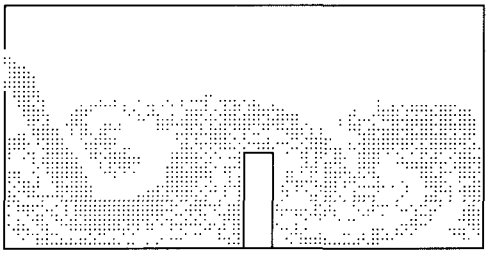
(c) T= 2.008 SEC



(d) T= 2.707 SEC



(e) T= 3.601 SEC



(f) T= 8.000 SEC

Fig. 7 Configuration of markers for the filling fluid in the tank with obstacle at six different times

6. 결론 및 요약

본 연구는 SMAC법을 이용하여 수치시뮤레이션을 수행한 것이다. 계산결과를 가시화하기 위하여 후처리 프로그램을 개발하였으며, 이를 사용하여 유체의 유동현상을 Marker의 분포로 나타냈다. 본 논문에서는 비교적 단순한 형태의 장애물과 계산영역만을 고려하였으나, Marker의 분포는 현실적인 유체의 유동현상을 잘 가시화하고 있다. 저수지, 운하, 댐 등에서 수문을 개방했을 때에 일어날 수 있는 물의 유동현상과 제방의 월류, 호안이나 방파제의 월파 등 실제의 유동현상을 예측하고 그 결과를 가시화하기 위해서는 복잡하고 실제적인 구조물, 계산영역의 확대, 다양한 경계조건의 적용 등이 필요하며, 앞으로 해결해야 할 연구과제이다.

참 고 문 헌

김남형 · 김남국(1996). "SMAC법에 의한 유체입자 충돌의 수치시뮤레이션", 제주대 해양연보, 20, 91~98.

Amsden, A. A. and F. H. Harlow.(1970). "The SMAC method. A numerical techneque for calculating; Incompressible fluid flows", Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California, Report LA-4370, 85.

Hirt, C. W.(1968). "Heuristic stability theory for finite difference equations", Jour. Comp. Phys., Vol. 2, pp 339~355.

Harlow, F. H. and J. E. Welch.(1965), "Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface", Phys. of Fluids, Vol. 8 No. 12, pp 2182~2189.

Hirt, C. W., A. A. Amsden and J. L. Cook.(1974). "An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds", Jour. Comp. Phys., Vol. 14, pp 227~253.

Hirt, C. W. and F. H. Harlow(1967). "A general corrective procedure for the numerical solution of initial value problems", Jour. Comp. Phys., Vol. 2, pp 114~119.

Welch, J. E., J. P. Harlow and B. J. Daly.(1966). "The MAC method. A computing technique for solving viscous, incompressible, transient fluid flow problems involving free surface", LosAlamos Scientific Laboratory of the University of California, Report LA-3425, 145.

2000년 5월 25일 원고 접수
2000년 7월 29일 수정본 채택