

## SOLO 분류법과 van Hiele의 기하학습 수준 이론의 관련성에 대한 고찰

류 성 립 (대구교육대학교)

### 1. 서론

기하학적 사고와 방법이 수학의 각 분야는 물론 자연 과학과 일상 생활에 깊이 스며들어 있는바, 기하의 개념과 그 속성은 초등은 물론 중등수학교육에서 중요하게 다루어야 할 본질적인 학습요소이다. 초등학교에서 6년간에 걸쳐 기하와 공간 개념에 대해 비형식적으로 학습해 오고 있지만, 중학교의 많은 학생들이 증명을 포함한 기하 개념과 관련하여 많은 오개념과 오류를 갖는 것으로 보고되고 있다(류성립, 1993, 1998; 우정호, 1994, 1998; Burger & Shaughnessy, 1986). 이러한 결과를 낳게 되는 이유에는 다양한 추론이 가능하겠지만, 특히 기하적 사고의 지도 방법과 관련하여 심리학적 또는 교수학적으로 분명한 견해가 제시되지 못하고, 결과적으로 교과서 저자나 교수요목 입안자들이 학생들의 기하와 공간 감각 개발에 적절한 일련의 학습 대상들에 대한 공통적인 견해를 갖지 못하는데 그 한 원인이 있다고 보는 학자들도 있다(Pegg & Davey, 1998). 따라서 일화적인 이야기이긴하겠지만, 어떤 교사들은 교과서의 내용을 피상적으로 지도하고 있어서 기하와 공간에 대한 주요 주제를 깊이 있게 다루지 못하거나 학년 수준간에 서로 연결지어 가르치지 못하고 있으며, 바꾸어 말하면 기하 학습과 관련하여 지도의 방향성과 목적이 부족하다는 느낌을 들게 할 수도 있다. 지금까지 학생들이 기하 개념을 이해해 나가는 과정에 대한 기하학적 사고 또는 인지 발달 단계에 관한 연구가 없었던 것은 아니다. 대표적으로, Piaget의 기하와 공간 개념의 발달에 관한 연구와 증명 개념이 발달하고 정당화시키는 세 가지 수준에 관한 연구, Freudenthal의 수학적 활동을 통한 안내된 재

발명 방법, 그리고 van Hiele의 기하 학습 수준 이론 등을 들 수 있다. Piaget의 연구 중에는 공간 표상의 발달에 관한 실험 결과—곡선의 내부와 외부, 개폐성, 연결성 등과 같은 위상적 성질에 대한 인식이 사영 개념이나 Euclid적 성질의 인식보다 앞서서 발달한다—는 ‘새 수학’에서 도형의 위상적 성질을 조기에 도입하기 위한 심리학적 근거로 이용함으로써 기하의 교수 요목을 구성하는데 어려움을 가져오기도 하였다. 또한 Freudenthal은 기하의 학습은 공간의 경험을 조직화하는 수학적 활동이어야 하며 연역적 구성과정을 재발명을 통해 학습시켜야 한다고 보고 국소적인 조직화를 거쳐 전체적인 조직화인 공리화에 이르도록 지도할 것을 요구하고 있다(우정호, 1998). 이러한 수학적 학습하는 방법적 기초 이론으로 van Hiele의 학습 수준 이론을 들 수 있다.

Van Hiele의 기하 학습의 사고 수준 체계는 1950년대에 네델란드의 Lycée의 수학 교사였던 van Hiele 부부가 Piaget에 대한 연구를 하던 중에, 학생에게 제시되는 과제가 종종 그들의 사고 수준을 넘어서는 용어나 성질의 지식이 요구된다는 사실을 주목하여 기하 학습에서 곤란을 겪고 있는 원인을 밝히고자 노력한 결과였다. Van Hiele 이론은 학생들의 사고를 고려한 수업을 조직함으로써 교수 효과를 높일 수 있는 일련의 위계적 수준으로 설명하고 있다. 이 이론에 따르면, 학생들의 사고 수준이 고려된 수업이 이루어진다면, 학생들은 학습 대상을 쉽게 이해할 수 있고, 자신이 의도한 바를 새로운 상황에 적절히 적용할 수 있는 능력인 통찰력이 잘 길러지게 된다는 것이다. 결국 van Hiele는 수업의 주요 목적을 통찰력의 개발에 두었다고 하겠다.

한편 Biggs와 Collis(1982)는 SOLO(the Structure of the Observed Learning Outcome) 분류법이라 불리는 반응의 범주 체계를 개발하였는데, 이 모델은 질적으로 보다 깊이 있게 학생들의 이해를 설명할 수 있는 방법을

\* 2000년 4월 투고, 2000년 9월 심사 완료.

탐구하기 위해 학생들의 사고 수준이나 발달 단계보다는 오히려 그들의 반응 양식에 초점을 두었다. 그 이유 중의 하나는 많은 학생들이 여러 가지의 주제와 제재를 다루는 다양한 학습 환경에서의 반응 구조에서 관찰된 일관된 성질을 기술하기 위해서였다. 비록 SOLO 분류법이 Piaget의 인지 발달 이론에 뿌리를 두고 있긴 하지만, 정보처리 이론—특히 작동기억의 용량—에서 더 많은 영향을 받았다고 할 수 있다. 또한 학생들이 내용과 상황에 어느 정도 친숙한가의 정도가 반응의 범주를 결정하는데 큰 영향력을 미치게 된다. SOLO 분류법은 학습자의 발달 수준 및 학습 주기 파악에 용이하고, 열린 문제에 대한 복잡한 반응 구조를 평가하는데 효과적이라 할 수 있다.

위에서 살펴본 바와 같이 van Hiele 이론은 기본적인 사고 기능과 관련이 있고, SOLO 분류법은 관찰된 행동과 관련이 있기 때문에 두 이론이 서로 다른 모델인 것처럼 보이지만, 두 이론을 자세히 살펴보면 많은 공통점이 있고 서로 보완적인 모델이라 할 수 있다. 어느 내용 영역을 지도하는 데는 여러 가지 모델이 있을 수 있고, 서로 다르게 보이는 모델들을 통합적인 생각을 바탕으로 서로의 장점은 살리고 미비한 점은 보완해 줌으로써 학생들의 이해의 성장을 돕는 학습 지도의 전략을 구상하는데 도움이 될 것이다.

따라서 본 연구에서는 SOLO 분류법과 van Hiele 이론의 두 모델이 함의하고 있는 바를 간략히 알아보고, SOLO 분류법의 범주체계와 van Hiele 이론의 사고 수준 사이에는 어떤 관련성이 있는지 논의하고자 한다.

## 2. SOLO 분류법

### 1) 일반적 모델로서의 SOLO 분류법

SOLO 분류법은 Biggs와 Collis가 처음으로 제안한 인지 발달의 일반적 모델로써, 그 후 Biggs와 Collis, Pegg 등이 수정·보완된 모델을 소개하였다. 이 모델은 Fisher와 Knight, Case와 같은 신피아제 연구자들의 이론과 많은 공통점을 가지고 있다. 이 이론은 수학, 역사, 지리, 문학 등의 여러 과목과 수와 연산, 함수 등의 다양한 주제의 질문에 대한 학생들의 반응 수준의 분석을 기초로 만들어 졌다. 그러나 Biggs와 Collis는 초기의

SOLO 분류법에 기하 또는 공간적 사고를 포함시키지는 않았다(Pegg & Davey, 1998).

SOLO 분류법에서는 개인이 어떤 환경에 반응하는 수준을 결정함에 있어서 나타나는 두 가지 현상을 지적하고 있다. 하나는 가설적 인지구조(Hypothetical Cognitive Structure)라 불리는 것으로, 과제의 반응에서 학습자에 의해 다루어진 정교화의 정도와 해결의 실마리를 포함한 추상화의 정도에 의해 특징지어지는 5가지 단계의 기능 양식으로 이루어진다. 각 단계는 지적 기능이 관련되는 한 그 단계의 발달 과제를 갖는다는 의미에서 Piaget의 인지 발달 단계 개념과 거의 동일하다(류희찬 외, 1998). Piaget의 발달 단계와 다른 점이 있다면, 구체적 조작에 의해 이루어지는 단계들의 집단 내에 피아제의 초보적인 형식적 단계를 배치하려고 했다는 것이다. 이것은 Collis의 초기 연구와 일치하는데, 그는 13세에서 15세 사이의 대부분의 아이들은 ‘형식적 사고자’가 아니라 ‘구체적 조작자’라고 주장한다. 즉, 이 연령대의 학생들은 아직 그들 자신의 구체적 경험에 익숙되어 있다는 것이다. 그러나 SOLO 양식을 전통적인 피아제의 단계와 명확한 동형사상을 이루도록 확장하는 것은 어렵다. SOLO 분류는 학생들이 서로 다른 상황에서 수행하는 방법이 반드시 인지발달단계의 유형을 함의하는 것은 아니고, 그들의 나이와 반드시 관련되어 있음을 함의하는 것도 아니기 때문이다. 특히, Biggs와 Collis는 학생의 이해력 발달이 내부의 논리적 구조와 관련된 단계라고 볼 수는 없다면서, 이해를 내용과 특정 문맥에서의 개인적인 특성으로 보았다. 즉, 보유할 수 있는 정보의 양과 과제의 구체적인 특성들이 결정적인 변수로 작용한다고 보았다. 반응을 분류하는 것은 정교화와 해결의 실마리 및 추상성의 정도, 그리고 과제를 다룰 수 있는 개인의 능력에 달려 있다. SOLO 모델에서 5가지의 사고 양식을 간략히 살펴보면 다음과 같다(류희찬 외, 1998; 장혜원, 1993; Pegg & Davey, 1998):

1. 감각운동적(Sensorimotor; 출생 직후): 물리적 환경 내에 있는 모든 대상이 이 양식의 요소가 되며, 모든 양식의 기초가 된다. 유아에게 운동 기능이 요구되는 양식이며, 지식을 반드시 기술하거나 설명하지 않고 행동하는 방법을 안다는 점에서 지식의 형식은 목시적이다.
2. 영상적(Ikonic; 2세부터): 대상과 사건을 상징할 수 있는 단어, 영상, 신호 등의 부호(signifiers)가 이 양식의

요소가 되며, 행동을 이미지의 형태로 내면화한다. 이 양식의 기능은 후에 직관적인 지식 형태를 이끌게 되고 음악과 미술의 감상에 도움이 된다. 이 양식에 대하여 Piaget는 사고가 시작되는 시기라고 했으며, Bruner도 개인이 내적 그림, 이미지, 영상을 형성하는 단계로 간주했다.

3. 구체적-기호적(Concrete-symbolic; 6-7세부터): 이 양식에서의 요소는 단순한 부호로부터 분류와 등가성의 논리를 사용하여 조작되는 개념으로 발달한다. 구체적 경험을 쓰기와 수체계 같은 기호체계를 이용하여 해석할 수 있다. 초등학교 고학년과 중등 단계의 학습에서 다루어지는 가장 일반적인 양식이다. 이 양식에서는 경험적 세계를 상징적으로 묘사하는 능력에 의해 실증되는 선언적 지식의 학습이 가능하다. 따라서 기호 가운데 논리와 순서가 있다는 사실로부터 초보적 산수의 중요성이 제기된다.

4. 형식적(Formal; 15-16세부터): 추상적인 개념과 명제를 다룰 수 있고 "원리"와 "이론"에 관한 연구를 수행할 수 있다. 개념에 관한 조작은 개념들 간의 실제적이고 귀납적인 관계를 결정하는데 관심이 있다. 즉, 어떤 요소나 조작도 구체적 대상을 필요로 하지 않는다.

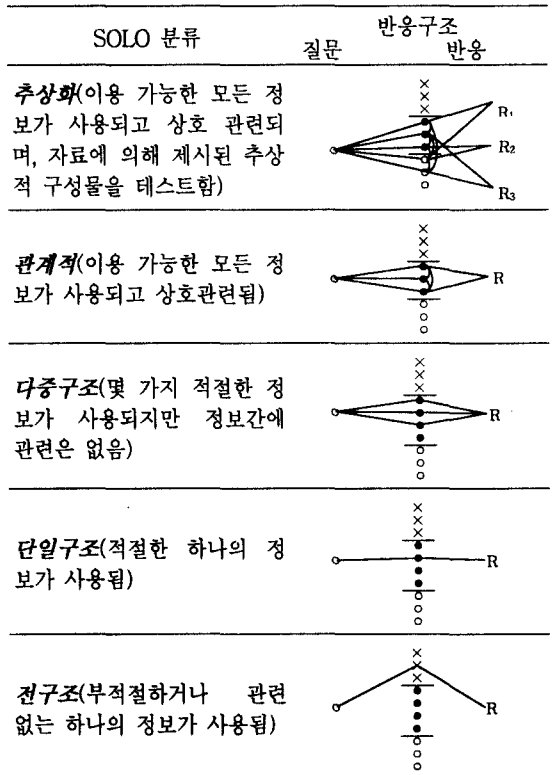
5. 후형식적(Postformal; 약 22세 전후): 이론이나 원리의 기본 구조와 다른 것에 도전하거나 의문을 제기할 수 있다.

여기서 중요한 것은, 어떤 학생이 한 문맥에서 구체적-기호적 양식으로 반응할 수 있다고 해서 다른 문맥에서도 같은 양식으로 반응할 수 있을 것이라고 단정할 수 없다는 것이다. 그럼에도 불구하고, 위의 단계는 초·중등학교의 대부분의 학생들이 구체적-기호적 양식 내에서 조작할 수 있음을 함의하며, 보통 초·중등학교의 교육 목표의 양식과 교수 기술은 일반적으로 이 단계의 학습자에 맞게 적용될 수 있다. 그러나 일부 학생들은 여전히 영상적 양식의 자극에 반응할 수 있고, 또 어떤 학생들은 일부 주제에서 형식적 추론으로 반응할 수 있다는 사실에 주목할 필요가 있다. 또한 눈여겨보아야 할 것은 각 양식은 나름대로의 정체성과 구체적이고 독특한 성질, 그리고 개인의 생애에 걸쳐 계속 발전될 잠재성을 갖고 있다는 사실이다.

SOLO 모델의 두 번째 특징은 각 양식에는 어떤 과제를 다루는 정교성의 정도를 측정 가능하게 하는 일련

의 단계로 구성된다는 것이다. 이것이 바로 SOLO 분류법인데, 학습자의 반응을 반응 요소의 구조에 따라 분류하는 방법이며, 각 기능 양식에서 발생하는 학습 주기에서 획득되는 수준으로 정의된다. 이는 기능 양식과는 달리, 반드시 지적 발달의 어떤 특정 단계를 나타낼 필요 없이 하나의 현상 그 자체로 학습자의 반응 구조를 서술하는 것이다. 반응 구조는 다음과 같이 5단계의 수준으로 구성되며, 각 기능 양식 내에서 발생하는 학습 주기가 발달함에 따라 반응 구조는 <그림 1>과 같이 점차 복잡해진다.

1. 전구조 반응(Prestructural Response): 학습자는 종종 상황의 부적절한 양식에 의해 교란되거나 질문에서



[반응시 사용된 자료의 종류]  
 ×-부적절하거나 관련 없는 것  
 ●-관련 있고, 분명히 주어진 것  
 ○-관련 있고, 주어지지 않지만 가정되어 있는 것

<그림 1> SOLO 분류법의 반응구조 (Biggs & Collis, 1982; 장혜원, 1993, pp. 57-58)

그 기능 양식의 적절한 측면을 사용하지 못한다.

2. 단일구조 반응(U; Unistructural Response): 문제에 초점을 맞추지만, 단 하나의 적절한 자료만 사용한다.

3. 다중구조 반응(M; Multistructural Response): 자료들 사이의 어떠한 관련성도 알지 못한 채 둘 또는 그 이상의 자료들을 이용하는데, 보통 순서적으로 하나씩 사용됨을 보여준다. 통합은 전혀 일어나지 않는다.

4. 관계적 반응(R; Relational Response): 모든 유용한 자료를 관련된 전체의 모자이크를 조립하듯이 통합하여 이용할 수 있다. 통합된 전체는 기존 체계 안에서 모순 없이 일관성 있는 구조를 이루게 된다.

5. 확대 추상화 반응(E; Extended Abstract Response): 새롭고 추상적인 특징으로부터 일반화할 수 있으며, 현재 양식의 자료를 추월하여 전체 과정을 하나의 새로운 기능 양식의 추론으로 확장하여 가져간다.

또한 교육의 실재는 한 양식내의 한 수준에서 다음 수준으로의 이동을 암시하는 반응의 유형에 의해 영향을 받아 이루어진다. 이것의 예로 구체적-기호적 양식과 관련지어 단일구조(U)-다중구조(M)-관계적(R)-확대 추상화(E) 수준으로의 과정을 통해 알 수 있다.

반응의 단일구조 수준과 다중구조 수준 사이의 기간은 복잡성이 증가하는 시기이고, 학생들이 단 하나의 자료보다는 많은 관련된 자료를 확인하기 시작하는 시기이다. 학생들은 한 단계씩 알고리즘을 실행할 수 있고 틀에 박힌 절차를 따를 수도 있다. 또한 다중구조 반응을 할 수 있는 학생들은 관련된 자료를 확인하고 서열화하는 조직적인 능력이 있다. 그 다음 시기인, 다중구조 수준과 관계적 수준 사이의 기간은 앞의 기간보다 더 많은 것이 요구되며, 사실의 발견뿐만 아니라 그런 사실들을 통찰할 수 있는 능력도 요구된다. 학생들은 다중구조 수준의 요소들을 일관된 체계 내에서 통합할 수 있어야 한다. 세 번째 시기인, 관계적 수준과 확대 추상화 수준 사이의 기간은 성취하기가 어렵고 가장 많은 것이 요구된다. 개인은 관계적 수준에서 확립된 일반화를 추상화하거나 보완함으로써 그 기능 양식의 기존 내용의 외부 세계, 즉 다음 기능 양식으로 이동할 수 있다.

앞의 SOLO 분류에 따른 반응구조의 예를 두 가지 양식—열린반응형식(Open Response Format)과 닫힌반응형식(Closed Response Format)—으로 이루어진 평가

문항을 통해 알아보도록 한다. 학생 반응의 구조적 조직화를 평가하기 위해 SOLO 분류법이 원래 사용한 것은 전자이고, 후자는 수학문제해결 능력 검사를 위해 Collis, Romberg와 Jurdak, Collis 등이 보완, 개발한 것이다 (Romberg, Zarinnia & Collis, 1990, p. 33 개인용). 구체적 문항의 예는 다음과 같다

(예 1) 열린 반응 형식(Biggs & Collis, 1982, pp. 83-84)

다음 □의 값을 찾아라.

$$(72 \div 36) \times 9 = (72 \times 9) \div (\square \times 9)$$

1) 전구조 반응

“전에 그런 것을 해 본 적이 없어서 난 못하겠어요.”, “그것은 하기 싫어요.”

[해설] 두 반응 모두 그 과제에 참여하기를 꺼림을 나타낸다.

2) 단일구조 반응

“36 - 한쪽에 36이 없기 때문에”, “ $2 - 72 \div 36 = 2$  이므로”

[해설] 두 반응 모두 자료의 한 부분만을 고려한다. 첫째 반응은 낮은 수준의 ‘패턴완성’ 전략을 보이고, 둘째 반응은 한 개의 계산식을 보이고 그 나머지는 무시함을 보인다.

3) 다중구조 반응

$$\begin{aligned} 2 \times 9 = 18 & \quad 648 \div (\square \times 9) \\ 648 \div ? = 2 & \quad \text{즉, } 324 \\ 18(2 \times 9) & \quad \text{를 찾았으므로} \end{aligned}$$

따라서 324”

[해설] 이 반응은 복잡함을 줄이고 □에 초점을 맞추기 위해 일련의 계산식을 수반한다. 그러나 학생들은 마음속에 일련의 계산식을 꿰뚫는 전반적인 관계를 갖지 못하고 자신의 창조물 속에서 길을 잃는 것 같다.

4) 관계적 반응

$$\begin{aligned} 2 \times 9 = 18 & \quad 648 \div (\square \times 9) \\ 648 \div 9 = 72 & \\ \text{그 때, } 72 \div 4 = 18 & \end{aligned}$$

따라서 4”

[해설] 이 반응 역시 일련의 계산식을 포함한다. 그러나 학생들은 마음속에 그 식의 관계를 알고 있고, 따라

서 성공적으로 문제를 푼다.

5) 확대 추상화 반응

첫 단계는 관련된 수와 연산 사이의 관계에 대한 개괄을 얻는 것을 포함한다:

$$\text{즉, } (72 \div 36) \times 9 = (72 \times 9) \div (\square \times 9)$$

이 패턴은 분배법칙과 유사한 무언가를 제안한다-따라서 이 가정이 테스트된다:

$$\frac{a}{b} \times y = \frac{a \times y}{b}$$

이것은 다음과 같이 즉시 문제를 해결한다:

$$“(72 \div 36) \times 9 = (72 \times 9) \div 36 = (72 \times 9) \div (4 \times 9)$$

따라서 4”

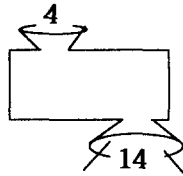
[해설] 이 반응은 다음의 특징을 보여준다:

- ① 답을 내는 지시로 연산을 생각하기보다 연산과 수 사이의 관계에 초점을 둔다.
- ② 자료에 의해 제시된 어떤 가정이 있다.
- ③ 식의 형태를 바꾸는 곳에서 답을 내는 닫힌 계산식을 회피한다.

(예 2) 닫힌 반응 형식(Collis, Romberg & Jurdak, 1986, 재인용 ;Romberg, Zarinnia & Collis, 1990, p. 33 재인용)

다음은 수를 바꾸는 기계이다. 그것은 내가 넣은 수를 세 번 더한 다음 2를 더한다. 그래서, 4를 더한다면 14가 나온다.

U. 14가 나오려면 어떤 수를 넣어야 하는가?    답: 4



[해설] 학생들은 이 문제족에서 제시되는 정확한 반응에 접근할 수 있도록 충분히 문제를 잘 이해해야 한다.

M. 5가 들어가면, 기계는 어떤 수를 내보내는가?    답: 17

[해설] 학생들은 주어진 문장을 비범으로 사용하기 위해 문제 집합을 충분히 이해할 필요가 있다. 그리고 서로 반드시 관련지를 필요 없는 일련의 계산식을 수행한다.

R. 41이 나왔다면 어떤 수가 들어갔는가?    답: 13

[해설] 이 경우 성공적인 풀이 전략을 수행하기 위해 문제의 문장에 대한 통합적인 이해가 요구된다. 정확한 답은 거꾸로 생각하기 또는 일련의 근사적 어림의 시도와도 관련된다. 추상적 원리가 일깨워질 필요가 없다는 의미에서, 풀이는 자료에 국한된 추론만을 요구함이 주목

된다.

E. 수 Y가 들어올 때 기계로부터 나오는 수가 X라면, X의 값에 따라 Y 값을 주는 식을 써라.

$$\text{답: } Y = \frac{X-2}{3}$$

[해설] 정확한 반응은 문제로부터 관계를 도출하여 그것을 추상적 식으로 쓰는 것을 포함한다. 그것은 주어진 정보를 보다 낮은 수준과는 꽤 다른 방식으로 사용하는 것을 포함한다.

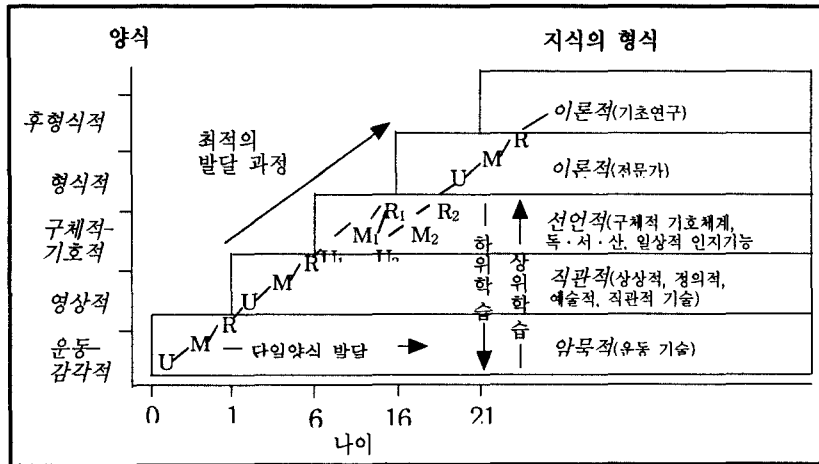
2) SOLO 모델의 특징

SOLO 모델의 반응 수준과 기능 양식 사이의 관계를 나타내면 <그림 2>와 같다. Biggs와 Collis가 사용한 모델의 가장 중요한 특징은 학습의 주기적 성질과 인지 발달의 위계적 성질의 결합이다. 한 주기 내에서 기능의 각 수준은 자신의 통합적이고 독특한 방식으로 자료를 선택하고 사용한다. 또한 각각은 다음의 보다 높은 수준을 위한 구성 요소를 제공한다. 따라서 <그림 2>에서 보듯이 새로축에 나타난 기능 양식은 일단 발달하면 일생동안 학습을 위한 잠재적 매체로 남아있다. 한편, 학습 주기는 각 양식 내에서 단일구조(U)—다중구조(M)—관계적(R) 반응으로 진행하며, 한 주기 내의 관계적(R) 반응에서 확대 추상화(E) 반응으로의 확장은 그 다음 양식에서 단일구조가 된다. 즉, R→E의 이동은 새로운 기능 양식의 새로운 발달 단계로의 전이를 나타낸다. 그 후, 개인의 지속적인 발달이 있게되면, 유사한 방식으로 구조적 재조직화를 통해 보다 높은 양식으로 나아간다(장해원, 1993).

따라서 <그림 2>에서 보듯이, 지적 기능 발달 과정에는 화살표로 나타난 서로 다른 경로—최적의 발달 과정, 다중양식 기능, 단일양식 기능—의 3가지 특징이 있음을 알 수 있다. 이들에 대해 간략히 설명하면 다음과 같다.

(1) 최적의 발달 과정

이 경로는 학교와 가정교육을 통해 출생 직후부터 최적의 인지 발달을 나타내는 것이며, 이전 양식들이 포함된 발달의 일차원적인 특성을 갖는다. 학습 위계에 관한 대부분의 연구는 이 분야에 초점을 맞추고 있다. 피아제와, van Hiele를 포함한 신피아제주의자들의 연구는 이와 같은 한 방향으로의 발달과정을 나타내고 있다. 또한



<그림 2> SOLO 모델: 양식, 학습 주기, 지식의 형식

대부분의 교육은 이러한 발달 과정을 반영하여 이루어진다. Collis와 Biggs(1983)도 교육사회와 관련된 다양한 제도의 역할을 설명하기 위해 최적의 발달 경로를 이용해 왔다. 예를 들어, 초등학교의 역할은 구체적-기호적 양식 내의 단일구조와 다중구조에 초점을 맞추는 것이고, 중등 교육(17-18세까지)은 관계적 수준(구체적-기호적 양식)과 단일구조 수준(형식적 양식)에서의 과제 수행을 돕는 역할을 하는 것이며, 대학 교육은 형식적 양식 내의 단일구조, 다중구조, 관계적 수준 그리고 연구단계에 접어든 후형식적 양식에 주안점을 두고 있다.

(2) 다중양식 기능

이 특징은 피아제를 비롯하여 발달이 한 방향으로만 이루어진다고 주장하는 연구자들과는 대조적이다. 다중양식 관점에서는, 어떤 한 기능 양식이 이전의 기능 양식을 포함하거나 대리 역할을 하는 것은 아니며, 이전 양식의 발달은 다음 양식의 발달을 계속 지원하고, 다음 양식의 발달은 이전 양식과 결부된 행동이나 생각들과 종종 연결되어 이루어진다.

다중양식 기능은 교육적 실천면에서 중요한 함의를 갖는다. 다음의 두 가지 예는 이러한 특징을 잘 설명해 준다. 첫 번째 예는 현재의 목표 양식이 상위 양식의 도움을 받는 경우이다. 수행(반응의 감각운동 수준)을 향상시키기 원하는 선수는 필요한 기술을 연습하고 활동(감각운동 양식)에 참여하면서, 다음 활동을 통해 도움을 얻게 될 것이다: ① 심적 표상을 구성하는 것을 도와줄

모범적 수행 활동을 지켜본다(영상적 양식); ② 필요한 성질을 보다 잘 이해하도록 기술과 관련된 측면을 향상시키기 위한 방법을 읽는다(구체적-기호적 양식); ③ 수행 문제를 분석하거나 수행 또는 경쟁에 관한 일반적 원리를 개발한다(형식적 양식). 목표로 하는 양식은 계속해서 감각운동 양식이 되는데, 그 이유는 태도에 초점을 두는 실제적 수행을 해야 하기 때문이다.

두 번째 예는 첫 번째 예와 반대되는 것으로서, 목표로 하는 양식은 이전에 획득된 양식에서의 학습에 의해 유지된다. 수학에서 여러 가지 예를 찾을 수 있는데, 예컨대 네 가지 연산을 포함하는 규칙을 개발하기 위해 단즈 블록을 이용하는 것은 구체적-기호적 이해를 지원하기 위해 영상적 양식의 자료를 이용하는 친숙한 사례 중의 하나이다. 보다 일반적인 경우로 Bruner의 3가지 표상 양식—활동적, 영상적, 기호적—은 다중양식 기능으로 쉽게 이해할 수 있다.

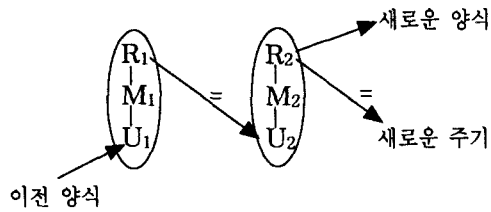
그러나 첫 번째 예에서처럼, 다중양식 기능으로서의 특징은 교육 또는 교수 과정으로 변환될 때 문제가 없는 것이 아님에 유의해야 한다. 교육의 초점은 목표 양식이어야 하는바, 다른 양식의 지원에 대한 지나친 믿음은 오히려 학생들에게 부담을 가중시킬 수 있기 때문이다.

(3) 단일양식 기능

SOLO 분류법에 대한 연구는 대부분 단일양식 기능에 관심을 가졌고, 주로 구체적-기호적 양식에 관한 것이었다. 그러나 Campbell, Waston과 Collis, Levins와

Pegg 등은 연구의 폭을 넓혀 한 양식 내에서 주제의 광범위한 질문에 대한 학생들의 반응을 통해 구체적-기초적 양식 내에 적어도 두 개의 단일구조(U)—다중구조(M)—관계적(R) 주기가 있음을 확인하였다(Pegg & Davey, 1998).

<그림 3>은 두 개의 성장 주기가 관계되어 있음을 나타낸 양식내의 발달 패턴이다. 가장 주목할 만한 특성은 첫 번째 주기의 관계적 반응( $R_1$ )이 두 번째 주기에서는 단일구조 반응( $U_2$ )이 되는 것이다. SOLO 모델을 이와 같이 전개하면 폭넓은 활동을 통해 형성되는 개념의 발달 순서를 이해할 수 있을 것이다.



<그림 3> 양식내의 발달 패턴: 구체적-기초적 양식 내의 두 주기

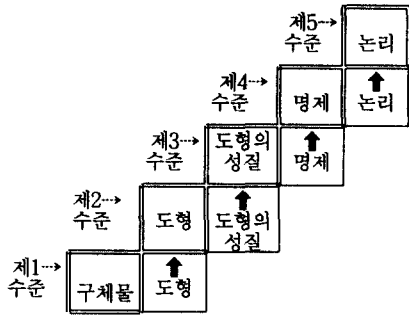
여기서 중요한 것은 만약 한 양식 내에 이중주기로 분류한 것을 단일주기 형식으로 나타내려 한다면 효과적으로 나타낼 수 있을 것인가 하는 것이다. 이 물음에 대한 답은 이중주기를 밝힌 연구 상황에서만이 찾을 수 있는데, 첫 번째 주기( $U_1$ - $M_1$ - $R_1$ )는  $U_2$ 를 위한 기본 요소로 간주하는 것으로, 이것은  $U_2$  반응 내에서의 일부 가변성을 설명하는 방법을 제공한다고 볼 수 있다. 따라서 단일주기 모델을 만들기 위해서는 단일구조 수준은 이중주기 모델의  $U_2$ 에  $U_1$ ,  $M_1$ ,  $R_1$  발달의 결과를 통합하여 나타내면 될 것이다.

지금까지 논의한 SOLO 분류법은 평가 도구로서 그리고 학생의 학습 발달을 탐구하고 설명하기 위한 모델로서 많은 잠재력을 가지고 있다. 특히 다음 절에서 논의하는 van Hiele 모델이 1차원적이며 수직적인 개인의 수준 발달에만 주로 관심을 기울이고 있지만, SOLO 분류법을 통해 각 단계 내에서의 인지 성장이 어떤 식으로 전개해 나갈 것인지를 이해할 수 있을 것이다.

### 3. Van Hiele의 기하 학습 수준 이론

Van Hiele 이론은 크게 두 가지의 기본적인 측면이 있다. 첫째는 사고 수준으로서 학생들이 기하 개념을 이해해 나가는 사고의 성장과정을 5단계(1)~제1수준(시각적 수준, visualization), 제2수준(분석적 수준, analysis/description), 제3수준(추상적 수준, abstraction/relation/informal), 제4수준(연역적 수준, formal deduction), 제5수준(엄밀화 수준, rigor/metamathematical)로 나누어 기술하는 일련의 위계적 범주이다. Van Hiele 이론에서 학습 경험의 핵심은 하위 수준 요소들의 분석을 통해 상위 수준의 성질을 발견하는 것이다. 수준간의 발달을 탐구하기 위해, van Hiele는 각 수준들 사이의 단계에서 일어나는 사고과정을 기술하기 위해 '대상'과 '방법(또는 수단)'이라는 용어를 사용하였다. 어느 한 수준에서 경험을 정리하는 '방법'이 새로운 학습의 '대상'으로 의식되어, 그것을 조직화하려는 활동이 점진적으로 이루어지면 서부터, 그 다음 상위수준으로의 도약을 하게 되는 과정을 반복하게 되는 것이다. 각 수준에서의 학습 대상과 방법을 정리하여 나타내면 <그림 4>와 같다.

1) 수준의 번호에 대해 처음에 van Hiele(1959)는 기본 수준을 수준 0으로 하고, 그 다음에는 수준 1, 수준 2, 수준 3, 수준 4의 번호를 부여하였다. Van Hiele는 그 당시 시각적 수준(수준 0) 이전의 수준의 존재성에 대해서는 생각하지 못한 것 같다. 그 이유에 대해서는 그들 연구의 역사적 배경에서 찾을 수 있다. Van Hiele 부부는 네덜란드의 중등학교 학생들을 연구 대상으로 하였고, 중등학교(12세)에 오기 전까지 학생들의 기하에 대해서는 언급하지 않았다. 만약 van Hiele의 생각이 초등학교 학생들에게까지 확장되었다면, 수준 0 이전 수준의 필요성에 대해 생각했을지도 모르겠다. 수준 0 이전 수준의 존재성은 Mayberry(1981), Usiskin(1982) 등에 의해 12세 학생들 중에서 수준 0에도 미치지 못하는 경우를 생각함으로써 수준 0~4의 구분은 불합리함을 지적하여 수준을 1, 2, 3, 4, 5로 분류하고자 하였다. 현재 수준 0~4에서 수준 1~5로의 번호의 변화는 많은 연구자들에 의해 일반적으로 받아들여지고 있는 방법이므로 본 연구에서도 이를 따르기로 한다.



<그림 4> 단계별 학습 대상과 방법(□안은 학습대상, □안은 학습방법, ↑은 학습 단계를 뛰어넘는 것으로 방법의 대상화를 나타낸다.)

둘째는 다섯 가지의 교수 단계로서 첫 번째 수준에서 마지막 수준으로의 이동을 돕는 안내활동의 단계들이다. Van Hiele는 각 수준에서의 완전한 이해와 사고를 발달시키고 수준의 이행을 위한 지도 방법으로 수업의 다섯 가지 국면을 제시하고 있다. 첫째 국면은 '정보 단계'로서 교사와 학생들은 학습목표를 확인하고, 둘째 국면은 '안내된 탐구 단계'로서 교사가 제시하는 짧은 발문으로 이루어진 활동자료를 보며 학생들은 자기 나름대로 과제를 탐구하게 된다. 셋째 국면은 '명료화 단계'로서 전 단계에서 경험하고 관찰한 사항에 대해 학생들끼리 토론하고, 넷째 국면인 '자유로운 탐구 단계'에서는 안내된 탐구 단계보다 복잡한 과제를 제시하여 학생이 배운 지식을 종합적으로 적용해 보게 하며, 마지막 국면인 '통합 단계'에서 교사는 학생들 스스로 경험한 지금까지의 단계를 종합하고 음미하게 한다. 이 다섯 단계가 끝나면 학생들은 다음 수준으로 넘어갈 준비가 된 셈이다.

Van Hiele 이론의 특징은 각 수준은 위계적이고 계열적이며, 한 수준에서 다음 수준으로의 진보는 연령이나 생물학적 성숙 및 자연스런 발달의 결과라기 보다는 낮은 수준에서 높은 수준으로의 진보에 영향을 주는 교수-학습 프로그램 경험의 질과 성격에 달려 있다. 다시 말하면, van Hiele는 수준들의 발달이 연령과 어느 정도의 관련이 있지만, 즉 비슷한 나이의 많은 학생들이 유사한 학습 경험을 함으로써 각 수준을 통과할 수 있지만, 수준들을 통해 성장할 수 있는 일정표는 없다고 하면서 생물학적 성숙과 관련된 발달 개념에 대해서는 의

문시하였다. 따라서 학생들의 발달은 그들이 직면하고 있는 문화 환경, 자신의 탐구 능력, 그리고 안내된 학습 과정에 영향을 받아 다양하게 이루어질 수 있다는 가변성을 고려해야 할 것이다.

또한 van Hiele 이론의 기본 목적은 수업을 통해 학생들의 통찰이 발달하도록 하는 것이다. 이 모델은 학습에 대한 1차원적인 접근을 하고 있으며, 개인의 수준 발달 이외에 어떤 식으로 진전될 것인가는 크게 고려하지 않은 것 같다. 따라서 각 단계에서 인지성장이 어떤 식으로 전개해 나갈 것인지에 대한 이해가 필요하며, 앞에서 논의한 SOLO 분류법은 이것에 대한 잠재성을 갖고 있다고 생각된다.

#### 4. SOLO 분류법과 van Hiele 이론의 통합적인 생각

Van Hiele 모델은 기하 사고 과정에 대한 전반적인 관점을 제공하는 이론적 틀로써 보다 적절하고, SOLO 모델은 개인 행동의 변화를 보다 잘 기술할 수 있다는 점에서, 외면적으로는 두 모델이 출발점과 관점이 서로 다르게 보이지만, 실제로는 공통적인 특성을 많이 공유하고 있으며 상호 협력적이다. 이 장에서는 Pegg와 Davey(1998)의 연구를 중심으로 기하에서의 학생들의 이해에 대해 두 가지 모델이 어떻게 관련되는지 알아보겠다.

##### 1) SOLO의 영상적 양식: van Hiele의 수준 1

Bruner도 언급했듯이, SOLO의 영상적 표상은 대상이 없어도 그 대상을 영상으로 친숙하게 묘사할 수 있는 인지 수준이다. 영상적 양식에서 단일주기 모델로서의 SOLO 분류법은 확연히 구분되는 세 개의 위계적 수준—단일구조(U), 다중구조(M), 관계적(R) 수준—이 존재한다. 이들을 간략히 설명하면 다음과 같다.

① 단일구조(U) 수준: 이 수준에서의 영상 처리는 하나의 독립된 측면에 초점을 둔다.

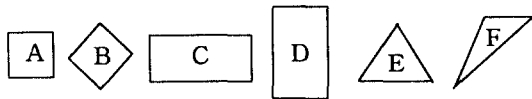
② 다중구조(M) 수준: 이 수준에서는 둘 또는 그 이상의 측면을 고려하지만 서로 연관되지는 않는다.

Van Hiele은 다른 연구자들이 수준 0의 존재를 확인



했음에도 수준 1(예컨대, 도형을 외형에 의해 인식할 수 있는 수준) 이전의 발달을 받아들이지 않고 있다. 그러나 Pegg와 Davey(1998)는 수준 0이 존재하며, 그 수준은 SOLO 분류법에서 영상적 양식의 단일구조와 다중구조 수준 내에서 확인할 수 있다고 믿고 있다.

③ 관계적(R) 수준: 이 수준에서만 영상 처리를 완벽히 제어하고, 정확하고 일관되게 모양을 분류할 수 있다. 관계적 수준에서는 대상의 정확한 상이 마음에 형성되어 인식되고, 간단한 대상들을 구조화하며 그릴 수 있다. 그러나 심적 표상은 보통 방향성 및 비율과 관련지어 이상화된다. 따라서 <그림 5>에서 A는 정사각형으로 인식되나, B는 그렇지 못하다. 마찬가지로, C는 직사각형으로 인식되고, D는 그렇지 못하며, E와는 달리 F를 삼각형으로 받아들이지 않는다.



<그림 5> 평면 도형의 인식: 영상적 양식의 관계적 수준

기능면에서 영상적 양식의 일반적 특성은 구두로 의사소통하는 능력과 지각적으로 질적 판단을 할 수 있는 능력이다. “그것은 정사각형이다”와 같이 이름을 기억하고 이용할 수 있으며, 대상의 크기를 인식할 수 있다. 그러나 두 도형이 왜 같은지 또는 다른지를 설명할 수는 없다. 비록 영상적 양식에서의 판단이 직관을 이용한 추론에 의한 것이긴 하지만, 그 추론의 근거는 다음 상황에서는 바뀔 수도 있고, 모순된 추론이 나타날 수도 있다. 이 양식에서, 학생들은 친숙한 대상(시각적 모양)에 “추상적” 모양을 관련지을 수 있는바, “그것은 상자 같다”(정사각형), “그것은 지붕 같다”(삼각형), “그것은 칠판 같다”(직사각형), “그것은 다이아몬드 같다”(마름모) 등과 같이 표현함으로써 의사소통하게 된다. 어떤 학생들은 별로 친숙하지 않은 도형을 이전에 접해본 도형과 비교하여 말한다. 예컨대, 직사각형은 “늘어난 정사각형”, 마름모는 “찌그러진 정사각형”, 그리고 평행사변형은 “비스듬한 직사각형” 또는 “단지 조금 더 긴 직사각형”이라고 표현한다. 이와 같이 비형식적이고 부정확 용어의 사용이 이 수준의 특징이며, 이 외에도 “더 굵은,

더 가는, 기울어진” 등과 같은 말을 사용하고 있다.

또한 두 개의 다른 도형을 비교하거나 대조할 때의 전형적인 영상적 반응은 “그것들은 서로 다른 모양이다”, “하나는 정사각형이고, 다른 것은 정사각형이 아니다”, 또는 방향이나 크기를 언급하여 “이것은 더 굵다[더 크다, 평평하다, 굽었다]” 등의 표현을 하게 된다. 비록 영상적 양식에서의 언어가 그 후의 양식에 비해 정확성과 세밀함이 부족하긴 하지만, 관계적 수준에서의 작도와 그리기는 합리적으로 잘 형성되어 특히 정사각형과 직사각형을 매우 정확히 그려낼 수 있다. 흥미로운 것은 길이가 같은 변과 90°의 각을 암시적으로 그림에 나타낼 수 있는 능력이 있지만, 자발적인 언어나 쓰기로 생각을 표현하는 능력은 없다. 특히, 평행사변형과 마름모의 그리기는 부정확한데, 직사각형과 정사각형을 보다 잘 그리는 것은 이 두 모양이 비교적 유사할 뿐만 아니라, 현실적으로 수직과 직각에 대한 자연스러운 경험이 더 많기 때문이다(Olson & Bialystok, 1983; Pegg & Davey, 1998, p. 125 재인용).

만약 이 수준의 학생들이 어떤 도형에 친숙하다면, 그들은 기하판 위의 고무밴드를 시행착오를 거듭하면서 모양이 바르게 될 때까지 움직여 주어진 도형을 작도할 수 있다. 심지어는 더 어린아이들 즉, 6-7세의 아이들도 펜토미노와 SOMA 큐브 퍼즐을 조각이 맞을 때까지 단순히 재배열함으로써 해결할 수 있는 능력이 있다. 실제로 청소년과 성인도 흔히 이와 같은 방법을 이용하고 있는바, 이것은 영상적 기교를 어린 아동기에 많이 다루도록 해야 함을 시사하는 것이다. 그러나 이러한 기술은 도형의 성질들을 명백히 분석하여 이루어진 것이 아니기 때문에, SOLO 분류법에서 영상적 양식의 학생들의 특성(특히 관계적 수준)은 van Heile의 수준 1에서 보이는 특성과 부합된다고 볼 수 있다.

2) SOLO의 구체적-기호적 양식: van Heile의 수준 2와 수준 3

SOLO 분류법에 따르면, 영상적 양식의 관계적 수준에 속한 학생들은 적절한 경험을 가지고 다음의 사고양식인 구체적-기호적 양식으로 이동하게 된다. 이 새로운 양식 내에서, 학생들은 개념과 조작을 쓰기 기호와 연결

할 수 있다.

Pegg & Davey(1998)는 기하 문제에 대한 학생들의 반응으로부터 구체적-기호적 양식에는 이중 주기가 있음을 확인하였다. 첫 번째 주기는 영상적 양식과 형식화된 기하 사이에 중요한 변화가 있고 학습자가 간단한 성질을 확인할 수 있음을 시사하며, 두 번째 주기는 여러 가지 성질을 습득하는 것과 그들 사이의 관련성을 이용할 수 있음을 시사한다.

(1) 구체적-기호적 양식의 첫 번째 주기의  $U_1$ - $M_1$ - $R_1$  : van Hiele의 수준 1의 상위 수준 또는 수준 2의 하위 수준

학생 반응의 질적 차이에 따라 다음과 같이 3개의 수준으로 범주화 할 수 있다: ①  $U_1$ 은 두드러진 하나의 시각적 측면에 초점을 두는 것이고, ②  $M_1$ 은 하나의 측면에 초점을 맞추되 성공적이지는 못하지만 그에 적합한 의미를 부여하는 것이며, ③  $R_1$ 은 하나의 측면에 초점을 맞추되 성공적으로 그에 적합한 의미를 부여하는 것이다. 마지막 범주는 특별한 성질이 내포된 구체적 개념을 이끌어 내는 수준이다.

정사각형 또는 직사각형의 정의를 기술하라는 질문에 대해  $U_1$  수준의 학생은 종종 “네 변”, “직선인 네 변” 또는 “네 변을 가진 평면” 등과 같은 표현을 사용한다.

$M_1$  수준의 학생은 비록 정확한 수학적 용어를 구사하지는 못할지라도, 이들 도형에 적합한 의미를 부여하려고 한다. 직사각형을 “갈지 않은 네 변, 고르지 않은 네 변, 또는 네 개의 다른 변”을 가진다고 말하기도 하며, “정사각형과 다른”, “밑변과 윗변은 짧지만 옆변은 긴” 등의 표현을 사용하기도 한다. 이 수준의 학생들은 대부분 직사각형은 두 개의 짧은 변과 두 개의 긴 변을 가진다고 말한다.

$R_1$  수준의 학생들은 변의 상대적 길이를 정확하게 기술할 수 있다. 예컨대, 정사각형이나 마름모는 “네 개의 같은 변”을 가지며, 직사각형이나 평행사변형은 “두 쌍의 같은 변”, “두 변이 같고, 나머지 두 변이 같은” 길이를 갖는다고 말할 수 있다.

한편, 많은 학생들이 위에 기술된 반응 이외의 영상적 서술 반응을 보이는데, 그들은 시각적 자료를 이용하고, 긴, 찌그러진, 경사진 등과 같은 비형식적이고 일상적인 형용사를 사용하며, 도형의 방향과 관련하여 언급

하기도 한다. 예컨대, 어떤 학생들은 마름모를 단순히 “기울어진 정사각형”이라고 인식하기도 하는데, 이것은 앞의 영상적 양식에서 직사각형을 “늘어진 정사각형”이라고 보는 관점과 일치하는 것이다.

Van Hiele 이론과는 대조적으로 비록 학생들이 기능 양식의 새로운 수준으로 이동하더라도 영상적 자료는 계속 이용되며, 이것은 인간이 여러 상황에 대처하는 방법은 다중양식적이라는 Collis의 주장과 일치하는 것이다. 또한 학생들이 더욱 추상적인 방법으로 조작할 수 있더라도, 대개는 그들의 수준 양식에 맞는 과제를 해결하기 위해 그 이전의 양식을 이용하려는 경향이 있다.

결국 첫 번째 주기를 통해 다음과 같은 몇 가지 특징을 알 수 있다. 첫째, 기하학적 사고 형식은 도형을 단순히 전체로 인식하는 것에서 그림이나 스케치로 나타낼 수 있고, 그 이유를 말할 수 있는 능력으로 변화한다. 그러나 그 변화는 모든 도형에 대해 다 일어나는 것은 아니다. 예컨대, 학생들은 마름모는 영상적 용어로 보다 잘 이해하는 반면, 정사각형과 직사각형은 성질을 써서 이해할 수 있다. 둘째, 이 주기의 학생들 반응의 대부분은 하나의 개념 즉, 변에 초점을 둔다. 기하학적 모양을 생각하면서 각, 평행, 대각선, 대칭의 개념을 인식은 하고 있으나 거의 사용하지 않는다. 셋째, 이 주기에서 학생들이 사용한 언어는 대개 단 하나의 관계나 개념만을 포함하는 간단한 문장으로 구성되어 있다. 넷째, 구체적-기호적 양식의 학생들은 도형을 표상적인 유형으로 해석하고, 도형 자체를 논의의 대상으로 다룬다.

(2) 구체적-기호적 양식의 두 번째 주기의  $U_2$  : van Hiele의 수준 1의 상위수준 또는 수준 2의 하위 수준

일단  $R_1$  반응—앞의 예에서 변의 상대적 길이를 서술한 반응, 즉 하나의 성질에 초점을 맞춘 반응—이 획득되면, 이 반응은 학생들에게 새로운 분석 요소가 된다. 이 변화는 두 번째 주기에서의 단일구조 반응인  $U_2$ 로 코드화 될 수 있고, 면담에 의하지 않고는 보통 추적하기가 어렵다.

$U_2$  성질의 존재는 다음 수준( $M_2$ )의 반응에서 많은 학생들이 어려움을 갖는다는 사실에서 알 수 있다. 조사에서 학생들은 종종 여러 특징에 대한 언급을 하는 과도기적 반응을 보이지만, 그 특징의 설명이 수학적으로 완전하지가 않다. 전형적인 과도기적 반응은, 마름모는 “네

개의 변이 모두 같고 ... 두 개의 둔각과 두 개의 예각을 갖는다" 또는 평행사변형은 "네 개의 변을 갖는데, 그 중 두 변이 서로 같고 나머지 두 변도 서로 같다. 만약 마주보는 두 변을 계속 연장하면 그들은 결코 만나지 않는다"와 같은 것이다. 분명 이러한 반응은 두 번째 수준 ( $M_2$ )의 성질로는 만족스럽지 못하다.

Van Hiele은 이러한 수준의 존재나 기하 사고 수준의 선형 주기를 알지 못했는지, 아니면 이러한 현상을 수준 1과 2 사이의 단순한 이동 과정이거나 수준 2의 부분집합 정도로 믿었는지 분명하지 않다. Burger와 Shaughnessy(1986), Fuys, Geddes와 Tischer(1988) 등은 이러한 반응들에 '과도기적'이라는 용어를 사용했는데, 이 과도기적 반응의 존재와 성질은 모든 학생들이 거처가는 일반적인 발달 경로에 대한 중요한 수준임을 암시하는 것이라 할 수 있다. 나아가, 이 수준( $U_2$ )은 초등학교와 중학교의 많은 학생들에게 상당한 기간 동안 지속되고 있다.

(3) 구체적-기호적 양식의 두 번째 주기의  $M_2$  : van Hiele의 수준 2

초등학교와 중학교의 중간지점에 위치한 일부 학생들은  $U_2$  수준보다  $M_2$  수준에 속해 있음이 확인되었다. 이 수준의 학생들의 반응은 주어진 도형에 대해 적어도 두 가지 성질을 이용하는 특성이 있다. 학생들은 도형의 모든 특성을 언급할 정도의 비약적 발전이 있는 것은 아니지만, 예가 되지 않는 특별한 경우를 의도적으로 배제할 수 있으며, 도형의 특징에 적합한 여러 성질을 말해야 할 필요성을 점차 인식하게 된다.

전형적으로, 이 수준의 학생들은 각과 평행의 개념과 관련된 용어를 사용하게 된다. 이 때, 언급되는 성질의 일반적인 순서가 정해진 것은 아니고, 보통 수업의 경험에 영향을 받게 된다. 예컨대, 많은 학생들이 마름모는 먼저 각과 관련지어 언급하려고 하는 반면, 평행사변형은 두 번째 성질로 보통 평행선과 관련해 언급하는 경향이 있다.

이 수준의 학생들(10-13세)이 사용하는 언어는 흔히 van Hiele의 수준 2에서의 특성과 마찬가지로 정확도와 세밀함이 부족하다. 예를 들어, 평행사변형에 대한 문제에서, 어떤 학생들은  $U_2$  수준의 반응처럼 "마주보는 변의 길이가 같다(또는 평행하다)"라고 말한다. 또한 각에

대한 표현도 서툴러, "각이 직사각형과는 다르다", "직각이 아니다", "모든 각이 같은 것은 아니다", "두 각은 같고 두 각은 다르다"와 같은 반응을 보인다.

또한, 첫 번째 주기의 반응처럼 학생들은 평면도형의 설명을 보충하기 위해 다음과 같은 영상적 표현을 종종 이용한다: 평행사변형은 "직사각형이 기울어져 ... 마름모와 유사하다", 마름모는 "정사각형의 각 변을 회전한 것과 같다."

이 수준의 반응과 관련하여 세 가지 특징을 더 들면 다음과 같다. 첫째, 학생들의 언어가 비록 나아지고는 있지만, 많은 학생들이 여전히 "평평한", "모서리"와 같은 부정확한 말을 사용한다. 둘째, 대부분의 반응은 예컨대, "마름모의 각은 정사각형과는 다르다"와 같이 포함관계의 가능성을 특히 배제하고 있다. 셋째, 다중구조 수준의 상급생 중 일부는 새로운 정보를 보충하기 위해 다소 길고, 반복적인 서술을 한다.

(4) 구체적-기호적 양식의 두 번째 주기의  $R_2$  : van Hiele의 수준 3

$R_2$  수준으로의 발달은 기하학적 성질들과 모양이 분리되거나 이산적이지 않으며, 서로 독립적으로 존재하는 것이 아님을 이해함으로써 가능하다. SOLO 분류법에서의 '이전 수준에서 획득된 독립적인 성질들의 통합'과 van Hiele가 기술한 '성질들의 습득 순서' 간에는 분명히 일맥상통하고 있다.

학생들이 성질들을 관련지어 생각하는 것은 쉬운 일이 아니다. 예를 들어, 학생들이 모든 정사각형은 마름모라는 생각을 가지려면 시각적 표상의 의존을 벗어나야 하고, 정사각형은 기본 도형이고 정사각형, 직사각형, 평행사변형은 서로 다른 종류의 도형이라고 생각하는 일상적인 믿음에서 벗어나는 비교적 높은 수준의 논리적 추론에 의존해야만 한다.

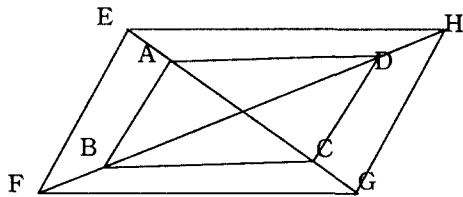
### 3) SOLO의 형식적 양식

Biggs와 Collis(1982)는 비록 형식적 양식도 단일구조—다중구조—관계적 주기가 가정되기는 했지만, 구체적-기호적 양식만큼은 분명히 밝히지 못했다. 물론 van Hiele도 앞의 세 수준에 비해 수준 4에 대해서는 별로 명확하게 기술하지 않았다. Pegg와 Faithfull, White와

Pegg 등의 연구에 의하면 형식적 양식 내에도 두 개의 성장 주기가 있음이 밝혀졌다(Pegg & Davey, 1998). 여기서는 중등학교 수준에 가장 적합한 첫 번째 주기에 대해서 논의한다.

(1) 형식적 양식의 첫 번째 주기의  $U_1$ - $M_1$ - $R_1$  : van Hiele의 수준4의 하위수준

Pegg와 Davey(1998)는 SOLO의 형식적 양식 또는 van Hiele 이론의 수준 4의 사고에 속하는 가장 적절한 반응을 조사하기 위해, 70명 이상의 고등학생을 대상으로 <그림 6>과 같은 연역적 기하 문제를 일대일 면담 상황에서 풀도록 하였다. 이 문제에서, 학생들은 다양한 전략을 이용할 수 있었지만, 가장 일반적으로 이용된 두 가지 전략은 합동인 삼각형을 증명하는 것과 도형에 관련된 필요충분조건을 적용하는 것이었다.



$\square ABCD$ 는 평행사변형이고,  
 $\overline{AE} = \overline{CG}$ ,  $\overline{BF} = \overline{DH}$ 이다.  
 $\overline{EH} = \overline{FG}$ 임을 증명하여라.

<그림 6> 연역적 전략이 요구되는 기하 문제의 예(Pegg & Davey, 1998, p. 130)

형식적 양식의 첫 번째 주기에서 나타나는 발달 패턴의 특성은 다음과 같다.

① 단일구조 1(  $U_1$ ): 학생들은 합동의 개념을 이용할 수 있는 능력이 다소 있지만, 자발적으로 합동조건을 이해하지는 못하고, 따라서 문제의 의도를 잘 파악하지 못하는 것 같다.

② 다중구조 1(  $M_1$ ): 학생들은 문제를 해결하는데 필요한 과정에서 미숙함을 보인다. 종종 해결 과정의 단계가 생략되거나, 일련의 연속적인 단계를 밟더라도 전체 결론에 이를 때까지 각 단계의 결론이 명확하지 못하다. 합동의 개념은 어느 정도 이해하는 것으로 보이지만, 문제와 그 해결과정에 관련된 요소들을 모두 기억하는 데는 한계가 있다.

③ 관계적 1(  $R_1$ ): 이 범주의 학생들은 합동조건을 이용하기 위해 알맞은 삼각형을 선택했으나 다른 대안적인 전략을 나타내지 못한다. 그들은 합동에 대해 자신감을 가지고, 아이디어를 효율적이고 정확하게 적용한다. 문제의 상황에 적절한 반응들이 많긴 하지만 기본적인 연역의 일반 원리로 해결하지는 못한다.

(2) 형식적 양식의 두 번째 주기의  $U_2$  : van Hiele의 수준 4

학생들은 질문의 요지를 분명히 알기 때문에 “평행사변형의 두 대각선은 각각 서로를 이등분한다”와 같이 반응은 간결하고, 명확하며, 직설적인 바, 다양한 성질을 충분히 알고 있다. 또한 문제에 주어진 범위 이상의 조건을 이용하여 일반적인 원리로 해결하는 능력이 보인다.

형식적 주기에서의 이들 주기는 기하의 초기 형식적 반응의 주요 특성을 명확히 드러내는 것이다. 특히, 연역의 과정은 비록  $U_1$  수준에는 제한적이긴 하지만 어느 정도 명확하다. 또한 명확히 드러나지 않은 상황에서 합동조건을 적용하는 능력은 형식적 사고의 중요한 지표이다.  $U_2$  수준의 반응은 합동 조건을 간단히 적용하는 것을 넘어 어느 정도의 추상화를 보여준다.

### 5. SOLO 분류법과 van Hiele 이론이 수학교육에 주는 시사점

앞에서 SOLO 분류법과 van Hiele 이론 사이의 관련성에 대해 살펴보았는데, 수준간의 대응관계는 <표 1>과 같이 정리할 수 있겠다.

Pegg와 Davey(1998)는 SOLO 분류법의 후형식적 양식에 대해서는 언급하지 않았으나, 1989년도의 Pegg와 Davey의 연구에서는 후형식적 양식을 van Hiele 이론의 수준 5에 대응시키고 있다.

그리고 지금까지의 논의를 바탕으로 SOLO 분류법과 van Hiele 이론이 수학교육에 주는 시사점을 간략히 언급하고자 한다. Van Hiele 이론에서의 수준 판별 평가를 통해 확인된 어떤 수준에 속해있는 학생들도 학생 고유의 문화, 개별 학습 경험 등에 따라 다양한 반응수준을 보일 수 있다.

예를 들어, “다음 평행사변형의 정의를 쓰시오:  $\square$ ,  $\square$ ,  $\square$ ”라는 문항에서 van Hiele의 수준 2에 속한 학생

<표 1> SOLO 분류법과 van Hiele 이론 사이의 수준간 대응관계

SOLO 분류법		van Hiele 이론
양식	수준(양식의 이중주기)	
	주기 1	
	주기 2	
영상적 양식	단일구조(U)/ 다중구조(M)	수준 0: 전시각적 수준
영상적 양식	관계적(R)	수준 1: 시각적 수준
구체적- 기호적 양식	단일구조(U <sub>1</sub> )/ 다중구조(M <sub>1</sub> )/ 관계적(R <sub>1</sub> )	수준 1의 상위수준 또는 수준 2의 하위수준
구체적- 기호적 양식	단일구조 (U <sub>2</sub> )	수준 2의 하위수준
구체적- 기호적 양식	다중구조 (M <sub>2</sub> )	수준 2: 분석적 수준
구체적- 기호적 양식	관계적 (R <sub>2</sub> )	수준 3: 추상화 수준
형식적 양식	단일구조(U <sub>1</sub> )/ 다중구조(M <sub>1</sub> )/ 관계적(R <sub>1</sub> )	수준 4의 하위수준
형식적 양식	단일구조 (U <sub>2</sub> )	수준 4: 연역적 수준
후형식적 양식	단일구조(U)/ 다중구조(M) /관계적(R)	수준 5: 엄밀화 수준

들의 답에 따라 SOLO 모델의 구체적-기호적 양식의 반응수준은 다음과 같이 분류될 수 있다.

<첫 번째 주기>

· U<sub>1</sub>: “네 변을 가진 도형”-두드러진 하나의 시각적 측면에 초점을 둬.

· M<sub>1</sub>: “밑변과 옆변은 같지만 옆변은 긴”-하나의 측면에 초점을 맞추되 성공적이지 못한 의미 부여.

· R<sub>1</sub>: “두 변이 같고, 나머지 두 변이 같은”-하나의 측면에 초점을 맞추되 성공적인 의미 부여.

<두 번째 주기>

· U<sub>2</sub>: “네 변 중 두 변이 같고 나머지 두 변도 서로 같다. 만약 마주보는 두 변을 계속 연장하면 그들은 결코 만나지 않는다”-R<sub>1</sub>과 M<sub>2</sub>의 과도기적 반응.

· M<sub>2</sub>: “마주보는 두 변의 길이가 같고, 평행한 것이 두 쌍 있다”-도형의 두 가지 성질 이용.

이와 같이 학생들의 반응수준에 따라 그들의 현재의 지적 수준이나 약점을 파악함으로써 적절한 개별 보충학습을 통해 이들의 수준 내에서의 발달과 수준간 발달을 도울 수 있을 것이다. 그리고 van Hiele Level Test 결과로부터 수준을 부여할 때, Non-fitter<sup>2)</sup>에 속한 학생들—예컨대, 수준 2의 점수는 얻지 못하고 수준 1과 수준 3을 통과한 점수를 획득한 학생—은 면담을 통해 SOLO 분류에 따른 반응수준을 파악함으로써 그들이 현재 어떤 van Hiele 수준에 있을 것이며, 어떻게 하위 수준을 통과하지 않고 상위 수준을 통과한 점수를 획득하게 되었는지 설명을 할 수 있을 것이다.

또한 이것은 사회·문화적 관점을 갖는 Vygotsky의 이론과도 관련지을 수 있다. Vygotsky 이론의 주요 아이디어 중의 하나는 근접발달영역의 개념이다. 근접발달영역은 학습과 인지발달이 역동적으로 일어나는 영역이며, 근접발달영역에 있는 과제들을 지속적으로 제공해주고 교사나 능력 있는 동료의 도움을 받는다면 학생 혼자 할 때보다 많은 문제, 어려운 문제를 해결할 수 있을 것이다. 예컨대, van Hiele의 수준 1과 수준 2 사이의 근접발달영역에 속해 있는 학생들의 SOLO 분류에 따른 반응수준을 분석함으로써 그들이 미숙한 부분을 교사의 비계설정에 의한 적절한 안내로 그들의 자연스러운 수준 향상을 도울 수 있을 것이다.

6. 결론

기하적인 사고는 수학뿐 아니라 다른 교과목에서 그리고 우리의 일상생활에서 매우 중요한 역할을 하고 있다. 그러나 학교에서 기하 수업을 받고 있는 많은 학생들이 기하 영역에서 어려움을 갖고 있는 것으로 보고되고 있다. 지금까지 기하적 사고와 관련하여 개선하려는 노력이 있어왔는데 대표적인 것으로 van Hiele 이론을 들 수 있다. Van Hiele 이론은 기하의 인지 발달 과정을 보여주는 폭넓은 틀을 제공하며, 각 수준은 전체적 또는 평균적인 특징을 나타내고 있다고 볼 수 있다. 그러나 각 수준의 학생들을 더욱 국소적인 관점을 갖고 분석해

2) Fitter와 Non-fitter의 개념은 한태식·최현호(1990). 기하 영역의 van Hiele 수준과 증명 능력에 관한 연구. 수학교육논총 제8집, 대한수학회, pp. 219-261을 참고할 것.

보면, 수준 내에서도 개인차에 따라 반응 수준이 다를 수 있다는 것을 알 수 있다(Pegg & Davey, 1998). 이런 점에서 학생들의 반응구조에 초점을 둔 SOLO 분류법은 학생들의 인지 발달 과정을 이해하는데 중요한 모델로 작용할 수 있다. SOLO 분류법과 van Hiele 모델은 목적에 있어서 표면상으로는 형식과 성격이 다르게 보이지만, 공통적인 특성을 많이 공유하고 있으며, 상호 보완적이라는 것을 알 수 있다. 비록 van Hiele이 사고에 보다 초점을 두긴 했지만, 그 판단은 학생들의 응답을 기초로 한 것이기 때문에 van Hiele 이론은 SOLO 모델의 반응 양식 구조 내에서 설명될 수 있다.

SOLO 모델의 가장 큰 장점은 앞서 획득한 양식을 연속적으로 발전시켜 나가는데 있다. 즉, 앞의 양식들을 계속해서 전개하여 보충하고 지원하면서 다른 양식을 개발해 나가는 것이다. 특히 본 연구에서 관심을 갖는 것은 SOLO 모델을 통해 한 가지 양식 이상에 걸쳐서 포함된 통합적인 인지 발달 과정을 설명하는 것이다. 이것은 인지 발달 단계가 위계적인 불연속적 과정으로 이루어진다는 관점의 학습 이론—예컨대, van Hiele 모델—에 대해 발달의 새로운 국면 즉, 기하교육에서 개성을 탐구하고 설명할 수 있는 수단을 제공해줄 수 있다는 점에서 시사하는 바가 클 것이다.

이러한 관점에서 본 연구에서는 Pegg와 Davey(1998)의 연구를 바탕으로 SOLO 분류법에서의 학생들의 반응 구조와 van Hiele 이론의 사고 수준이 어떻게 관련되는지를 알아보았다. 이를 간략히 살펴보면, SOLO 분류법과 van Hiele 이론 사이에는 각각 영상적 양식의 관계적 수준(R)은 van Hiele의 수준 1, 구체적-기호적 양식의 두 번째 주기의 다중구조 수준(M<sub>2</sub>)에는 van Hiele의 수준 2, 구체적-기호적 양식의 두 번째 주기의 관계적 수준(R<sub>2</sub>)에는 van Hiele의 수준 3, 형식적 양식의 두 번째 주기의 단일구조 수준(U<sub>2</sub>)에는 van Hiele의 수준 4, 후형식적 양식에는 van Hiele의 수준 5를 대응시켜 생각할 수 있다. 비록 이들 대응이 완전하게 이루어졌다고 확신하기는 어렵지만, 대응관계를 살펴볼 때 학생들의 학습 경로가 단일차원으로만 전개되는 것이 아님을 알 수 있다. 따라서 SOLO 분류법을 이용하여 학생들의 반응구조를 살펴봄으로써 학습자의 인지 발달의 수준 및 학습 주기를 파악하여 학습자들이 기하 개념을 보다 깊이 있게

이해하도록 지도하는 기초를 마련할 수 있을 것이다.

앞으로 van Hiele 이론의 각 수준에서 SOLO 분류법이 이용하고 있는 닫힌 반응 형식의 문항을 개발하여 면담을 통한 질적 분석의 연구가 이루어져 학생 개인의 인지 발달 과정을 고려한 지도가 이루어져야 할 것이다.

## 참 고 문 헌

- 류성림 (1993). 중학생의 기하 증명 능력과 오류에 대한 연구, 한국교원대학교 석사학위 논문.
- 류성림 (1998). 피아제의 균형화 모델에 의한 증명의 지도 방법 탐색, 한국교원대학교 박사학위 논문.
- 류희찬 외 (1998). 초등학교 고학년용 수학 수행능력 평가문항 개발 연구, 한국교원대학교 부설 교과교육공동연구소.
- 우정호 (1994). 증명지도의 재음미, 대한수학교육학회 논문집 4(1), pp.3-24.
- 우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초, 서울: 서울대학교출판부.
- 장혜원 (1993). SOLO 분류법에 기초한 평가 접근에 대한 고찰. 첨삭수학교육 3, 한국교원대학교 수학교육연구소, pp.55-65.
- 한태식·최현호 (1990). 기하 영역의 van Hiele 수준과 증명 능력에 관한 연구, 수학교육논총 8, 대한수학회, pp.219-261.
- Biggs, J. & Collis, K. (1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy*. New York: Academic Press.
- Burger, W. F. & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry, *Journal for Research in Mathematics Education 17*, pp.31-48.
- Collis, K. & Biggs, J. (1983). Matriculation, degree structures, and levels of student thinking. *Australian Journal of Education 27(2)*, pp.151-163.
- Collis, K. F. & Davey, H. A. (1986). A technique for evaluating skills in high school science, *Journal of Research in Science Teaching 23(7)*, pp.651-663.
- Fuys, D.; Geddes, D. & Tischer, R. (1988). The van

- Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education Monograph 3*.
- Mayberry, J. (1981). *An investigation of the van Hieles of geometric thought in undergraduate preservice teachers*. Unpublished doctoral dissertation, University of Georgia. (University Microfilms No. DA 8123078)
- Pegg, J. & Davey, G. (1998). Interpreting student understanding in geometry: A synthesis of two models. In R. Lehrer & D. Chazan(Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* pp.109-135. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Romberg, T. A.; Zarinnia, E. A. & Collis, K. F. (1990). A new world view of assessment in mathematics. In G. Kulm(Ed.), *Assessing higher order thinking in mathematics*, pp.21-38, Washington, DC: American Association for the Advancement of Science.
- Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry(Final report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry. Project)*. Chicago: University of Chicago, Department of Education.

## A Study on the Relation Between SOLO Taxonomy and van Hiele Theory

Ryu, Sung-Rim

Department of Mathematics Education, Taegu National University of Education,  
1797-6 Taemyung-2 Dong, Namku, Taegu 705-715, Korea. E-mail: sryu@taegu-e.ac.kr

The purpose of this study is to understand what two models of SOLO taxonomy and van Hiele theory suggest and find out what relation there is between the category system of the SOLO taxonomy and the thinking level of the van Hiele theory.

The van Hiele theory describes in line of ranking level so that it may increase the teaching effects by putting together a class, which takes into consideration the students thoughts. The SOLO taxonomy focused on the response mode of the students rather than the thinking level or the developmental stage of them to pursuit the method that can describe the students understanding in depth quality-wise. Although the SOLO taxonomy and the van Hiele model seem to have different form and character from outside in terms of their goals, a closer examination reveals that the two stances have much in common and that the models are complementary. Although the van Hiele placed more focus on the thoughts, because the conclusion was based on the students responses, the van Hiele theory can be interpreted within the structure identified in the SOLO model.

In this study, we have tried to understand how the response structure from the SOLO taxonomy and the thinking level of the van Hiele theory are related, based on the studies of Pegg and Davey(1998). If you briefly look at them, there are following corresponding relation between the SOLO taxonomy and the van Hiele theory.

- a) The relational level(R) in iconic mode is van Hiele level 1.
- b) The multistructural level(M<sub>2</sub>) in the second cycle of concrete-symbolic mode is van Hiele level 2.
- c) The relational level(R<sub>2</sub>) in the second cycle of concrete-symbolic mode is van Hiele level 3.
- d) The unistructural level(U<sub>2</sub>) in the second cycle of formal mode is van Hiele level 4.
- e) The postformal mode is van Hiele level 5.

Though it would be difficult to conclude that these correspondences were perfectly done, if you look at their relation, you can see that the learning process of the students were not carried out uniformly. Therefore, by studying the students response structure, using the SOLO taxonomy, and identifying the learning cycle and development level of the student, it would be possible to come up with the basics that teach the students to understand the geometrical concept more in depth.