위상최적화의 응용

이 상 진*

1. 서 언

개론[1]에서 기술한 바와 같이 위상최적화는 구조물에 사용되는 재료를 효율적으로 분포시키는 기법이며 궁극적으로 주어진 하중에 대한 구조물의 새로운 위상을 찾는 과정이다.

본고에서는 앞서 기술한 위상최적화의 개념을 공학분야에서 중요한 구조물의 형태로 인식되고 있는 판 구조물에 적용하고자 한다. 먼저 위상최적화를 위해 도입된 판의 이론을 간략히 설명하였으며 판의 최적화에 사용된 재료모델과 물질을 재분배하기 위한 크기조절 알고리즘에 대하여 기술하였다. 판의 해석을 위해서는 횡전단변형을 고려한 Reissner-Mindlin (RM) 가정[2]을 도입하였으며 구조물에는 가(假)등질화된 물질을 사용하였다. 그리고 가등질화된 물질내에 존재하는 빈공간의 크기를 조절하기 위하여 최적기준을 유도하였다.

2. Reissner-Mindlin판 이론

판의 설계영역(Ω)은 중층을 기준으로한 설계영역(Ω_o)과 두께방향의 설계영역 (h)으로 이루어져 있으며 다음과 같이 정의된다.

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\in R^3 | (x,y)\in\Omega_o, z\in\left[-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right]\right\} \quad (1)$$

여기서 Ω_o은 중층면($x\otimes y$)을 나타내고 h는 판의 두께를 나타낸다.

위와 같이 정의된 판의 구조적 거동을 해석하기 위해서 횡전단변형을 고려한 RM가정이 널리 쓰이고 있으며 가정의 특성상 단지 C^o 연속성만을 요구한다.

RM가정을 정리하면 다음과 같다.

- 중층에 수직인 법선은 변형후에도 직선을 유지한다. 그러나 변형후 중층이 반드시 수직일 필요는 없다.
- 중층에 수직한 법선방향의 응력은 영이라고 가정한다.
- 변위값은 판의 두께에 비해서 작다

첫 번째 가정은 판이 C^o연속성을 가지게 하는데 이를 도시하면 그림 1과 같다.

* 본 학회 편집위원 · 한국원자력연구소, 선임연구원

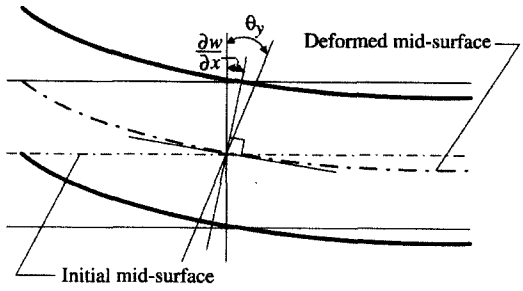

그림 1 Reissner-Mindlin 가정

그림 1에 도시된 가정을 바탕으로 판의 변위장은 다음과 같이 정의 될 수 있다.

$$\begin{aligned} u_x(x,y,z) &= \bar{u}_x(x,y) + z\theta_y(x,y) \\ u_y(x,y,z) &= \bar{u}_y(x,y) + z\theta_x(x,y) \\ u_z(x,y,z) &= \bar{u}_z(x,y) \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 u_x, u_y, u_z는 x, y, z방향에 대한 변위이고 $\bar{u}_x$, $\bar{u}_y$, $\bar{u}_z$는 중층에서 발생하는 병진변위의 값이다. θ_x는 yz면내의 회전을 나타내고 θ_y는 xz면내의 회전을 나타낸다.

식 (1)에서 정의된 변위장의 그래디언트(Gradient) 값을 사용하면 면내변형도와 횡전단변형도를 다음식으로 구할 수 있다.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{2}$$

위식은 세 개의 면내성분과 두 개의 횡전단 성분으로 나타나는데 면내 변형도는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + z\frac{\partial \theta_y}{\partial x} = \bar{\varepsilon}_x + z\kappa_x \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} + z\frac{\partial \theta_x}{\partial y} = \bar{\varepsilon}_y + z\kappa_y \\ \varepsilon_{xy} &= \left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x}\right) + z\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right) \\ &= \bar{\varepsilon}_{xy} + z\kappa_{xy} \end{aligned} \tag{3}$$

여기서 κ는 모멘트에 대한 변형(곡률)을 나타낸다.

그리고 횡전단변형도는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial z} + z\frac{\partial u_z}{\partial y} = \theta_x + z\frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} + z\frac{\partial u_z}{\partial x} = \theta_y + z\frac{\partial u_z}{\partial x} \end{aligned} \tag{4}$$

판이 등방성물질로 이루어져 있을 경우 판의 면내강성과 횡전단강성은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_p \\ \boldsymbol{\sigma}_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_p & 0 \\ 0 & \boldsymbol{D}_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_p \\ \boldsymbol{\varepsilon}_s \end{Bmatrix} \tag{5}$$

여기서 $\boldsymbol{\sigma}_p = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}\}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_p = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}\}$이고 면내강성행렬과 횡전단강성행렬은 $\boldsymbol{D}_p$와 $\boldsymbol{D}_s$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}_p &= \begin{bmatrix} \bar{\lambda}+2\mu & \bar{\lambda} & 0 \\ \bar{\lambda} & \bar{\lambda}+2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{D}_s &= \begin{bmatrix} k_s\mu & 0 \\ 0 & k_s\mu \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6}$$

여기서 $\bar{\lambda}$는 일반 평면응력상태인 물질의 축소된 Lame의 상수이고 μ는 전단강성계수이며 ν는 프와송비 그리고 k_s는 전단수정계수이다. 또한 식 (5)의 응력벡터 $\boldsymbol{\sigma}_p$는 다음과 같이 두항으로 분리 될 수 있다.

$$\boldsymbol{\sigma}_p = \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}^{\kappa} = \boldsymbol{D}_p\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + z\,\boldsymbol{D}_p\boldsymbol{\kappa} \tag{7}$$

위에서 정의한 응력을 두께방향으로 적분하면 다음과 같은 힘의 항을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M} &= \{M_x, M_y, M_{xy}\}^T \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_x^{\kappa}, \sigma_y^{\kappa}, \sigma_{xy}^{\kappa},\}^T dz \\ \boldsymbol{N} &= \{N_x, N_y, N_{xy}\}^T \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_{xy},\}^T dz \\ \boldsymbol{Q} &= \{Q_{xz}, Q_{yz}\}^T \\ &= k_s \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_{xy}, \sigma_{yz}\}^T dz \end{aligned} \tag{8}$$

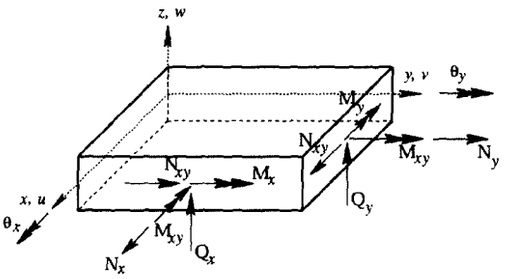

그림 2 판의 기호규약

여기서 k_s는 전단수정계수이다. 식 (8)에서 정의된 항들은 그림 2와 같이 도시 할 수 있다.

식 (8)을 행렬식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{A}\bar{\epsilon},\quad \boldsymbol{M}=\hat{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{Q}=\boldsymbol{G}\ \boldsymbol{\epsilon}_s \tag{9}$$

여기서 강성행렬의 성분 $\boldsymbol{A}$, $\hat{\boldsymbol{D}}$, $\boldsymbol{G}$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\int_{-h/2}^{h/2}\boldsymbol{D}_b dz\\ \hat{\boldsymbol{D}}&=z^2\int_{-h/2}^{h/2}\boldsymbol{D}_b dz\\ \boldsymbol{G}&=k_s\int_{-h/2}^{h/2}\boldsymbol{D}_s\, dz\end{aligned} \tag{10}$$

그리고 등방성 물질의 경우 성분 $\boldsymbol{A}$, $\hat{\boldsymbol{D}}$, $\boldsymbol{G}$는 행렬식으로 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\frac{Eh}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & (1-\nu)/2\end{bmatrix}\\ \hat{\boldsymbol{D}}&=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & (1-\nu)/2\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{G}&=\frac{k_sEh}{2(1+\nu)}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{11}$$

참고로 본 고에서는 전단수정계수로 k_s값을 5/6을 사용하였다.

3. 층상화된 가등질화된 물질

판의 위상최적화는 여러 가지 형태로 이루어질 수 있으나 본 고에서는 판의 두께 방향으로 층을 도입하여 물질을 재분배하고자 한다. 이러한 위상최적화의 기법은 판 구조물에 보강될 보강재의 위치를 찾아내는 데 쓰일 수 있다.

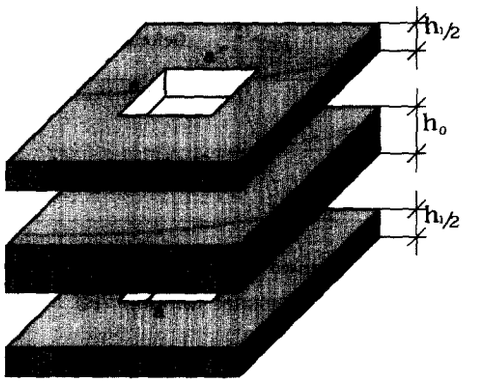

그림 3 삼층재료모델

본고에서는 그림 3에서와 같은 층 재료모델을 사용하였다. 판의 상층면과 하층면에는 다공성물질을 적용시키고 판의 중층은 등방성 물질을 적용시켰다. 이때 중층의 재료는 식 (5) 또는 (8)에 정의되어 있고 상하층면의 다공성물질은 개론에서 기술된 물질을 적용시킬 수 있으며 다음과 같은 기호로 정의하였다.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_b^h&=\begin{bmatrix}d_{11}^h & d_{12}^h & d_{13}^h\\ d_{21}^h & d_{22}^h & d_{23}^h\\ d_{31}^h & d_{32}^h & d_{33}^h\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{D}_s^h&=\begin{bmatrix}d_{44}^h & d_{45}^h\\ d_{54}^h & d_{55}^h\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{12}$$

여기서 d_{ij}^h는 다공성물질의 강성을 나타내는 성분이다. 횡전단에 대한 등질화된 강성은 삼차원의 등질화기법을 사용해야 하므로 실제적으로는 가등질화된 물질을 널리 사용한다. 판의 상하층면에 가등질화된 물질을 사용할 경우 $\boldsymbol{D}_b$, $\boldsymbol{D}_s$는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{D}_b^h=\rho^\gamma\,\boldsymbol{D}_b,\quad \boldsymbol{D}_s^h=\rho^\gamma\,\boldsymbol{D}_s \tag{13}$$

여기서 ρ는 재료 밀도 함수이고 γ는 위상을 조절하기 위한 지수이다.

이렇게 층별로 다른 종류의 재료를 가지는 층

재료는 두께방향의 적분을 통하여 등가구성방정식을 구할 수 있다. 등가구성방정식은 식(8)의 힘의 항으로 표현되며 그림 3의 모델을 두께 방향으로 적분을 취하면 다음과 같이 구해질 수 있다.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^h &= \int_{-(h_o+h_1)/2}^{-h_0/2} \boldsymbol{D}_p^b dz \\
&\quad + \int_{-h_o/2}^{h_0/2} \boldsymbol{D}_p\, dz + \int_{h_0/2}^{(h_o+h_1)/2} \boldsymbol{D}_p^t dz \\
\boldsymbol{D}^h &= z^2 \int_{-(h_o+h_1)/2}^{-h_0/2} \boldsymbol{D}_p^b dz \\
&\quad + z^2 \int_{-h_o/2}^{h_0/2} \boldsymbol{D}_p dz + z^2 \int_{h_0/2}^{(h_o+h_1)/2} \boldsymbol{D}_p^t dz \\
\boldsymbol{G}^h &= \int_{-(h_o+h_1)/2}^{-h_0/2} \boldsymbol{D}_s^b dz \\
&\quad + \int_{-h_o/2}^{h_0/2} \boldsymbol{D}_s\, dz + \int_{h_0/2}^{(h_o+h_1)/2} \boldsymbol{D}_s^t dz \qquad (14)
\end{aligned}$$

여기서 D^t, D^b는 상층면과 하층면의 물성을 나타내는 행렬이며 가등질화된 물질을 사용할 경우 식(13)에 정의된 D^h를 사용한다. 식(14)는 중층을 기준으로 두께방향의 재료분포가 대칭일 경우에만 유효하다.

4. 최적기준

위상최적화의 목적은 주어진 재료를 재분배하여 구조물의 변형에너지를 최소화함으로써 변형이 적은 구조물을 도출하는 것이다. 이때 목적함수로 사용되어지는 판의 변형에너지는 횡전단변형을 고려하는 RM 가정을 기초로 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}\int_{\Omega_o}[N_x\epsilon_x + N_y\epsilon_y + N_{xy}\epsilon_{xy}]d\Omega \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{\Omega_o}[M_x\kappa_x + M_y\kappa_y + M_{xy}\kappa_{xy}]d\Omega \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{\Omega_o}[Q_{xz}\epsilon_{xz} + Q_{yz}\epsilon_{yz}]d\Omega \qquad (15)
\end{aligned}$$

위의 식은 유한요소로 이산화된 영역에서는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}\sum_{e=1}^{nel}\Big[\int_{\Omega_o^{(e)}} \big(\bar{\varepsilon}^{(e)T}\boldsymbol{A}\,\bar{\varepsilon}^{(e)} + \kappa^{(e)T}\hat{\boldsymbol{D}}\kappa^{(e)} \\
&\quad + \varepsilon_s^{(e)}\boldsymbol{G}\varepsilon_s^{(e)}\big)\Big] \qquad (16)
\end{aligned}$$

여기서 nel은 설계영역을 이산화할 때 사용한 유한요소의 수이다.

위상최적화는 변형에너지를 최소화하고 주어진 재료의 부피를 유지하는 것이므로 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&\text{Minimize} \quad U \\
&\text{subject to} \quad V_s = \sum_{e=1}^{nel} 2h_1(2r_e - r_e^2)\,\bar{V}_e \qquad (17)
\end{aligned}$$

여기서 h_1는 상하층면의 두께를 나타내고 r_e는 요소 e의 재료밀도변수로 $r_e = 1 - a_e$이다. 그리고 $\bar{V}_s$는 중층의 면적을 나타낸다. 위의 최적화정의는 라그랑지안 승수를 이용하여 목적함수에 구속조건을 첨가함으로써 라그랑지함수 L을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned}
L(r_e) &= \sum_{e=1}^{nel} U_e - \Lambda\Big(\sum_{e=1}^{nel}(2r_e - r_e^2) - \bar{V}_s\Big) \\
&\quad - \sum_{e=1}^{nel}\lambda_{r_e}^{+}(r_e - 1) + \sum_{e=1}^{nel}\lambda_{r_e}^{-} r_e \qquad (18)
\end{aligned}$$

재료밀도변수 r_e에 대한 라그랑지함수 L의 정상조건과 Kuhn-Tucher를 조건을 사용하면 개론에서 기술한 것과 같은 크기조절 알고리즘을 구할 수 있다.

$$B_{r_e} = \frac{1}{2\Lambda(1 - r_e)}\frac{\partial U_e}{\partial r_e} = 1 \qquad (19)$$

여기서 $\partial U_e/\partial r_e$는 다음과 같이 계산한다.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_e}{\partial r_e} &= \int_{A^{(e)}}\Big(\varepsilon^T\frac{\partial A}{\partial r_e}\varepsilon + \kappa^T\frac{\partial \hat{D}}{\partial r_e}\kappa \\
&\quad + \varepsilon_s^T\frac{\partial G}{\partial r_e}\varepsilon_s\Big)dA \qquad (20)
\end{aligned}$$

식 (19)는 재료밀도변수와 변형에너지의 관계를 나타내고 이를 이용하여 개론에 기술한 것과 동일한 크기조절 알고리즘을 구할 수 있다.

$$r_e^{k+1} = MAX \quad \text{if } r_e^k (B_{r_e}^k)^\eta \le MAX$$
$$= r_e^k (B_{r_e}^k)^\eta \quad \text{if } MAX \le r_e^k (B_{r_e}^k)^\eta \le MIN$$
$$= MIN \quad \text{if } MIN \le r_e^k (B_{r_e}^k)^\eta] \qquad (21)$$

여기서 $MAX = \max\{(1-\zeta) r_e, 0\}$이고 $MIN = \min\{(1+\zeta) r_e, 1\}$이며 η는 조절변수, ζ는 이동변수이고 $B_{r_e}^k$는 k번째 반복계산에서 B_{r_e}값이다.

참고로 식 (20)은 두꺼운 판의 경우에 대한 정의이며 얇은 판의 경우 전단에 대한 항을 제외하여 사용하면 된다.

5. 위상최적화 알고리즘

최적기준을 이용하여 판의 위상최적화 알고리즘을 형성하면 다음과 같다[3],.

① 주어진 볼륨의 크기를 이용하여 초기 설계변수를 계산한다. 설계변수는 재료밀도변수로 주어진다.
② 초기(또는 갱신된) 재료밀도 함수로 표현된 등질화된 물질을 사용하여 구조물의 변위값을 구한다.
③ 계산된 변위값을 사용하여 목적함수 값 U_e를 구하고 식 (20)를 사용하여 설계변수에 대한 목적함수의 민감도를 계산한다.
④ 식 (19)를 라그랑지승수 Λ를 구한다.
⑤ 설계변수값을 갱신한다.
⑥ 갱신된 설계변수의 값이 주어진 조건을 만족하면 최적화를 멈추고 그렇지 않으면 ②-⑤를 반복한다.

위상최적화 알고리즘은 주로 구조물의 변형에너지가 반복연산이 계속되어도 변하지 않을 때 연산을 멈춘다.

6. 판의 위상최적화예

6.1 경계조건에 따른 사각판의 위상

본 예제에서는 경계조건에 따른 사각판의 최적위상에 대하여 조사하였다. 판의 네변의 경계조건을 자유단과 고정단의 조합으로 적용하여 경계조건에 따른 판의 최적위상을 조사하였다. 판의경계조건은 모두 네가지를 사용하였고 그림 4에 도시하였다.

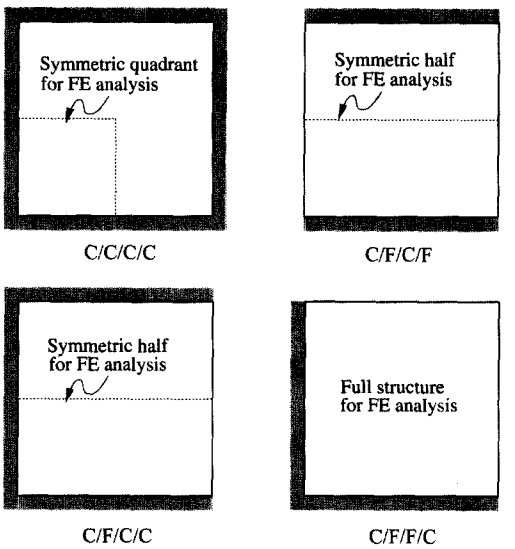

그림 4 사각판의 경계조건

판의 변의 길이는 $4.0m$이고 전체 두께는 $h = 0.15m$이다. 중층의 두께는 전체 두께의 반을 상하층면의 두께는 각각 $h_1 = h/4$을 사용하였다. 구속조건으로 사용된 구조물의 부피 V_s는 상하층면 부피의 50%로 하였다. 크기조절 알고리즘에 사용된 조절변수와 이동변수는 0.8과 0.04로 하였다. 유한요소해석시 C/C/C/C는 양방향대칭이므로 판의 1/4만을 사용하였고 C/F/C/F와 C/F/C/C는 판의 한반향으로만 대치이므로 판의 반을 그리고 C/F/F/C는 대각방향으로 대칭인 구조물이나 전체를 사용하였다.

사각형판의 경우 물질의 재분배를 통하여 경계조건에 따라 초기구조물의 변형에너지 보다 각각 67% 63.8% 62% 66.7%의 변형에너지를 감소시켰다. 최적화 결과로부터 도출된 위상의 검은 부분은 철근 콘크리트 구조물일 경우 보강재의 위치를 추론 하는 데 도움이 될 수 있다.

4.2 두 방향 슬래브

두 방향 슬래브를 위상최적화 하였다. 슬래브의

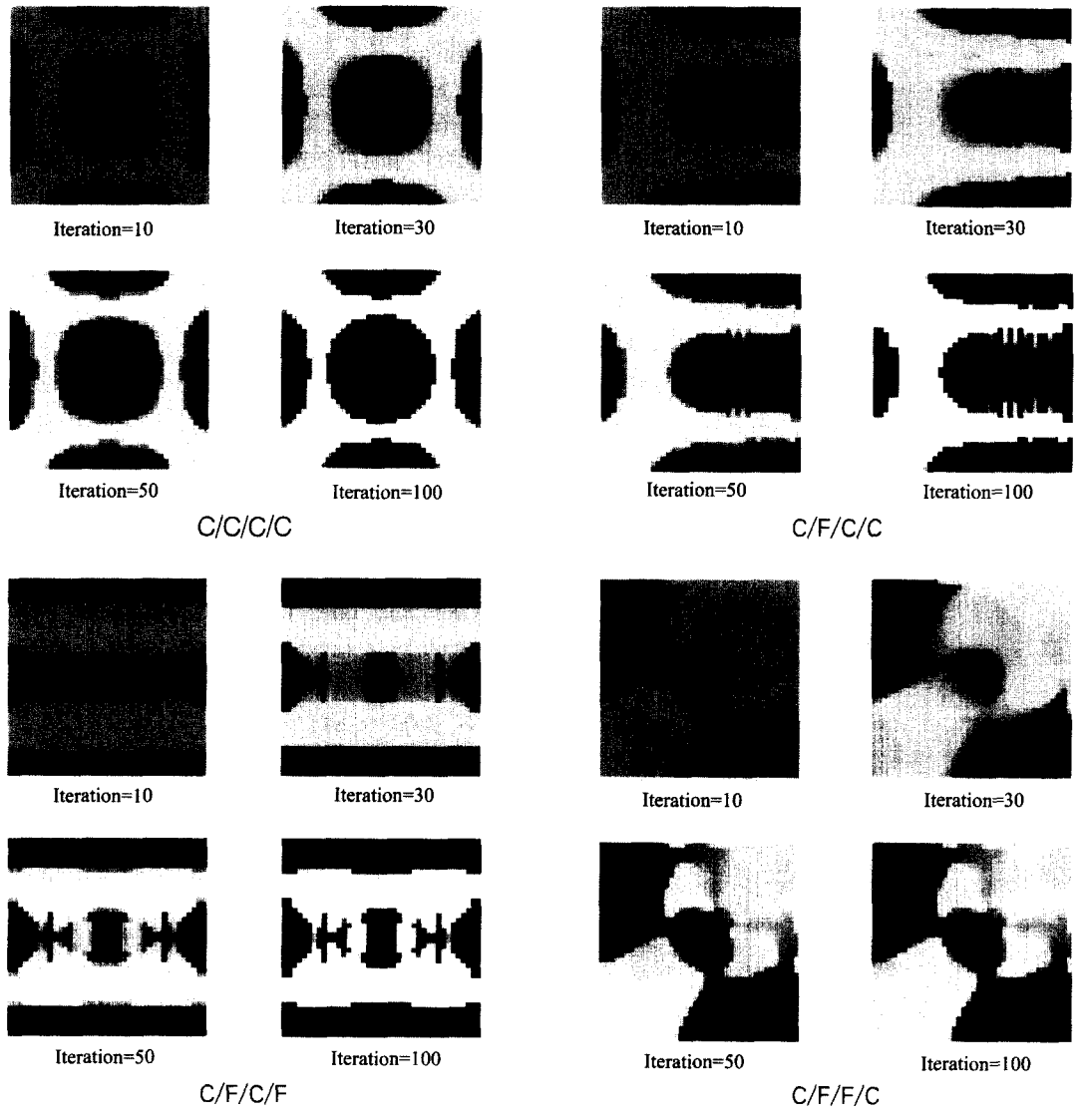

그림 5 경계조건에 따른 판의 최적 위상

크기는 2.0×2.0으로 정방형이며 각 지점에 크기가 0.2×0.2의 기둥으로 지지 되어 있다. 슬래브 전체에는 크기가 40000인 등분포하중이 작용하고 있다. 슬래브에 사용된 재료의 탄성계수와 프와송비는 각각 2.0×10^{11}과 0.3이다. 판의 전체두께는 $h=0.16$이며 상하층면은 각각 $h_1=0.04$이다. 위상최적화를 위한 부피 구속조건은 상하층면 부피의 50%로 하였다.

최적화의 결과로부터 기둥주위와 기둥과 기둥 사이 그리고 슬래브의 중앙부분에 보강이 필요한 것으로 나타났다.

5. 결 언

본고에서는 개론에서 언급한 위상최적화의 개념을 바탕으로 판의 위상최적화에 대한 절차를

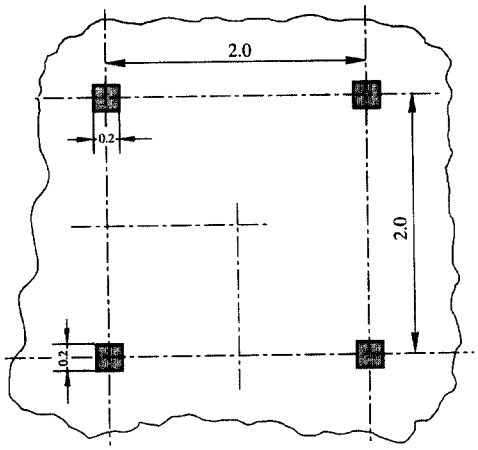

그림 6 슬래브의 형상

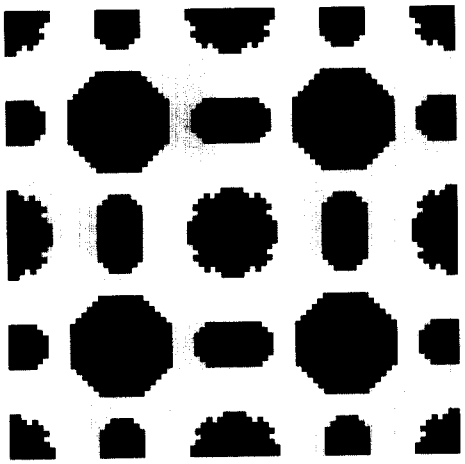

그림 7 보강재의 위치

기술하였다. 구체적으로는 위상최적화에 사용된 가등질화된 물질을 이용한 층재료 모델과 가등질화된 물질내의 빈공간의 크기를 조절하기 위한 판 구조물에 대한 최적기준을 기술하였다. 기술한 최적화의 알고리즘을 이용하여 보강재의 위치를 효율적으로 찾아낼 수 있었으며 이러한 기법은 여러 공학분야에서 최적설계시 유용하게 쓰일 것으로 사료된다.

참 고 문 헌

1. 이상진, "위상최적화에 대한 개론", 한국전산구조공학회지, 9월호 특집기사, 2000
2. Reissner, E., "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plate", *ASME J. Appl. Mech.* 12, 2000, pp.69~76
3. Lee, S.J., Bae, J.E. and Hinton, E., "Shell topology optimization using layered artificial material model, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 47, 2000. pp.843~867