



종의 음색을 조절하기 위한 쉘의 최적화기법



이 상 진*

1. 서 론

종은 지구상에 존재하는 가장 오래된 악기중의 하나이다. 종은 일반적으로 금속재료로 제조되나 나무, 유리, 진흙 또는 동물의 뿔 등이 이용되기도 한다. 종은 문화적이거나 지역인 특성에 따라 그 모양이 다르게 나타나는데 동아시아에는 반구나 통 모양의 것이 많고 서구에는 튜울립 모양의 종이 많다. 한국종으로는 상원사 동종으로 시작된 범종이 대표적이는데 성덕대왕신종은 가히 시대의 걸작이며 연구의 대상이라 하겠다.

종이 소리를 내는 방법은 일반적으로 두 가지로 분류된다. 첫 번째는 종의 테두리 부분을 나무메 등으로 가격하는 것이고 다른 하나는 종의 내부에 설치된 추가 종 안쪽 벽에 부딪침으로써 소리가 생성된다. 역사적으로 종이 다양한 용도로 사용되어 왔고 그 용도에 따라 종의 음색이 결정되어 지기도 했다. 종의 음색은 종을 만드는 장인에 의해서 지금까지 꾸준히 개선되어져 왔으며 이는 수많은 제작상의 시행착오를 거치면서 오늘날의 음색을 가지게 되었다. 이는 유럽의 교회종 중의 하나인

major third bell의 제작이 최근에 이르러서야 비로소 가능하게 된 사실로 미루어 짐작할 수 있다. 본 고에서는 종의 음색을 수치적으로 조절할 수 있는 최적화기법에 대하여 기술하고자 한다. 세부적으로는 종의 형상을 표현하는 기하학적 모델, 유한요소망 자동생성기, 수치해석기법, 민감도해석기법, 최적화 알고리즘에 대하여 기술하였다.

2. 기하학적 모델

종의 음색을 조절하기 위한 최적화는 다양한 기법이 조화를 이루어야 하는데 무엇보다도 종의 형상과 단면두께를 정확히 표현하는 기하학적 모델을 개발하는 것이 중요하다. 종의 형상은 일반적으로 축대칭 구조물이므로 종의 단면만을 표현하는 기법이 필요하다. 본고에서는 종의 단면정보를 삼차스플라인¹⁾(Cubic spline)으로 표현하는 방법을 기술하였다. C^2 연속성을 만족하는 삼차스플라인은 종의 형상을 정확히 표현할 수 있을 뿐만 아니라 그 표현식이 간단하여 매우 효율적이다. 삼차스플라인은 다음과 같이 정의된다.

* 본 학회 편집위원 · 한국원자력연구소, 선임연구원

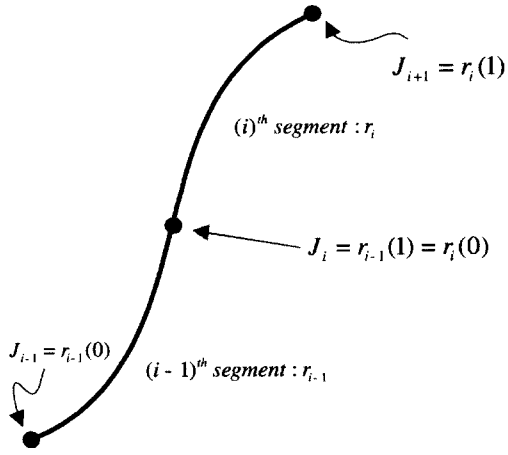


그림 1 삼차 스플라인의 기호규약

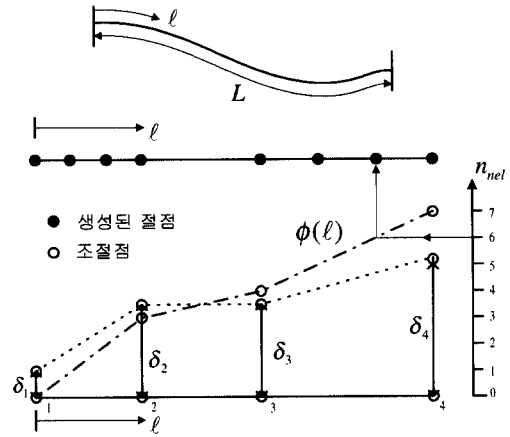


그림 2 절점의 생성

$$r_i(u) = \mathbf{u} \mathbf{M} \mathbf{C} \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (1)$$

여기서,

$$\mathbf{u} = \{u^3, u^2, u, 1\}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{C} = \{J_{i-1}, J_i, J'_{i-1}, J'_i\}$$

또한 J_i 는 i 번째 스플라인조각의 시작 조절점을 나타내고 윗첨자 ($'$)는 매개변수 u 에 대한 일차미분을 뜻한다.

종의 단면은 삼차스플라인의 조합으로 표현되고 조합은 그림 1에서 도시한 바와 같이 스플라인의 조각들로 형성된다.

이렇게 스플라인을 이용하여 종의 단면을 표현하면 적은 수의 조절점을 사용하여 효과적으로 종의 형상과 두께를 조절할 수 있다.

3. 요소 자동생성기

종의 단면을 표현하는 기학적 모델은 수치해석에 사용되기 위해서 유한요소로 이산화 되어야 한다. 요소를 생성하는 방법²⁾은 다음과 같이 정리 할 수 있다.

종의 단면을 표현하고 있는 스플라인은 임의의 조절점으로 이루어져 있고 각 조절점에 요소밀도도 변수가 초기값 δ_i 를 가진다고 가정하면 다음 단계를 거쳐서 이산화 된다 (그림 2 참조).

- 각 조절점의 국부좌표값 ℓ_i 를 찾는다.
- 각 조절점의 역 요소밀도함수 $s(\ell_i) = 1/\delta_i$ 를 찾는다.
- 스플라인을 따라 조절점 사이에 선형함수 $\phi(\ell)$ 를 형성한다.

$$\phi_i(\ell) = \phi(\ell_{i-1}) + 0.5((s(\ell_i) + s(\ell_{i-1}))) \Delta \ell_i \quad (3)$$

여기서 $\phi(\ell_i) = 0$ 이고 $\Delta \ell_i = (\ell_i - \ell_{i-1})$ 이다.

- 스플라인에 생성될 요소수 n_{net} 을 마지막 조절점의 선형함수번호로 한다.
- 국부좌표계에 의한 절점의 좌표값을 c)단계에서 정의한 선형함수 $\phi(\ell)$ 와 절점의 수를 사용하여 계산한다. 첫번째 절점은 $\ell = 0$ 에 위치하고, 마지막 절점은 $\ell = L$ 에 위치한다.
- 선형요소일 경우에는 $n_n = n_{net} + 1$ 개의 절점이 생성되고, 이차요소인 경우에는 $n_n = 2n_{net} + 1$ 개의 절점이 생성된다.
- 구해진 절점의 좌표값 ℓ_i 를 이용하여 절점의 u 좌표값을 구한다.
- u 좌표값을 이용하여 절점의 x_1 과 x_2 값을 계산한다.

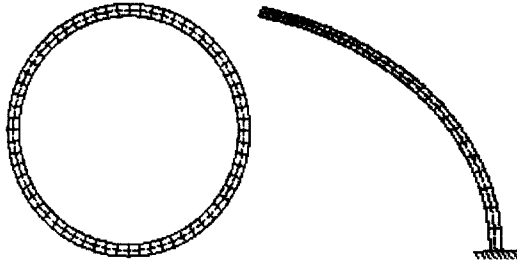


그림 3 유한 요소망의 예

위에서 기술한 단계 a)-h)를 모든 스플라인조각에 대하여 실행하면 구조물의 단면은 유한요소로 이산화된다. 이러한 방법으로 이산화된 구조물의 단면은 그림 3과 같다.

4. 자유진동해석

종의 진동특성은 수치해석 기법을 이용하여 분석할 수 있다. 종은 형상이 축대칭형이고 경계조건이 단순하므로 축대칭 쉘요소³⁾를 사용하면 진동특성을 분석하기 용이하다. 축대칭 쉘요소의 개발에는 횡 전단변형을 고려하기 위하여 Reissner-Mindlin(RM)가정이 많이 도입되는데 RM 축대칭 쉘의 기본개념은 그림 4와 같다.

RM 축대칭 쉘요소를 이용하여 종의 동적특성을 분석하기 위해서는 고유치 해석을 수행해야하고 이는 다음과 같은 표준식⁴⁾으로 표현된다.

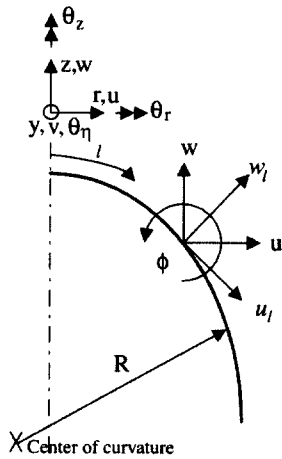


그림 4 RM 축대칭 쉘 요소의 정의

$$(K + \lambda M)u = 0 \tag{4}$$

여기서 $K = A_{e=1}^{nel} K_{ij}^e$ 와 $M = A_{e=1}^{nel} M_{ij}^e$ 은 축대칭 쉘 요소를 이용하여 구한 전체강성행렬과 전체질량행렬이며 요소 강성행렬 K_{ij}^e 과 질량행렬 M_{ij}^e 은 다음⁵⁾과 같다.

$$[K_{ij}^e]^{pq} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \{ B_{m_i}^p D_m B_{m_j}^q + B_{b_i}^p D_b B_{b_j}^q + B_{s_i}^p D_s B_{s_j}^q \} r J d\xi d\eta$$

$$[M_{ij}^e]^{pq} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \{ N_i^p P N_j^q \} r J d\xi d\eta \tag{5}$$

여기서 i, j 는 요소강성행렬과 요소질량행렬이 절점 i, j 에 연관되어 있음을 나타내고 p, q 는 harmonic 을 나타낸다. 참고로 직교조건을 사용하면 q 항은 p 항으로 정리된다.

4. 민감도 해석

종의 동적특성을 변화시키기 위해서는 종 단면의 형상과 두께를 조정하여야 한다. 이러한 목적으로 최적화기법을 도입하면 종의 형상과 두께는 설계변수의 역할을 하고 이때 최적화 알고리즘은 각 설계변수에 대한 민감도를 필요로 한다. 민감도 해석⁶⁾은 설계변수에 대한 목적함수의 그래디언트를 계산하는 것을 말한다. 설계변수에 대한 주파수의 민감도는 축대칭 쉘의 자유진동해석에 대한 지배방정식을 설계변수 s_k 에 대하여 미분하면 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \lambda_p}{\partial s_k} = u_p^T \left(\frac{\partial K}{\partial s_k} - \lambda_p \frac{\partial M}{\partial s_k} \right) u_p \tag{6}$$

위의 식에서 강성행렬과 질량행렬의 미분값은 해석적 방법(analytical method)이나 반해석적 방법(semi-analytical method)으로 구할 수 있다. 그리고 주파수의 민감도는 유한차분법을 이용하여 구할 수도 있다.

$$\frac{\partial \lambda_p}{\partial s_k} = \frac{\lambda_p(s_k + \Delta s_k) - \lambda_p(s_k)}{\Delta s_k} \tag{7}$$

여기서 Δs 는 설계변수의 미소변화의 양을 나타낸다. 참고로 민감도해석방법에 따라 최적값이 달라질 수 있는데 이는 민감도 값이 검색방향을 결정하기 때문이다.

5. 최적화 알고리즘

종의 최적화를 수행하기 위한 알고리즘은 전 절에서 기술한 사항을 포함하여 아래의 다섯 가지 단계⁷⁾로 정리 될 수 있다.

- 1) 기하학적 모델 생성 : 종의 초기단면형상과 두께의 분포를 삼차스플라인을 사용하여 기하학적 모델로 정의한다. 그리고 설계변수의 이동방향과 이동범위를 이 단계에서 정의한다.
- 2) 요소 모델 생성 : 요소망 자동생성기를 사용하여 전 단계에서 정의된 기하학적인 모델 위에 유한요소망을 생성한다.
- 3) 수치해석 : 유한요소법을 바탕으로한 축대칭 쉘요소를 사용하여 종의 자유진동해석을 한다. 이 단계에서 목적함수에 해당하는 종의 주파수를 계산한다.
- 4) 민감도 해석 : 설계변수의 변화가 목적함수 또는 제약함수에 끼치는 영향의 정도를 파악하는 해석이며 해석적인 방법, 반해석적인 방법 그리고 유한차분법 등을 이용할 수 있다.
- 5) 최적값 검색 : 민감도 해석에서 계산된 각 설계변수에 대한 민감도값을 사용하여 최적값을 검색한다. 최적값이 구해질 때까지 2)-5)과정을 반복한다.

6. 종의 최적화 예

종의 음색을 조정하는 것은 종의 진동특성을 원하는 주파수 영역에 맞추는 작업으로 최적화문제로 정의 될 수 있다. 본고에서는 자료가 풍부한 유럽의 D_5 교회종을 모델로 하였다. D_5 교회종은 알려진 바와 같이 일정한 주파수비를 가지며 minor third bell인 경우 표 1에 기술된 바와 같다.

종의 제작시 D_5 교회종은 표 1에 기술된 주파수비에 맞추어 지는데 이에 대한 분석을 위해 종의

표 1 Minor third bell의 주파수비

모우드이름	음	주파수비
hum	D_4	1.0
fundamental	D_5	2.0
minor third	F_5	2.4
fifth	A_5	3.0
octave	D_6	4.0

표 2 Minor third bell의 주파수

모우드이름	실험치 ⁸⁾	유한요소법
hum	292.72	294.58
fundamental	585.92	594.68
minor third	692.94	693.23
fifth	882.53	891.93
octave	1172.0	1169.9

진동특성을 실험⁸⁾적으로 조사한 바 있다. 실험에 사용된 종의 직경은 70.2 cm이고 높이는 56.5 cm 그리고 무게는 214 kg이었고 종에 쓰인 재료의 탄성계수는 $E=103 \text{ GPa}$, 밀도는 $\rho=8.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 그리고 $\nu=0.38$ 의 프와송비를 사용하였다. 실험에 사용되어진 종의 진동특성은 또한 37개의 축대칭 3차 쉘요소를 사용하여 해석적으로 분석되었으며 5개의 모우드에 대한 종의 주파수는 표 2에 기술하였다.

실험결과와 수치해석결과는 약간의 불일치를 나타냈고 이를 전술한 최적화기법을 이용하여 개선하였다. 이러한 목적으로 음색을 조정하기 위한 목적함수를 다음과 같이 정의하였다.

$$\psi = \sum_{i=1}^7 \frac{(\omega_i - \omega'_i)^2}{(\omega'_i)^2} a_i \quad (8)$$

여기서 ψ 는 최소화하여야 할 목적함수이고 ω_i 는 수치해석을 이용해서 계산한 종의 i 번째 주파수이며 ω'_i 는 목표로 하는 i 번째 주파수이다. 그리고 a_i 는 i 번째 모우드에 대한 가중치이다. 위의 목적함수는 계산된 종의 주파수가 목표하는 주파수와 일치하면 목적함수가 영이 된다. 최적화를 위하여 종의 단면 중층에 13개의 조절점을 이용하여 방사

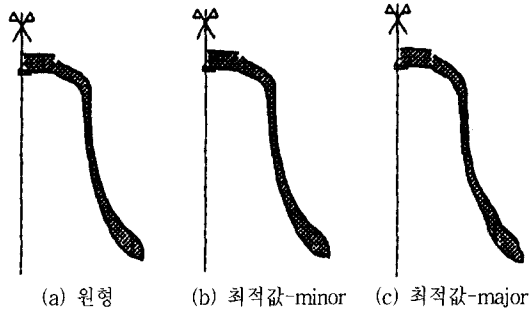


그림 5 종의 형상

표 3 Minor 와 major third bell의 최적값

모우드이름	최적값	
	minor	major
hum	293.97	293.27
fundamental	593.73	591.87
minor third	695.16	738.03
fifth	892.52	892.67
octave	1167.46	1180.90

방향으로 조절점을 이동하는 조건으로 최적화를 실시하면 종의 주파수비가 표 1에 주어진 값에 가까워 질 수 있게 된다. Major third bell의 경우 minor third bell의 주파수비중 minor third 값 2.4를 2.5로 조정하면 되는데 이를 위해 종의 단면 중층에 위치하는 13개의 조절점중 11개는 방사방향과 수직방향으로 이동할 수 있게 하고 2개의 조절점은 방사방향으로만 이동하게 하여 최적 형상을 구하였다.

최적화를 통하여 구한 minor third bell과 major third bell의 형상은 그림 5에 도시한 바와 같고 최적화를 통하여 구한 주파수값은 표 3에 기술하였다. 또한 참고로 major third bell의 모우드를 그림 6에 도시하였다.

6. 결 론

본고에서 기술한 최적화기법은 종의 음색을 조절하기 위하여 거치는 수많은 제작상의 시행착오를 줄여 주고 보다 과학적인 방법으로 종의 형상을 결정할 수 있으리라 사료되며 앞으로 한국의 종에 대한 최적화 작업이 이루어지기를 바라며 글을 마친다.

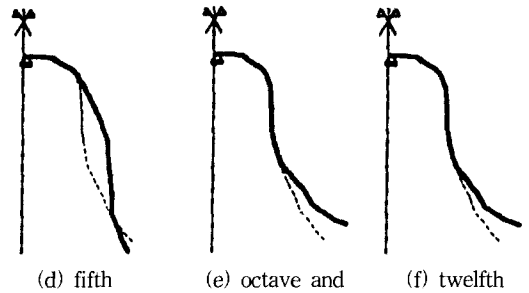
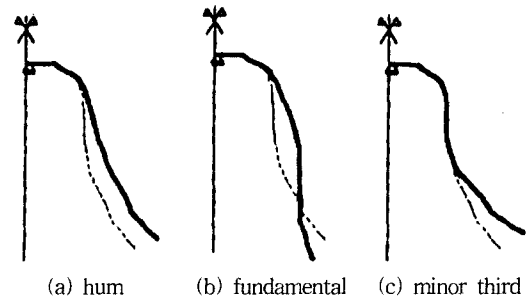


그림 6 최적값-major의 모우드

참 고 문 헌

1. Anand, V.B., *Computer Graphics and Geometric Modelling for Engineers*, John Wiley and Sons, 1993, New York
2. 이상진, "스윙프 기하학적 모델을 사용한 프리즘 쉘의 최적화", 한국전산구조공학회논문집 제12권 제4호, 1999, pp.551~561
3. Day, R.A. and Potts, D.M., "Curved Mindlin beam and axisymmetric shell elements - a new approach", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 30, 1990, pp.1263~1274
4. Lee, S.J. and Han, S.E. "Free vibration analysis of plates and shells with nine-node assumed strain natural degenerated shell element", *J. Sound and Vibration*, (to be published)
5. Hinton, E., Özakça, M. and Sienz, J. "Optimum shapes of vibrating axisymmetric shell structures", *J. Sound and Vibration*, 167, 1993 pp. 511~528
6. Haftka R.T. and Adelman, H.M., "Recent de-

- velopments in sensitivity analysis”, *Structural Optimization*, 1, 1989, pp.137~151
7. Lee, S.J. and Hinton, E., “On the reliability of optimized shells”, in Proc. of the 4th international conference on computational structures technology an the 1st international conference on engineering computational technology: Advances in computational structural mechanics, Civil-Comp. Press, Edinburgh, 1998, pp.371~381
8. Perrin, R., Chamley, T. and Depont, J., “Normal modes of the mordern English church bell”, *J. Sound and Vibration*, 90, 1983, pp.29~49 