The Korean Communications
in Statistics Vol. 7, No. 3, 2000
pp. 773-788

A Combined Process Control Procedure by Monitoring and Repeated Adjustment[1)]

Changsoon Park[2)]

Abstract

Statistical process control (SPC) and engineering process control (EPC) are based on different strategies for process quality improvement. SPC reduces process variability by detecting and eliminating special causes of process variation, while EPC reduces process variability by adjusting compensatory variables to keep the quality variable close to target. Recently there has been needs for a process control proceduce which combines the two strategies. This paper considers a combined scheme which simultaneously applies SPC and EPC techniques to reduce the variation of a process. The process model under consideration is an integrated moving average (IMA) process with a step shift. The EPC part of the scheme adjusts the process back to target at every fixed monitoring intervals, which is referred to a repeated adjustment scheme. The SPC part of the scheme uses an exponentially weighted moving average(EWMA) of observed deviation from target to detect special causes. A Markov chain model is developed to relate the scheme's expected cost per unit time to the design parameters of the combined control scheme. The expected cost per unit time is composed of off-target cost, adjustment cost, monitoring cost, and false alarm cost.

Keywords : Statistical Process Control, Engineering Process Control, IMA(0,1,1), EWMA, Markov Chain, Expected Cost Per Unit Time

1. 서론

통계적공정관리(statistical process control; SPC)는 공정에 이상원인이 발생하는 것을 탐지하는 공정검색(process monitoring)을 주된 방법으로 사용하고 이상원인이 탐지되면 이 원인을 공정에서 제거하여 관리하도록 되어있다. 공정검색을 위해 사용되는 방법으로 여러 종류의 관리도를 사용하며 관리도로부터 이상신호가 주어지면 공정관리자는 이상원인을 찾을 수 있고 또한 제거할 수 있다고 가정하고 있다. 만일 공정에 잡음요인(noise factor)이 내재하여 공정특성치에 영향을

1) This research was supported by Chung-Ang University Research Grant in 1999.
2) Professor, Department of Applied Statistics, Chung-Ang University, Seoul, 156-756, Korea.
E-mail: cspark@chungang.edu

주면서 쉽게 제거할 수 없는 현상이 발생하면 통계적 공정관리에서는 이를 공정모형에 포함시켜 공정분포를 가정하고 가장 적절한 관리 형태를 사용하게 된다. 이러한 예로서 자기상관(auto-correlation)을 고려한 관리도나 분산성분모형(variance components model)하에 사용되는 관리도를 들 수 있다.

자동공정관리(automatic process control; APC)는 흔히 공학적 공정관리(engineering process control : EPC)라고도 하는데, 이것은 공정특성치가 목표치(target value)에 가능한 한 가깝게 (즉, 특성치의 평균은 목표치가 되고, 분산은 최소화)되도록 공정을 관리하고자 하는 방법이다. 공정특성치에 영향을 주는 잡음요인이 내재하고 있으나 그 원인을 알아내기 어렵거나, 알더라도 제거하기 어려운 경우가 있다. 이 경우에는 일정시간 간격으로 공정특성치를 측정하여 목표치로부터의 편차(deviation from target)를 추정한 다음 공정입력요인을 적절히 수정하여 공정출력치가 목표치에 가깝게 하도록 한다.

자동공정관리에서 사용하는 방법에는 피드포워드 조정(feedforward control)과 피드백 조정(feedback control)이 있다. 피드포워드 조정은 잡음으로 인한 입력요인의 변화를 측정할 수는 있으나 제거할 수는 없는 경우에 적절한 입력조정요인(잡음이 발생한 입력요인과는 다른 요인으로서 조정 가능한 요인)을 선정하고 이를 보정(compensation)하여 공정출력치의 값을 목표치에 가깝게 하는 방법을 말한다. 반면에 피드백 조정은 공정출력치의 목표치로부터의 편차를 측정한 후 입력조정요인을 선정하고 이를 보정하여 공정을 수정하는 방법을 말한다. 자동공정관리에 대한 연구는 Box and Jenkins(1963) 이후 Abraham and Box(1979), Box(1991a,1991b)등이 있으며 Box and Kramer(1992)가 자동공정관리의 필요성과 공정수정에 대한 방법을 발표한 후 더 활발히 연구되고 있다. 그 예로는 Box(1993), Box and Luceno(1994, 1995, 1997a, 1997b)등이 있다.

통계적 공정관리에서는 매 관측시점마다 이상원인의 발생여부를 판단하게 되어 이것은 연속된 통계적 검정으로 비유할 수 있다. 반면에 자동공정관리에서는 입력요인의 수정량을 측정하기 위해 공정특성치의 목표치로부터의 편차를 추정하게 되며 이것은 연속된 통계적 추정에 비유된다. 통계적 이론에서 검정과 추정이 별개의 논리가 아니듯이, 공정관리에서도 통계적 공정관리와 자동공정관리는 서로 무관한 방법이 아님을 알 수 있다. 다만 주어진 상황에 적절한 방법을 선택하는 것이 중요하다. 또한 최근의 제조업에서는 두 관리방법이 명확 히 구분되는 경우보다는 함께 적용되면 더 좋은 결과를 얻을 수 있는 경우가 많이 있다. 통계적공정관리와 자동공정관리의 두 절차는 각각 별도의 사용영역이 있는 것으로 생각되어 왔으나, 현대의 산업공정에서는 두 절차를 동시에 사용하여 공정을 관리할 수 있는 방법에 대한 필요성이 인식되고 있다. 이 논문에서는 먼저 잡음요인과 이상원인이 동시에 존재하는 공정모형을 정의하고 이러한 모형에서의 공정관리를 위해 자동공정관리와 통계적공정관리를 병행하는 합동공정관리(combined process control)를 제안한다. 또한 합동공정관리에 대한 효율로서 단위시간당 기대비용을 정의하여 공정관리절차에 대한 효율을 나타내었다. 합동공정관리절차에 대한 연구로는 Vander Wiel등(1992), Montgomery등(1994), Janakiram and Keats(1998), 그리고 Nembhard and Mastrangelo(1998)등이 있다.

자동공정관리의 방법으로는 반복수정(repeated adjustment)을 사용하고 통계적공정관리의 방법으로는 지수가중이동평균(exponentially weighted moving average)관리도를 사용하였다. 단위시간당 기대비용은 여러종류의 비용모수와 공정특성치에 의해 표현된다. 공정특성치의 계산을 위해서는 공정관리절차를 Markov 연쇄(chain)로 표현한 다음 Markov 연쇄의 특성을 이용하였다.

2. 공정모형

공정에 잡음과 이상원인이 동시에 존재하는 경우에 대한 공정모형은 잡음요인만이 존재하는 모형과 이상원인만이 존재하는 모형을 동시에 고려하여 설정한다.

공정이 잡음에 의해 영향을 받을 때에 아무런 수정조치를 취하지 않으면 목표치로부터 편차가 발생하게 되며 공정수준이 목표치로부터 벗어나 떠돌아다니게 된다(wander off). 공정수정을 위한 모형을 설정하기 위해서는 편차에 대한 적절한 모형의 설정을 필요로 한다.

목표치로부터 벗어나 돌아다니는 편차는 연속적인 편차간의 상관성을 가지게 되어 백색잡음(white noise)의 가중합(weighted sum)으로 표현될 수 있다. 이중에서 간단하면서 유용한 모형은 IMA(0,1,1)모형이 있고 다음과 같이 표현된다. [(0,1,1)은 ARIMA모형의 차수를 표시하고 있다.]

$$Z_t = \hat{Z}_t + a_t. \tag{2.1}$$

단, $\hat{Z}_t = \lambda(Z_{t-1} + \theta Z_{t-2} + \theta^2 Z_{t-3} + \cdots)$,

$\lambda = 1 - \theta, \quad 0 \le \theta < 1 \ (0 < \lambda \le 1)$,

$\{a_t\} \sim iid\ N(0, \sigma_a^2)$.

IMA(0,1,1)모형의 1차 차분(difference)은 MA(1)모형을 따르게 되어 IMA(0,1,1)모형은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$Z_t - Z_{t-1} = a_t - \theta a_{t-1}.$$

잡음모형으로서 IMA모형의 타당성은 Box and Kramer(1992), Vander Wiel(1996), 그리고 Montgomery(1999)등에 의해 충분히 설명되었다. 잡음요인과 이상원인이 동시에 존재할 수 있는 공정에서 공정관리활동으로 취하는 조치(action)에는 수정(adjustment)와 이상신호(out-of-control signal)가 있다. 이상원인이 발생하지 않고 잡음에 의한 공정수준의 변화가 예측되는 경우에는 수정을 하게 되고 잡음에 의한 변화에 관계없이 이상원인이 발생했다고 판단되면 이상신호를 주는 것이 바람직하다. 공정에 이상원인이 발생한 후에도 이를 탐지하지 못하면 다음조치가 이상신호 대신 수정이 될 수도 있다. 만일 다음 조치가 이상신호이면 이상원인의 발생을 신속히 탐지한 것이 되어 바람직한 결과가 된다. 이와 반대로 다음 조치가 수정이 된다는 것은 공정에서 이상원인의 발생을 탐지하지 못하고 계속적인 수정활동을 하는 것이 된다. 전자를 Phase 1, 후자를 Phase 2라 한다. 이상원인이 공정에 존재하는 상태에서 수정을 하는 Phase 2의 경우에는 수정 활동이 이상원인 발생 전처럼 원하는 대로 잘 되지 않게 된다. 이 논문에서는 이 경우에 공정분산이 커지는 것을 고려하고 있다.

공정관리를 위한 활동은 하나의 주기(cycle)로 표현하면 한 주기는 공정의 시작부터 이상원인의 탐지까지로 정의한다. 공정의 한 주기 내에서 공정모형의 변화가 발생하는 몇 가지 주된 시점에 대해 다음과 같이 표시한다.

U_0 = 이상원인의 발생시점

T_0= 이상원인 발생 직전의 수정시점

T_1 = 이상원인 발생 직후의 수정시점

T_2 = 이상원인 발생 후의 이상신호시점

이상원인의 발생시점 U_0는 기하분포를 따른다고 가정한다. 기하분포의 확률함수는 다음과 같다.

$$P(U_0 = x) = (1-p)^{x-1}p, \quad x = 1, 2, \cdots . \tag{2.2}$$

$\{U_0 = x\}$는 이상원인이 시간구간 $(x-1, x]$에서 발생하는 것을 의미하고 그 영향으로 시점 x에서 공정수준에 일정양의 변화가 발생한다고 가정한다.

공정의 한 주기는 세 종류의 기간(period)으로 나누어 생각하면 편리하다. Period 1은 공정의 시작부터 이상원인 발생직전의 수정시점(T_0)까지를 나타내고, Period 2는 T_0부터 이상원인이 발생한 직후에 취하는 조치(수정 또는 이상신호)($\min\{T_1, T_2\}$)까지를 나타낸다. 만일 이 조치가 이상신호가 되면 한 주기가 끝나게 되고 반대로 이 조치가 수정이 되면 Period 3는 이 수정시점부터 이상신호시점(T_2)까지를 나타낸다. 따라서 Phase 1의 경우에는 한 주기가 Period 1 과 Period 2 로 구성이 되고, Phase 2의 경우에는 한 주기가 Period 1, Period 2, 그리고 Period 3으로 구성됨을 알 수 있다.

공정의 한 주기에서 취하는 조치는 수정과 이상신호로 구성된다. 수정활동은 적게는 한번도 하지 않을 수 있으며 많게는 무한히 많이 할 수 있으나 이상신호는 반드시 한번만 하게 되며 이 때에는 공정의 한 주기가 끝나게 된다. Period 1 은 공정이 관리상태인 기간이고, Period 2 는 공정이 관리상태에서 이상상태로 변환되는 기간이며, Period 3 은 이상상태하에서 수정이 되는 기간을 나타내고 있다. 각 Period 별로 공정수정전의 공정모형은 다음과 같이 정의한다.

Period 1에서,

$$Z_t = Z_{t-1} + a_t - \theta a_{t-1} . \tag{2.3}$$

Period 2에서,

$$Z_t = \begin{cases} Z_{t-1} + a_t - \theta a_{t-1} & t \neq U_0 \\ Z_{t-1} + a_t - \theta a_{t-1} + \delta\sigma_a & t = U_0 . \end{cases} \tag{2.4}$$

Period 3에서,

$$Z_t = Z_{t-1} + b_t - \theta b_{t-1} . \tag{2.5}$$

단, $\{b_j\} \sim iid\, N(0, \sigma_b^2)$ $(\sigma_b^2 \geq \sigma_a^2)$.

식(2.4)에서는 이상원인이 발생하는 시점 U_0에서 공정수준이 $\delta\sigma_a$만큼 증가하는 것을 나타내고, 식(2.5)에서는 이상원인이 존재하는 상태에서 수정이 되면 공정분산이 증가함을 나타내고 있다.

3 공정수정절차

공정수정의 효율성은 출력치의 편차가 작을수록 커지며 이것은 계속적인 표본관측과 수정활동을 통해 가능하다. 다만 표본관측과 수정활동에는 비용이 수반될 수 있으므로 최소비용으로 공정을 관리할 수 있는 방법을 찾게 된다. 만일 표본추출과 공정수정에 비용이 들지 않으면(Case I) 단위구간마다 관측값을 얻고 관측값을 얻을 때마다 수정을 하게 된다. 이 경우에는 별도의 조치를 필요로 하지 않는다. 공정수정에는 비용이 들지 않고 표본추출에만 비용이 든다면(Case II) 일정구간간격으로 표본을 추출하고 매 추출시 마다 수정을 하는 것이 가장 효율적인 수정활동이 될 수 있다. 표본추출에는 비용이 들지 않고 수정에만 비용이 든다면(Case III) 단위구간마다 표본을 추출하고 일정구간 간격으로 수정을 한다. 공정수정과 표본추출에 모두 비용이 든다면(Case IV) 일정구간 간격으로 표본을 추출하고 일정수의 표본구간마다 수정하게 된다.

공정수정계획은 두 가지로 구분할 수 있다. 첫째는 공정관측값에 관계없이 일정수의 표본구간마다 수정하는 계획이며 이를 반복수정계획(repeated adjustment scheme)이라 한다. 둘째는 공정으로부터 적절한 통계량을 관측하여 이 통계량이 정해진 경계선(boundary)을 초과하면 수정하는 계획으로서 이를 경계선수정계획(bounded adjustment scheme)이라 한다. 이 논문에서는 Case III의 경우에 반복수정계획을 사용하는 공정관리에 대해 알아보고자 한다.

반복수정계획에서 수정간격을 n 이라 하고 $A(k)$를 k번째 조치시점이라 하자. Period 1 에서 (이 경우는 관리상태이므로 이상신호는 오경보에 해당되어 모든 조치는 수정이 된다) 수정시점에서의 공정수정을 다음과 같이 생각해 보자. Y_t를 시점 t에서 나타나는 공정수정량이라 하자. 공정의 시작시점에서는 관측자료가 없기 때문에 수정을 할 수 없으므로 $Y_{A(0)}=0$ 이 된다. 시점 $A(1)$에서 다음 시점의 잡음 $Z_{A(1)+1}$의 예측값 $\hat{Z}_{A(1)+1}$을

$$\hat{Z}_{A(1)+1} = \lambda(Z_{A(1)+}\theta Z_{A(1)-1} + \theta^2 Z_{A(1)-2} + \cdots + \theta^{n-1} Z_1) \tag{3.1}$$

로 설정하면 이것은 과거의 관측값에 대한 지수가중이동평균으로서 Z_t가 IMA(0,1,1)모형을 따를 때 최소평균제곱오차(minimum mean squared error : MMSE) 예측값이 된다. IMA(0,1,1)모형에서 예측오차는 식(2.1)에 의해 백색잡음 a_t와 동일함을 알 수 있고 식(3.1)을 백색잡음으로만 표현하면

$$\hat{Z}_{A(1)+1} = \lambda \sum_{i=1}^{A(1)} a_i \tag{3.2}$$

가 된다. 시점 $A(1)$에서의 공정수정량은 $Y_{A(1)}=-\hat{Z}_{A(1)+1}$로 설정하게 되며 수정된 공정수준 $O_{A(1)+i}=Z_{A(1)+i}+Y_{A(1)}$ 은, $i=1,2,\cdots,n$ 에 대해, 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} O_{A(1)+i} &= O_{A(1)+i-1} + a_{A(1)+i} - \theta a_{A(1)+i-1} \\ &= a_{A(1)+i} + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{A(1)+j}. \end{aligned}$$

단, $O_{A(1)}=0,\ a_{A(1)}=0$.

이 과정을 일반적으로 표현하면 시점 $A(k)$에서의 공정수정량은

$$Y_{A(k)} = -\hat{Z}_{A(k)+1} \tag{3.3}$$

이 되고 수정된 공정수준 $O_{A(k)+i} = Z_{A(k)+i} + Y_{A(k)}$ 은 다음과 같다.

$i = 1, 2, \cdots, n$ 에 대해,

$$\begin{aligned} O_{A(k)+i} &= O_{A(k)+i-1} + a_{A(k)+i} - \theta a_{A(k)+i-1} \\ &= a_{A(k)+i} + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{A(k)+j} . \end{aligned} \tag{3.4}$$

다음은 각 Period 별로 수정후의 공정수준에 대해 알아보자. 편리상 수정횟수 k를 무시하고 수정후의 시점($t' = t - A(k)$)으로만 표현하면 다음과 같다.

Period 1 에서,

$$\begin{aligned} O_{t'} &= O_{t'-1} + a_{t'-1} - \theta a_{t'-1} \\ &= a_{t'} + \lambda \sum_{j=1}^{t'-1} a_j . \end{aligned} \tag{3.5}$$

Period 2에서, $U_0' = U_0 - A(k)$에 대해,

$$\begin{aligned} O_{t'} &= \begin{cases} O_{t'-1} + a_{t'} - \theta a_{t'-1}, & t' \neq U_0' \\ O_{t'-1} + a_{t'} - \theta a_{t'-1} + \delta\sigma_a, & t' = U_0' \end{cases} \\ &= \begin{cases} a_{t'} + \lambda \sum_{j=0}^{t'-1} a_j, & t' < U_0' \\ a_{t'} + \lambda \sum_{j=0}^{t'-1} a_j + \delta\sigma_a, & t' \geq U_0' . \end{cases} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Period 3 에서,

$$\begin{aligned} O_{t'} &= O_{t'-1} + b_{t'-1} - \theta b_{t'-1} \\ &= b_{t'-1} + \lambda \sum_{j=0}^{t'-1} b_j . \end{aligned} \tag{3.7}$$

단, $O_0 = 0$ and $a_0 = 0$.

4 공정탐지절차

공정탐지를 위해서는 통계량은 예측오차(forecast error)를 사용하고 관리도는 지수가중이동평균 관리도를 사용한다. 예측오차는 서로 상관되어 있지 않고(uncorrelated) 또한 이상원인에 의한 수준변화의 효과를 포함하고 있으므로 이상원인의 탐지를 위한 좋은 통계량이 된다(Vander Wiel, 1996). 지수가중이동평균관리도는 공정수준의 작은 변화에도 민감한 것으로 알려져 있고 그 사용법도 비교적 간단하여 공정관리에서 널리 사용되고 있다.

예측오차 e_t 는 Period 별로 다음과 같이 표현된다.

Period 1에서,

$$e_{t'} = a_{t'} . \tag{4.1}$$

Period 2에서,

$$e_{t'} = \begin{cases} a_{t'}, & t' < U_0' \\ a_{t'} + \delta\sigma_a \theta^{t'-U_0'}, & t' \geq U_0' . \end{cases} \tag{4.2}$$

Period 3에서,

$$e_{t'} = b_{t'} . \tag{4.3}$$

Period 1과 period 3 에서의 예측오차는 식(2.1)로 부터 알 수 있으며, 식(4.2) 에서 $t' \geq U_o'$ 인 경우에는 부록A.1에서 증명되어 있다.

공정탐색을 위한 지수가중이동평균 통계량 E_t는 다음과 같이 정의한다.

$$E_t = re_t + (1-r)E_{t-1}\,. \tag{4.4}$$

단, $r(0 < r \leq 1)$은 가중치.

공정에서 이상원인의 발생에 대한 탐지절차는

$$|E_t| \geq c$$

이면 이상신호를 주게 된다. 이 때 c 는 지수가중이동평균관리도의 관리한계를 나타낸다.

공정의 시작시점에서는 $E_0 = 0$ 으로 시작하고 오경보(false alarm)의 경우에도 관리통계량의 값을 $E_t = 0$ 으로 다시 시작하게 된다.

5 공정비용

생산공정에서 관측, 수정 및 목표치로부터의 편차에 의해 발생하는 비용은 단위시간당 평균비용으로서 표현한다. 먼저 비용모수는 다음과 같이 설정한다.

C_m = 단위표본추출 및 관측에 드는 비용

C_a = 공정수정 비용

C_f = 오경보에 수반되는 비용

C_t = 공정수준의 목표치로부터의 제곱편차에 의한 손실비용

공정의 한 주기에서 이상상태기간을 U_1 이라하면 공정의 한주기는

$$L = U_0 + U_1 \tag{5.1}$$

으로 표현된다. 공정의 한 주기에서 발생하는 총비용은 다음과 같다.

$$C = C_a \cdot N_a + C_m \cdot L + C_t \cdot S + C_f \cdot N_f\,. \tag{5.2}$$

단, N_a = 수정횟수, S = 총제곱오차, N_f = 오경보횟수.

공정주기와 총비용을 이용하여 단위시간당 평균비용을 다음과 같이 정의한다.

$$\frac{E(C)}{E(L)} = C_m + \frac{C_a E[N_a] + C_t E[S] + C_f E[N_f]}{E[L]}\,. \tag{5.3}$$

공정관리의 효율은 시간당 평균비용에 의해 결정되며 관리절차의 효율을 높이기 위해서는 시간당 평균비용을 최소화하는 공정모수, 즉 지수가중이동평균관리도의 관리한계 c와 수정간격 n을 설정하게 된다.

6 공정관리절차의 Markov 연쇄 표현

합동공정관리절차는 매우 복잡하여 그 특성에 대한 연구는 분석적(analytic) 접근으로 해결하기는 어려운 점이 있으나 Markov 연쇄를 이용하면 근사적 표현이 가능하다. Markov 연쇄는 2단계로 나누어 정의한다. 제1단계에서는 각 수정시점에서 공정의 상태(state)를 정의하고 제2단계에서는 관측시점에서의 공정의 상태를 정의하여 Markov 연쇄로 표현한다.

6.1 수정시점의 공정상태

수정시점의 공정상태는 두 종류로 나타낸다. 하나는 수정구간내에서 이상원인이 발생하는지 또한 이상신호를 주게 되는지를 나타내는 상태로서 V로 나타낸다. 다른 하나는 수정시점에서의 지수가중이동평균 통계량의 값을 이산화(discretize)시킨 값으로 나타낸다.

수정시점 $A(k)$, $k=0,1,2,\cdots$에서의 공정의 상태는 다음과 같이 정의한다.

$V_{A(k)}$=1 : 공정이 관리상태, 다음 수정까지 이상원인이 일어나지 않음.

$V_{A(k)}$=2 : 공정이 관리상태, 다음 수정까지 이상원인이 발생하나 이상신호는 주지 않음.

$V_{A(k)}$=3 : 공정이 이상상태, 다음 수정까지 이상신호를 주지 않음.

$V_{A(k)}$=4 : 공정이 관리상태, 다음 수정까지 이상원인이 발생하고 이상신호를 줌.

$V_{A(k)}$=5 : 공정이 이상상태, 다음 수정까지 이상신호를 줌.

이때 $V_{A(k)}$=1,2,3은 일시상태(transient state), $V_{A(k)}$=4,5는 흡수상태(absorbing state)에 해당한다.

다음은 지수가중이동평균 통계량을 이산화시키는 과정에 대해 알아보자. 지수가중이동평균관리도의 계속영역 $(-c,\ c)$은 가우시안 구적(Gaussian quardrature)의 점(point)과 가중치(weight)를 사용하여 다음과 같이 분할한다.

$\{(x_i,\ v_i),\ i=1,2,\cdots,h\}$를 h개의 가우시안 구적점과 가중치라 하고 구간 $(-c,\ c)$를 h개의 부구간(subinterval)으로 나눈다(단, h는 홀수). $i=1,2,\cdots,h$에 대해,

$$I_i = \left(-c+\sum_{j=1}^{i-1} v_j,\ -c+\sum_{j=1}^{i} v_j\right)$$

부구간 I_i와 구적점 x_i는 다음 관계를 만족한다.

$$x_i \in I_i \quad ,i=1,2,\cdots,h\ .$$

지수가중이동평균 통계량 E_i가 $E_i \in I_i$를 만족할 때 E_i를 x_i로 대체하면 $V_{A(k)}$와 $E_{A(k)}$의 결합전이확률은 다음과 같이 정의한다.

$$t_{ij}(x_l|x_k) = P(V_{A(k+1)}=j, E_{A(k+1)}=x_l \mid V_{A(k)}=i, E_{A(k)}=x_k). \tag{6.1}$$

공정상태 $V_{A(k)}$와 $E_{A(k)}$를 사용하면 수정시점간의 전이행렬(transition probability matrix)은 다음과 같이 표현된다.

$$P_T = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 & P_{14} & 0 \\ 0 & 0 & P_{23} & 0 & P_{25} \\ 0 & 0 & P_{33} & 0 & P_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

단, 행렬 $P_{ij}(i,j=1,2,\cdots,5)$는 $V_{A(k)}=i$에서 $V_{A(k+1)}=j$로 전이되는 행렬 P_T의 부행렬(submatrix)로서 지수가중이동평균 통계량의 전이확률로 표현되어있다. 즉,

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} t_{ij}(x_1|x_1) & \cdots & t_{ij}(x_h|x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{ij}(x_1|x_h) & \cdots & t_{ij}(x_h|x_h) \end{bmatrix}$$

다음은 전이확률 $t_{ij}(x_l|x_k)$를 계산하는 과정에 대해 알아보자. 행렬 $\boldsymbol{F}_i$는 차수가 $h\times h$이고 (k,l)번째 요소가 $P(V_{A(m)}=i, E_{A(m+1)}\in I_l \,|E_{A(m)}=x_k)$인 조치시점간의 전이행렬을 나타낸다고 하면 전이확률 $t_{ij}(x_l|x_k)$은 다음 관계를 만족한다.

$$\begin{aligned} t_{ij}(x_l|x_k) &= P(E_{A(m+1)}\in I_l \,|V_{A(m)}=i, E_{A(m)}=x_k)\cdot P(V_{A(m+1)}=j\,|E_{A(m+1)}=x_l) \\ &= \frac{P(V_{A(m)}=i, E_{A(m+1)}\in I_l\,|E_{A(m)}=x_k)}{P(V_{A(m)}=i\,|E_{A(m)}=x_k)}\cdot P(V_{A(m+1)}=j\,|E_{A(m+1)}=x_l) \\ &= \frac{\mathbf{1}_k\,\boldsymbol{F}_i\,\mathbf{1}_l}{\mathbf{1}_k\,\boldsymbol{F}_i\,\mathbf{1}}\cdot\mathbf{1}_l\,\boldsymbol{F}_j\,\mathbf{1}\,. \end{aligned} \tag{6.3}$$

단, $\mathbf{1}_k$는 k번째 요소는 1 나머지는 모두 0인 벡터를 나타내고, $\mathbf{1}$은 모든 요소가 1 인 벡터를 나타낸다.

6.2 관측시점의 공정상태

조치시점간의 전이행렬 $\boldsymbol{F}_i$ 는 관측시점간의 전이행렬을 사용하여 표현할 수 있으며 관측시점간의 전이행렬도 가우시안 구적법을 사용하여 표현한다. 관측시점간의 전이행렬은 Period별로 생각하면 다음과 같다.

6.2.1 Period 1

$q_1(x_l|x_k)$을 Period 1에서 $E_t=x_k$에서 $E_{t+1}=x_l$가 되는 전이확률(transition probability)이라

하면 두 연속된 관측시점에서의 전이행렬은 다음과 같이 표현된다. ($q_1(x_l|x_k)$의 계산은 부록 A.2참조)

$$Q_1 = \begin{bmatrix} q_1(x_1|x_1) & \cdots & q_1(x_h|x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_1(x_1|x_h) & \cdots & q_1(x_h|x_h) \end{bmatrix}$$

여기서 가운데 열, 즉 (h'/2)번째 열은 $E_{t+1}=0$인 경우와 오경보의 경우를 포함하는 확률을 나타내고 있다. 하나의 수정구간은 n번의 관측구간에 해당하므로 다음관계식을 얻는다.

$$\boldsymbol{F}_1 = \{(1-p)\ \boldsymbol{Q}_1\}^n . \tag{6.4}$$

6.2.2 Period 2

$q_{2t}(x_l|x_k)$을 Period 2에서 $E_t = x_k$에서 $E_{t+1} = x_l$가 되는 전이확률이라 하면(단 t는 이상원인이 발생한 후부터의 관측시간) 두 연속된 관측시점에서의 전이행렬은 다음과 같이 표현된다.
($q_{2t}(x_l|x_k)$의 계산은 부록 A.2참조)

$$Q_{2t} = \begin{bmatrix} q_{2t}(x_1|x_1) & \cdots & q_{2t}(x_h|x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{2t}(x_1|x_h) & \cdots & q_{2t}(x_h|x_h) \end{bmatrix}$$

U_0'은 period 2에서 이상원인이 발생한 시점이므로 $U_0' = r$인 결합(joiont) 전이행렬은

$$\boldsymbol{F}_2(r) = p\{(1-p)\ \boldsymbol{Q}_1\}^{r-1}\ \boldsymbol{Q}_{21}\ \boldsymbol{Q}_{22} \cdots\ \boldsymbol{Q}_{2,n-r}\ \boldsymbol{Q}_{2,n-r+1}$$

이 된다. τ를 period 4에서 이상원인 발생후 이상신호를 주는 시점이라하면 $U_0' = r$과 τ와의 결합전이행렬은

$$\boldsymbol{F}_4(r,\tau) = p\{(1-p)\ \boldsymbol{Q}_1\}^{r-1}\ \boldsymbol{Q}_{21}\ \boldsymbol{Q}_{22} \cdots\ \boldsymbol{Q}_{2,\tau-r}\ (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}_{2,\tau-r+1}),\quad 1 \le r \le \tau \le n$$

이 되어 $\boldsymbol{F}_2$ 와 $\boldsymbol{F}_4$는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\boldsymbol{F}_2 = \sum_{r=1}^{n} \boldsymbol{F}_2(r) . \tag{6.5}$$

$$\boldsymbol{F}_4 = \sum_{\tau=1}^{n} \sum_{r=1}^{\tau} \boldsymbol{F}_4(r,\tau) . \tag{6.6}$$

6.2.3 Period 3

$q_3(x_l|x_k)$을 Period 3에서 $E_t = x_k$에서 $E_{t+1} = x_l$가 되는 전이확률이라 하면 두 연속된 관측시점에서의 전이행렬은 다음과 같이 표현된다. ($q_3(x_l|x_k)$의 계산은 부록 A.2참조)

$$\boldsymbol{Q}_3 = \begin{bmatrix} q_3(x_1|x_1) & \cdots & q_3(x_h|x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_3(x_1|x_h) & \cdots & q_3(x_h|x_h) \end{bmatrix}$$

하나의 수정구간은 n번의 관측구간에 해당하므로 다음 관계식을 얻는다.

$$\boldsymbol{F}_3 = \boldsymbol{Q}_3^{\,n}. \tag{6.7}$$

또한 τ와의 결합전이행렬은

$$\boldsymbol{F}_5(\tau) = \boldsymbol{Q}_3^{\,\tau-1}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}_3)$$

이 되어

$$\boldsymbol{F}_5 = \sum_{\tau=1}^{n} \boldsymbol{F}_5(\tau) \tag{6.8}$$

이 된다.

7. 공정특성치의 계산

수정시점 $A(k)$에서 공정상태가 $V_{A(k)} = i$, $E_{A(k)} = x_k$일 때 이상신호를 줄 때까지 나타나는 관리절차의 특성을 다음과 같이 정의한다.

$S_i(x_k)$=이상신호까지의 평균제곱편차합(expected sum of squared deviations: ESS).
$L_i(x_k)$=이상신호까지의 평균구간길이(expected interval length; EIL).
$A_i(x_k)$=이상신호까지의 평균수정수(expected number of adjustments; ENA).
$F_i(x_k)$=이상신호까지의 평균오경보수(expected number of false alarms; ENF).

수정시점 $A(k)$에서 공정상태가 $V_{A(k)} = i$, $E_{A(k)} = u$일 때 다음 조치시점 $A(k+1)$까지 나타나는 관리절차의 특성은 다음과 같이 정의한다.

$d_i(x_k)$ = 다음 조치까지의 평균제곱편차합.

$l_i(x_k)$ = 다음 조치까지의 평균구간길이.

$a_i(x_k)$ = 다음 조치까지의 평균수정수.

$f_i(x_k)$ = 다음 조치까지의 평균오경보수.

위의 네가지 다음조치까지의 평균에 대한 계산은 부록 A.3에 나타나있다.

위에서 정의한 공정의 특성치를 공정상태 $V_t\ \{=1,2,..,5\}$ 와 $E_t\ \{=x_1,x_2,\cdots,x_h\}$ 에 따른 벡터의 형태로 표현하면

$$\boldsymbol{S}'=(S_1(x_1),\cdots,S_1(x_h),\cdots,S_5(x_1),\cdots,S_5(x_h)),$$

$$\boldsymbol{L}'=(L_1(x_1),\cdots,L_1(x_h),\cdots,L_5(x_1),\cdots,S_5(x_h)),$$

$$\boldsymbol{A}'=(A_1(x_1),\cdots,A_1(x_h),\cdots,A_5(x_1),\cdots,A_5(x_h)),$$

$$\boldsymbol{F}'=(F_1(x_1),\cdots,F_1(x_h),\cdots,F_5(x_1),\cdots,F_5(x_h)),$$

$$\boldsymbol{d}'=(d_1(x_1),\cdots,d_1(x_h),\cdots,d_5(x_1),\cdots,d_5(x_h)),$$

$$\boldsymbol{l}'=(l_1(x_1),\cdots,l_1(x_h),\cdots,l_5(x_1),\cdots,l_5(x_h)),$$

$$\boldsymbol{a}'=(a_1(x_1),\cdots,a_1(x_h),\cdots,a_5(x_1),\cdots,a_5(x_h)),$$

$$\boldsymbol{f}'=(f_1(x_1),\cdots,f_1(x_h),\cdots,f_5(x_1),\cdots,f_5(x_h))$$

로 나타낼 수 있고 다음 관계를 만족함을 알 수 있다.

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{d}+\boldsymbol{P}_T\boldsymbol{S}\ .$$

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{l}+\boldsymbol{P}_T\boldsymbol{L}\ .$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{P}_T\boldsymbol{A}\ .$$

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{f}+\boldsymbol{P}_T\boldsymbol{F}\ .$$

따라서 단위시간당 평균비용의 계산에 필요한 공정특성치는 다음과 같이 얻어진다.

$$E(S)=\boldsymbol{s}'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_T)^{-1}\boldsymbol{d}\ .$$

$$E(L)=\boldsymbol{s}'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_T)^{-1}\boldsymbol{l}\ .$$

$$E(N_a)=\boldsymbol{s}'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_T)^{-1}\boldsymbol{a}\ .$$

$$E(N_f)=\boldsymbol{s}'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_T)^{-1}\boldsymbol{f}\ .$$

단, $\boldsymbol{s}$ 는 시작상태(starting state) 벡터로서 (h′/2)번째 요소만 1 이고 나머지는 모두 0 인 벡터를 나타낸다.

9. 결론

이 논문에서는 통계적 공정관리와 공학적 공정관리를 동시에 적용하는 통합공정관리를 제안하고 그 절차의 특성을 구하는 방법에 대해 연구하였다. 공정잡음모형은 IMA(0,1,1)모형을 가정하였으며 이상원인에 의한 영향은 공정수준의 변화를 가정하였다. 통계적 공정관리에서는 예측오차에 대해 지수가중이동평균관리도를 적용하고 공학적 공정관리에서는 정해진 수정간격에서 예측편차만큼 공정수준을 수정하는 반복수정절차를 사용하였다.

공정관리절차의 효율은 단위시간당 평균비용을 정의하여 나타내었고 이는 비용모수와 공정특성치에 의해 표현되었다. 공정특성치는 관리절차를 Markov 연쇄로 표현한 다음 Markov 연쇄의 특성을 이용하여 계산될 수 있다. 공정의 상태는 수정시점과 관측시점에서 각각 정의하였으며 지수가중이동평균관리도의 통계량은 가우시안 구적점과 가중치를 이용하여 이산화되어 근사적으로 표현되었다. 전이확률은 공정의 주기내에서 Period별로 계산할 수 있다.

앞으로의 연구방향으로는 반복수정절차 대신 경계선수정절차를 고려한 합동공정관리를 생각할 수 있으며, 이 방법은 수정활동에 비용이 수반되는 경우에 유용한 공정관리절차가 될 수 있다.

참고문헌

[1] Abraham, B. and Box, G. E. P. (1979), Sampling Interval and Feedback Control, Technometrics, Vol. 21, No. 1, pp. 1-8.

[2] Box, G. E. P. (1991a), Feedback Control by Manual Adjustment, Quality Engineering, Vol. 4, pp. 143-151.

[3] Box, G. E. P. (1991b), Bounded Adjustment Charts, Quality Engineering, Vol. 4, pp. 331-338.

[4] Box, G. E. P. (1993), Process Adjustment and Quality Control, Total Quality Management, Vol. 4, pp. 215-227.

[5] Box, G. E. P. and Jenkins, G. M. (1963), Further Contributions to Adaptive Quality Control : Simultaneous Estimation of Dynamics : Non-Zero Costs, Proceedings of the International Statistical Institute, pp. 943-974.

[6] Box, G. E. P. and Kramer, T. (1992), Statistical Process Control and Feedback Adjustment-A Discussion, Technometrics, Vol. 34, No. 3, pp. 251-285.

[7] Box, G. E. P. and Luceno, A. (1994), Selection of Sampling Interval and Action Limit for Discrete Feedback Adjustment, Technometrics, Vol. 36, No. 4, pp. 369-378.

[8] Box, G. E. P. and Luceno, A. (1995), Discrete Proportional-Integral Control with Constrained Adjustment, The Statistician, Vol. 44, pp. 479-495.

[9] Box, G. E. P. and Luceno, A. (1997a), Discrete Proportional-Integral Adjustment

and Statistical Process Control, Journal of Quality Technology, Vol. 29, No. 3, pp. 248-260.

[10] Box, G. E. P. and Luceno, A. (1997b), Statistical Control by Monitoring and Feedback Adjustment, John Wiley and Sons, New York, NY.

[11] Montgomery, D.C.(1999) A Perspective on Models and the Quality Sciences : Some Challenges and Future Directions, ASQ Statistics Division Newsletter, Vol. 18, No. 1, pp 8-13.

[12] Montgomery, D.C., Keats, J.B., Runger, G.C. and Messina, W.S. (1994), Integrating Statistical Process Control and Engineering Process Control, Journal of Quality Technology, Vol. 26, pp 79-87.

[13] Nembhard, H.B. and Mastrangelo, C.M.(1998), Integrated Process Controlfor Startup Operations, Journal of Quality Technology, Vol. 30, No. 3, pp201-211.

[14] Janakiram, M. and Keats, J. B. (1998), Combining SPC and EPC in a Hybrid Industry, Journal of Quality Technology, Vol. 30, pp. 189-200.

[15] Vander Wiel, S. A. (1996), Monitoring Processes That Wander Using Integrated Moving Average Models, Technometrics, Vol. 38, pp. 139-151.

[16] Vander Wiel, S. A., Tucker, W. T., Faltin, F. W., and Doganaksoy, N. (1992), Algorithmic Statistical Process Control : Concepts and an Application, Technometrics, Vol. 34, No. 3, pp. 286-297.

부록

A.1. 식(4.2)($t' \geq U_0'$인 경우)의 증명

식(3.1)로부터

$$\hat{O}_{t'} = \lambda(O_{t'-1} + \theta O_{t'-2} + \cdots + \theta^{t'-U_o'-1} O_{U_0'} + \cdots + \theta^{t'-2} O_1) \tag{A.1}$$

을 얻고, $\eta_{t'}$을 공정수준에 변화가 없는 순수한 IMA(0,1,1) 모형이라 하면 다음 식이 성립한다.

$$O_{t'} = \begin{cases} \eta_{t'}, & t' < U_o' \\ \eta_{t'} + \delta\sigma_a, & t' \geq U_o' \end{cases} \tag{A.2}$$

식(A.2)을 식(A.1)에 대입하면

$$\begin{aligned} \hat{O}_{t'} &= \lambda(\eta_{t'-1} + \theta\eta_{t'-2} + \cdots + \theta^{t'-2}\eta_1) \\ &\quad + \delta\sigma_a(\lambda + \lambda\theta + \cdots + \lambda\theta^{t'-U_o'-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{t'-1} a_i + \delta\sigma_a(\lambda + \lambda\theta + \cdots + \lambda\theta^{t'-U_o'-1}) \end{aligned}$$

따라서 예측오차는 식(3.6)으로 부터

$$\begin{aligned} e_t &= O_t - \hat{O}_t \\ &= a_{t'} + \delta\sigma_a\theta^{t'-U_0'} \end{aligned}$$

이다.

A.2. 각 period에서 관측시점간 전이확률 $q_i(x_l|x_k)$의 계산.

A.2.1. Period 1

$$\begin{aligned} q_1(x_l|x_k) &= \Pr(E_{t+1}=x_l|E_t=x_k) \\ &= \Pr(ra_t+(1-r)x_k \in I_l) \\ &= \Pr\left(\frac{-c+\sum_{j=1}^{l-1}v_j-(1-r)x_k}{r\sigma_a} < \frac{a_t}{\sigma_a} < \frac{-c+\sum_{j=1}^{l}v_j-(1-r)x_k}{r\sigma_a}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{-c+\sum_{j=1}^{l}v_j-(1-r)x_k}{r\sigma_a}\right) - \Phi\left(\frac{-c+\sum_{j=1}^{l-1}v_j-(1-r)x_k}{r\sigma_a}\right). \end{aligned}$$

A2.2. Period 2

$$\begin{aligned} q_{2t}(x_l|x_k) &= \Pr(E_{t+1}=x_l|E_t=x_k) \\ &= \Pr(r\{a_t+\delta\sigma_a\theta^t\}+(1-r)x_k \in I_l) \\ &= \Phi\left(\frac{-c+\sum_{j=1}^{l}v_j-(1-r)x_k}{r\sigma_a}-\delta\theta^t\right) - \Phi\left(\frac{-c+\sum_{j=1}^{l}v_j-(1-r)x_k}{r\sigma_a}-\delta\theta^t\right). \end{aligned}$$

A.2.3. Period 3

$$\begin{aligned} q_3(x_l|x_k) &= \Pr(rb_t+(1-r)x_k \in I_l) \\ &= \Phi\left(\frac{-c+\sum_{j=1}^{l}v_j-(1-r)x_k}{r\sigma_b}\right) - \Phi\left(\frac{-c+\sum_{j=1}^{l-1}v_j-(1-r)x_k}{r\sigma_b}\right). \end{aligned}$$

A.3. 다음 조치까지의 공정특성의 평균에 대한 증명.

수정시점부터 n시점까지의 평균제곱편차는 이상원인이 발생하지 않으면 $(n+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2)\sigma_a^2$ 이고 만일 이상원인이 $r(\leq n)$시점에서 발생하면 $(n+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2+\delta^2(n-r+1))\sigma_a^2$ 이 된다. 또한 다음 조치까지의 구간길이는 $i=2$이면 $\frac{\mathbf{1}_k'\,\boldsymbol{F}_2(r)\,\mathbf{1}}{\mathbf{1}_k'\,\boldsymbol{F}_2\,\mathbf{1}}$, $i=4$이면 $\frac{\mathbf{1}_k'\,\boldsymbol{F}_4(r,\tau)\,\mathbf{1}}{\mathbf{1}_k'\,\boldsymbol{F}_4\,\mathbf{1}}$, $i=5$이면 $\frac{\mathbf{1}_k'\,\boldsymbol{F}_5(r)\,\mathbf{1}}{\mathbf{1}_k'\,\boldsymbol{F}_5\,\mathbf{1}}$ 이 된다. 따

라서 다음 결과를 얻는다.

$$d_i(x_k)=\begin{cases}(n+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2)\sigma_a^2, & i=1\\ \sum_{r=1}^{n}(n+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2+\delta^2(n-r+1))\sigma_a^2\cdot\frac{\mathbf{1}_k'\,\boldsymbol{F}_2(r)\,\mathbf{1}}{\mathbf{1}_k'\,\boldsymbol{F}_2\,\mathbf{1}}, & i=2\\ (n+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2)\sigma_b^2, & i=3\\ \sum_{\tau=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}(\tau+\frac{\tau(\tau-1)}{2}\lambda^2+\delta^2(\tau-r+1))\sigma_a^2\cdot\frac{\mathbf{1}_k'\,\boldsymbol{F}_4(r,\tau)\,\mathbf{1}}{\mathbf{1}_k'\,\boldsymbol{F}_4\,\mathbf{1}}, & i=4\\ \sum_{\tau=1}^{n}(\tau+\frac{\tau(\tau-1)}{2}\lambda^2)\sigma_b^2\cdot\frac{\mathbf{1}_k'\,\boldsymbol{F}_5(\tau)\,\mathbf{1}}{\mathbf{1}_k'\,\boldsymbol{F}_5\,\mathbf{1}}, & i=5.\end{cases}$$

$$l_i(x_k)=\begin{cases}n, & i=1,2,3\\ \sum_{\tau=1}^{n}\sum_{r=1}^{\tau}\tau\frac{\mathbf{1}_k'\,\boldsymbol{F}_4(r,\tau)\,\mathbf{1}}{\mathbf{1}_k'\,\boldsymbol{F}_4\,\mathbf{1}}, & i=4\\ \sum_{\tau=1}^{n}\tau\frac{\mathbf{1}_k'\,\boldsymbol{F}_5(\tau)\,\mathbf{1}}{\mathbf{1}_k'\,\boldsymbol{F}_5\,\mathbf{1}}, & i=5.\end{cases}$$

$$a_i(x_k)=\begin{cases}1, & i=1,2,3\\ 0, & i=4,5.\end{cases}$$

오경보는 이상원인이 발생하기 전에만 발생할 수 있으므로 공정이 관리상태일 때의 전이행렬만을 고려하여 구할 수 있다. $q_0(x_l|x_k)$을 관리상태에서 $E_t=x_k$에서 $E_{t+1}=x_l$가 되는 전이확률(transition probability)이라 하면 ($\{E_t=x_{h'}\}$은 지수가중이동평균 통계량이 관리한계 밖에 있어 오경보를 유발하는 상태를 의미한다) 관리상태의 전이행렬은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{Q}_0=\begin{bmatrix}q_0(x_1|x_1) & \cdots & q_0(x_h|x_1) & q_0(x_{h'}|x_1)\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ q_0(x_1|x_h) & \cdots & q_0(x_h|x_h) & q_0(x_{h'}|x_h)\\ q_0(x_1|x_{h'}) & \cdots & q_0(x_h|x_{h'}) & q_0(x_{h'}|x_{h'})\end{bmatrix}$$

이 행렬은 행렬 $\boldsymbol{Q}_1$과 유사하나 차수가 $h'\times h'$이고 오경보상태가 추가된 점이 다르다. 또한 구간길이 n내에서 이상원인이 발생한다는 조건하에서 $r(\le n)$번째 이상원인이 발생할 확률은 $\frac{p(1-p)^{r-1}}{1-(1-p)^n}$이므로 다음 결과를 얻는다.

$$f_i(x_k)=\begin{cases}\mathbf{1}_k'\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{Q}_0^{\,k}\,\mathbf{1}_{h'}, & i=1\\ \mathbf{1}_k'\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{r-1}\boldsymbol{Q}_0^{\,k}\,\mathbf{1}_{h'}\frac{p(1-p)^{r-1}}{1-(1-p)^n}, & i=2,4\\ 0, & i=3,5.\end{cases}$$