Comm. Korean Math. Soc. **15** (2000), No. 4, pp. 669–674

다면체에 대하여 오일러 수만 중요한가?

박종률, 김선부, 김동수, 조규인

요약문. 다면체에 대한 오일러 수의 개념은 잘 알려져 있다. 이 수는 위상 불변량이기 때문에 중요하다. 본 논문에서는 다면체의 꼭지점, 모서리, 면의 개수로 정의된 함수 중에서 본질적으로 오일러 수만이 위상 불변량임을 증명한다.

다면체 S의 꼭지점, 모서리, 면의 개수를 각각 v, e, f라고 하자. 이 때, S의 오일러 수 $\chi(S)$는 $v-e+f$로 정의되는 수이다. 다면체에 관한 오일러 정리에 의하면 구면과 위상동형인(즉, 연결상태가 같은) 임의의 다면체의 오일러 수는 2이다.[1] 일반적으로 이 오일러 수 $\chi(S)$는 위상 불변량이다. 즉, 두 개의 다면체 S_1, S_2 가 위상동형이면 그것들의 오일러 수는 서로 같다.[2] 구면과 위상동형인 다면체의 오일러 수는 2이고 토러스와 위상동형인 다면체의 오일러 수는 0이므로, 이 성질에 의해 이 두 종류의 곡면은 연결 상태가 서로 다름을 알 수 있다.

이 논문에서는 다면체 S의 꼭지점, 모서리, 면의 개수인 v, e, f에 의해 정의된 어떤 함수 $g(S) = g(v,e,f)$가 위상 불변량이 되는 경우에 대하여 조사하고자 한다. 만일, $g(S)$가 $\chi(S)+1$, $\chi(S)^2+\chi(S)+7$처럼 $\chi(S)$의 함수인 경우에는 $\chi(S)$가 위상 불변량이므로 $g(S)$도 당연히 위상 불변량임을 알 수 있다. 역으로, 우리는 다음 정리를 증명한다.

Received July 20, 2000. Revised September 25, 2000.

2000 Mathematics Subject Classification: 52B05, 52C10.

Key words and phrases: 다면체, 오일러 수, 위상 불변량.

[1]오일러 정리의 여러가지 증명 방법과 반박에 대해서는 참고문헌 [1]을, 여러가지 증명방법에 대해서는 참고문헌 [2], [3], [4], [6]을 참고하면 된다.

[2]참고 문헌 [5], pp. 29~32.

정리. 다면체 S의 꼭지점, 모서리, 면의 개수 v, e, f에 의해 정의된 함수 $g(S) = g(v,e,f)$가 위상 불변량이면 $g(S)$는 $\chi(S)$의 함수이다. 즉, $g(v,e,f)$는 어떤 함수 $\phi(t)$에 대하여 $\phi(v-e+f)$가 된다.

위의 정리에 의하면 다면체 S의 꼭지점, 모서리, 면의 개수인 v, e, f 에 의해 정의된 어떤 함수 $g(S) = g(v,e,f)$가 위상 불변량이 되는 경우는 본질적으로 오일러 수 $\chi(S) = v - e + f$ 밖에 없다. 그러므로 다면체에 대하여 오일러 수만이 중요한 위상적인 양이라고 할 수 있다.

위의 정리를 증명하기 위하여 함수 g의 정의역에 대하여 알아보자. g의 정의역은 다음 집합 $\mathcal{D}$임을 알 수 있다.

$$\mathcal{D} = \{(v,e,f) \in \mathbb{R}^3 \mid \text{어떤 다면체 } S\text{에 대하여 } v,e,f \text{ 는 각 각 } S\text{의 꼭지점, 모서리, 면의 개수}\}.$$

이제 정의역 $\mathcal{D}$와 함수 $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$의 성질을 살펴보면 다음과 같다.

보조정리 1. 정의역 $\mathcal{D}$는 다음의 성질을 만족한다.
(1) $(v,e,f) \in \mathcal{D}$이면 $(v+1, e+1, f) \in \mathcal{D}$ 이다.
(2) $(v,e,f) \in \mathcal{D}$ 이면 $(v+1, e+2, f+1) \in \mathcal{D}$ 이다.

증명. 꼭지점, 모서리, 면의 개수가 각 각 v, e, f인 다면체 S가 존재한다. S의 한 면을 선택하면 그 면은 볼록 n-다각형 $P_1P_2\cdots P_n (n \geq 3)$이다. 여기서 P_3은 직선 P_1P_2 상에 놓여 있지 않다고 가정할 수 있다. 모서리 P_1P_2의 내부점 P에 대하여 P를 또 하나의 꼭지점으로 추가한 다면체를 S'이라고 하면 S'은 S와 위상동형이고 S'의 꼭지점, 모서리, 면의 개수는 각각 $v+1, e+1, f$이다. 또한, 꼭지점 P와 모서리 PP_3을 추가한 다면체를 S''이라고 하면 S''과 S는 위상 동형이고 S''의 꼭지점, 모서리, 면의 개수는 각각 $v+1$, $e+2$, $f+1$이다. □

보조정리 2. 함수 $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$가 위상 불변량이면 g는 다음 성질을 만족한다.

(1) $g(v, e, f) = g(v+1, e+1, f)$.

(2) $g(v, e, f) = g(v+1, e+2, f+1)$.

증명. 위의 보조정리 1의 증명과정에 나오는 다면체 S는 다면체 S' 뿐만 아니라 다면체 S''과도 위상동형이므로 가정에 의해 정리가 증명된다. □

간단한 산술에 의해 다음 보조 정리가 증명된다.

보조정리 3. $x - y + z = 0$이면 다음이 성립하는 두 수 a, b가 유일하게 존재한다.

$$(x, y, z) = a(1, 1, 0) + b(1, 2, 1).$$

증명. $x - y + z = 0$이므로 $x - z = y - 2z$이고 $z = y - x$이다. $a = x - z$, $b = z$ 라고 하면 등식이 성립한다. □

위의 보조정리에서 a는 $x - z$ 또는 $y - 2z$이고 b는 z 또는 $y - x$이다. 따라서 x, y, z가 정수이면 a, b도 정수임을 알 수 있다.

어떤 함수 $g(v, e, f)$가 함수 $\chi(v, e, f) = v - e + f$의 함수가 될 조건을 살펴 보면 다음과 같다.

보조정리 4. 정의역 $\mathcal{D}$에서 정의된 함수 $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$에 대하여 다음 두 가지 성질은 서로 동치이다.

(1) 어떤 함수 $\phi(t)$에 대하여 $g(v, e, f) = \phi(v - e + f)$이다.

(2) 임의의 (v_1, e_1, f_1), $(v_2, e_2, f_2) \in \mathcal{D}$에 대하여 $v_1 - e_1 + f_1 = v_2 - e_2 + f_2$이면 $g(v_1, e_1, f_1) = g(v_2, e_2, f_2)$가 성립한다.

증명. (1)이 성립하면 당연히 (2)도 성립한다. 역으로 (2)가 성립하면 (1)도 성립함을 보이자. 집합 I를 다음과 같이 정의하자.

$$I = \{v - e + f \mid (v, e, f) \in \mathcal{D}\}.$$

임의의 $t \in I$ 에 대하여 $t = v - e + f$인 $(v, e, f) \in \mathcal{D}$가 존재하므로 $g(v, e, f)$가 정의된다. $t = v_1 - e_1 + f_1$인 다른 $(v_1, e_1, f_1) \in \mathcal{D}$에 대하여 (2)에 의해 $g(v_1, e_1, f_1) = g(v, e, f)$가 성립한다. 따라서, $v - e + f = t$인 임의의 $(v, e, f) \in \mathcal{D}$에 대하여 $\phi(t) = g(v, e, f)$라고 정의하면 $\phi : I \to \mathbb{R}$은 잘 정의된 함수이다. 또한 ϕ 의 정의에 의해 $g(v, e, f) = \phi(v - e + f)$가 성립한다. □

이제 정리를 증명하자. $g(S) = g(v, e, f)$가 위상 불변량이라고 하면 함수 $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$는 보조정리 2의 2가지 성질 (1), (2)를 만족한다. 임의의 두 점 $(v_1, e_1, f_1), (v_2, e_2, f_2) \in \mathcal{D}$에 대하여 $v_1 - e_1 + f_1 = v_2 - e_2 + f_2$일 때 $g(v_1, e_1, f_1) = g(v_2, e_2, f_2)$임을 보이면 충분하다. 왜냐하면 보조정리 4에 의해 정리가 증명되기 때문이다.

$x = v_1 - v_2,\ y = e_1 - e_2,\ z = f_1 - f_2$라고 하면 $x,\ y,\ z$는 정수이고 $x - y + z = 0$이므로 보조정리 3에 의해 다음 등식이 성립하는 정수 a, b가 존재한다.

$$(v_1, e_1, f_1) - (v_2, e_2, f_2) = (x, y, z) = a(1, 1, 0) + b(1, 2, 1).$$

a, b의 부호에 의거하여 다음 네가지 경우로 나누어서 증명한다.

(1) $a,\ b \geq 0$인 경우 :

$(v_1, e_1, f_1) = (v_2, e_2, f_2) + a(1, 1, 0) + b(1, 2, 1)$이고 $a,\ b$는 0 보다 크거나 같은 정수이므로 보조정리 1, 보조정리 2를 반복해서 사용하면 다음 등식이 성

립함을 알 수있다.

$$\begin{aligned} g(v_2,e_2,f_2) &= g(v_2+1,e_2+1,f_2)=\cdots=g(v_2+a,,e_2+a,f_2) \\ &= g(v_2+a+1,e_2+a+2,f_2+1)=\cdots \\ &= g(v_2+a+b,e_2+a+2b,f_2+b). \end{aligned}$$

그러므로 $g(v_1,e_1,f_1)=g(v_2,e_2,f_2)$이 성립된다.

(2) $a<0$, $b\geq 0$인 경우 :

$c=-a$ 라고 하면 b, c는 0 보다 크거나 같은 정수이며 $(v_1,e_1,f_1)+c(1,1,0)=(v_2,e_2,f_2)+b(1,2,1)$이 성립한다. 따라서 보조정리 1, 보조정리 2를 반복해서 사용하면 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} g(v_1,e_1,f_1) &= g(v_1+1,e_1+1,f_1)=\cdots \\ &= g(v_1+c,e_1+c,f_1), \\ g(v_2,e_2,f_2) &= g(v_2+1,e_2+2,f_2+1)=\cdots \\ &= g(v_2+b,e_2+2b,f_2+b). \end{aligned}$$

그러므로 $g(v_1,e_1,f_1)=g(v_2,e_2,f_2)$이다.

(3) $a\geq 0$, $b<0$인 경우 :

$c=-b$ 라고 하면 a, c는 0 보다 크거나 같은 정수이며 다음 등식이 성립한다.

$$(v_1,e_1,f_1)+c(1,2,1)=(v_2,e_2,f_2)+a(1,1,0).$$

그러므로 (2)와 같은 방법으로 보조정리 1, 2에 의해 $g(v_1,e_1,f_1)=g(v_2,e_2,f_2)$가 성립함을 알 수 있다.

(4) a, $b<0$인 경우 :

$c=-a, d=-b$ 라고 하면 c,d 는 자연수이고 다음 등식이 성립한다.

$$(v_1,e_1,f_1)+c(1,1,0)+d(1,2,1)=(v_2,e_2,f_2).$$

그러므로 (1)과 같은 방법으로 보조정리 1, 2에 의해 $g(v_1, e_1, f_1) = g(v_2, e_2, f_2)$가 성립함을 알 수 있다.

따라서 보조정리 4에 의해 정리가 증명된다. □

참고문헌

[1] 라카토스(우정호 역), 수학적 발견의 논리, 민음사, 대우 학술 총서 번역(37), 1990.

[2] 박경하, 이성원, *Illustrating mathematical connections : A Geometric Proof of Euler's theorem*, 수학사랑(봄호), 1997, 44-47.

[3] P. Hilton and J. Pedersen, *The Euler Characteristic and Polya's Dream*, American Math. Monthly, 103 (1996), 121-131.

[4] H. hopf, *Differentical Geometry in the large*, Lecture Notes in Mathematics(1000), Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[5] W. S. Massey, *Algebraic Topology : An Introduction*, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[6] G. Polya, *Mathematical Discovery*, John Wiley & Sons, 1981, 143-168.

박종률
전남대학교 사범대학 수학교육과

김선부, 김동수
전남대학교 자연과학대학 수학과

조규인
광주 고려중학교