자유 표면이 존재하는 유체 유동 해석을 위한 VOF 방법 기반의 새로운 수치 기법 (I)

- 새로운 자유 표면 추적 알고리듬 및 검증 -

김민수*. 신수호*. 이우일**

(2000 년 4 월 4 일 접수)

A New VOF-based Numerical Scheme for the Simulation of Fluid Flow with Free Surface (I)

- New Free Surface Tracking Algorithm and Its Verification -

Min Soo Kim, Suho Shin and Woo Il Lee

Key Words : Finite Element Method (유한 요소 법), Free Surface (자유 표면), VOF Method (VOF 방법), Orientation Vector (오리엔테이션 벡터), Baby-Cell (베이비-셀), Fixed Grid System (고정 격자계), Fractional Step Method (프랙셔널 스텝 방법)

Abstract

Numerical simulation of fluid flow with moving free surface has been carried out. For the free surface flow, a VOF (Volume of Fluid)-based algorithm utilizing a fixed grid system has been investigated. In order to reduce numerical smearing at the free surface represented on a fixed grid system, a new free surface tracking algorithm based on the donor-acceptor scheme has been presented. Novel features of the proposed algorithm are characterized as two numerical tools; the orientation vector to represent the free surface orientation in each cell and the baby-cell to determine the fluid volume flux at each cell boundary. The proposed algorithm can be easily implemented in any irregular non-uniform grid systems that are usual in finite element method (FEM). Moreover, the proposed algorithm can be extended and applied to the 3-D free surface flow problem without additional efforts. For computation of unsteady incompressible flow, a finite element approximation based on the explicit fractional step method has been adopted. In addition, the SUPG (streamline upwind/Petrov-Galerkin) method has been implemented to deal with convection dominated flows. Combination of the proposed free surface tracking scheme and the explicit fractional step formulation resulted in an efficient solution algorithm. Validity of the present solution algorithm was demonstrated from its application to the broken dam and the solitary wave propagation problems.

기호설명

A_j	:	j-면의 면적
a_j	:	총 표면적에 대한 j-면의 면적 비
b_i	:	속도 경계 조건
$\mathbf{C(u)}$	:	대류 행렬
$\mathbf{F}$	:	외력 행렬
F	:	셀의 유체 체적 분율
f_{Γ_j}	:	j-면에서의 웻-아웃 프랙션
$\mathbf{H}$	:	압력 구배 행렬
$\mathbf{h}_e$	:	요소 압력 구배 행렬
$\mathbf{K}$	:	확산 행렬
$\mathbf{M}$	:	질량 행렬
$\mathbf{N}$	:	외부로 향하는 단위 수직 벡터
P	:	압력
$\mathbf{r}$	:	오리엔테이션 벡터
S_i	:	외력 벡터

* 삼성전자 중앙연구소 광메카 Lab.
** 회원, 서울대학교 기계공학과
E-mail : wilee@snu.ac.kr
TEL : (02)880-7116 FAX : (02)886-0631

t : 시간
Δt : 시간 증분
t_i : 트랙션 경계 조건
$\mathbf{u}$: 속도 벡터
u, v, w : 속도 성분
V_i : i-셀의 체적

그리스문자

Γ_j : j-번째 셀 경계
$\bar{\nu}$: 동점성 계수
$\bar{\rho}$: 밀도
σ_{ij} : 점성 응력 텐서

하첨자

e : 요소
i : 셀 번호
j : 면 번호

1. 서 론

자유 표면이 존재하는 유체 유동의 수치 해석에서는 두 가지 문제를 해결해야 한다. 하나는 현재 시각에서 자유 표면의 위치를 확인하는 것이고, 다른 하나는 유동에 따라 다음 시각에서 자유 표면을 갱신하는 것이다(Fig. 1). 시간에 따라 연속적으로 움직이는 자유 표면을 추적하기 위해서 많은 방법들이 제안되었으며, 그러한 방법들은 크게 두 개의 범주, 즉, 이동 격자 방법과 고정 격자 방법으로 분류된다.[1] 이동 격자 방법 또는 Lagrangian 방법[2~5]에서는 격자점이 유체 영역의 내부에 존재하고 유체와 함께 이동한다(Fig. 2(a)). 따라서, 자유 표면을 명확하게 묘사하고 정밀하게 추적할 수 있으며, 자유 표면 경계 조건을 실제 물질 경계면에 쉽게 적용할 수 있다. 그러나, 이동 격자 방법은 큰 변형을 수반하는 유동에 적용하는 데는 어려움이 따른다. 이 경우 격자계가 심하게 뒤틀리게 되고, 심하게 뒤틀린 격자계는 유동장의 계산에서 부정확성을 초래하기 때문이다. 또한, 이동 격자 방법에서는 격자점의 수가 계속 변하고, 매번 또는 몇 번의 자유 표면 이동 후에 remeshing 또는 rezoning 작업을 수행해야 하므로, 긴 계산 시간을 초래한다. 한편, 격자계의 심한 뒤틀림과 관련한 문제점을 해결하기 위해서 연속적인 rezoning 과정을 병행하는 ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) 방법이 제안되기도 하였다.[6~9]

고정 격자 방법 또는 Eulerian 방법에서는 격자계가 고정된 기준 틀로 사용되며, 그 속에서 유체 유동을 해석한다. 초기에 생성한 격자계가 전체 계산 과정 동안 사용되기 때문에 기하학적 형상과 관련한 문제가 발생하지 않는다. 따라서, 고정 격자 방법은 이동 격자 방법에 비해서 계산상의 노력을 크게 줄일 수 있으며, 또한 3 차원 문제로의 확장도 용이하다. 그러나, 고정 격자 방법에서는 자유 표면의 위치를 추적하는 것과 관련한 어려움이 있다. 격자점들은 그들의 초기 위치에 고정되어 있고 자유 표면은 몇몇 격자점들의 사이에 놓이게 된다. 이 때, 자유 표면은 고유의 불연속적 특성을 잃기 쉽고, 따라서 그러한 수치적 번짐(numerical smearing)을 피하기 위한 특별한 방법이 요구된다. 체적 추적(volume tracking) 방법은 고정 격자계에서 큰 변형을 수반하는 자유 표면을 다룰 수 있는 수치 기법으로 알려져 있으며, MAC (Marker and Cell) 방법[10-15]과 VOF (Volume of Fluid) 방법[16-34]의 두 가지가 널리 쓰이고 있다(Fig. 2(b)와 2(c)). VOF 방법은 유체의 체적 분율을 표시하

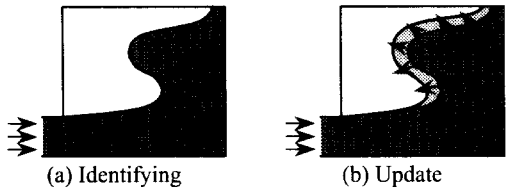


Fig. 1 Numerical analysis of fluid flow with moving free surface. Difficulties arise from the problems associated with (a) identifying and (b) update of free surface location

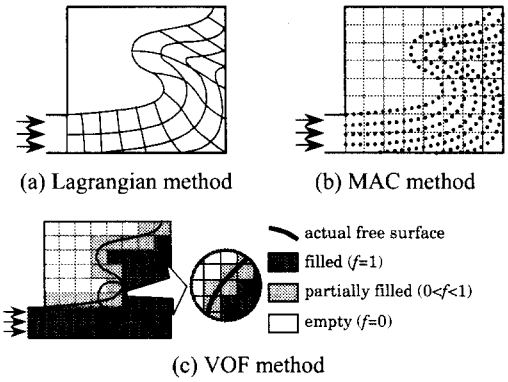


Fig. 2 Numerical methods for the fluid flow with moving free surface. Moving grids; (a) Lagrangian method, and fixed grids; (b) MAC method; (c) VOF method

는 변수에 대한 전달 방정식을 품으로써 자유 표면의 위치를 추적하는 방법으로 효율성 때문에 많이 사용되고 있다. VOF 방법에 기반을 둔 많은 알고리듬과 더불어 자유 표면에서의 수치적 번짐 현상을 억제하기 위한 여러 기법들이 제안되었다. 그러나, 2 차원 문제에 적용하기 위해서 제안된 기법들조차 매우 복잡하고, 어떠한 경우에는 오히려 자유 표면에서 과도한 수치적 번짐 현상을 초래하기도 한다. 따라서, 최소의 수치적 번짐 현상을 보이면서 큰 변형을 수반하는 자유 표면을 다룰 수 있고, 또한 3 차원 문제에 쉽게 적용할 수 있는 간단하고 효율적인 자유 표면 추적 기법의 개발에 대한 요구가 증가하고 있다.

본 연구의 목적은 자유 표면 유동 문제의 해석을 위한 실용적인 수치 알고리듬을 개발하는 것이다. 특히, 본 논문에서는 고정 격자계에서의 자유 표면 추적 기법과 관련된 해의 정확성을 높이기 위한 수치적 연구에 많은 노력을 기울였다. 효율적인 자유 표면 추적 기법에는 일반적으로 다음의 조건이 요구된다. (가) 간단한 구조를 가지고 유동장의 해법에 관계없이 기존의 전산 유체 코드에 쉽게 접합될 수 있어야 하며, (나) 임의의 비정규 비균일 고정 격자계에서 큰 변형을 수반하는 자유 표면을 다룰 수 있어야 하고, (다) 추가의 노력 없이도 3 차원 유동 문제에 확장 적용될 수 있어야 한다. 본 논문에서는 이러한 조건들을 만족시키는 새로운 자유 표면 추적 기법을 제안하였으며, 댐 붕괴 문제와 단일 파 전파 문제에 적용하여 제안한 기법의 타당성을 검증하고 전체적인 해석 알고리듬의 우수한 성능을 보였다. 한편, 본 논문에서 제안한 새로운 자유 표면 추적 유한 요소 알고리듬을 실제의 2 차원, 3 차원 캐비티 충전 문제와 슬로싱 문제에 적용한 결과를 별도의 논문에 보였으며,[35] 임의의 비정규 비균일 격자계에서의 적용 가능성과 결과 예를 보인 바 있다.[36]

2. VOF 방법

VOF 방법에서는 고정 격자계 위에서 셀(또는 제어 체적, Fig. 2(c)에서 사각형이 각 단위 셀을 표시) 내부의 유체 체적 분율을 계산하여 자유 표면을 추적한다.[16] 유체 체적 분율(fractional volume-of-fluid, f)은 유체가 점유하고 있는 지점에서는 1, 그 외에서는 0 이 되도록 정의된다. 자유 표면이 이동하면 각 셀의 유체 체적 분율이 갱신되는데, 수치적인 관점에서 모든 셀은 f 값에 따라서 세 가지 범주로 분류된다(Fig. 2(c)). 셀이 유체로 완전히 채워져 있으면 그 셀의 유체 체적 분율은 1 이 되고 (f=1), 주 유동 영역으로 간주된다. 한편, 셀이 비어있으면 (f=0) 그 셀은 유동 영역의 밖에 있고, 유동장의 계산에 참여하지 않으며, f 값이 0 과 1 사이에 있을 때 ($0<f<1$), 그 셀들은 자유 표면 위에 있다고 간주된다. 유체 체적 분율과 비슷한 개념은 FAN(flow analysis network) 방법에서도 사용되었는데,[37,38] 기본적으로 FAN 형태의 방법은 좁은 유로에서 대류 항을 무시하고 준 정상 Hele-Shaw 유동을 가정하며, 자유 표면의 이동은 제어 표면을 통하는 순 질량 유속을 계산하고 각 제어 체적의 유체 체적 분율을 갱신함으로써 이루어진다. FAN 형태의 방법은 사출 성형 공정[39]이나 resin transfer molding[40] 등에 적용되었다.

Hirt & Nichols[16]는 f의 전달 방정식을 도입하고 donor-acceptor 기법[14]을 이용하는 VOF 방법을 제안하였다.

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla f=0 \tag{1}$$

여기서 $\mathbf{u}$ 는 속도 벡터이며, 유동장 해석의 결과로 주어진다. 식 (1)을 품으로써 f 의 분포를 구할 수 있고, 자유 표면의 위치를 알 수 있다. 물리적인 관점에서 식 (1)은 혼합물 내에서 한 가지 상의 질량 보존을 의미하며, 수치적인 관점에서 식 (1)은 쌍곡선 또는 순수 대류 방정식으로 분류된다.

VOF 방법에서는 Lagrangian 방법에서처럼 격자계를 변형시키거나 MAC 방법에서처럼 marker 입자들을 추적하는 대신에 식 (1)을 풀어서 자유 표면의 움직임을 기술하기 때문에 전체적인 해법을 간단하고 효율적으로 만든다. 복잡한 형상을 다룰 수 있는 고정 격자계의 이점과 더불어 VOF 방법은 FDM, FVM 또는 FEM 과 같은 해법에 관계없이 기존의 유동 해석 코드에 쉽게 접합될 수 있는데, 이러한 이유로 VOF 기반의 방법들은 일반적인 자유 표면 유동 문제의 해석에 널리 사용되었고, 여러 확장된 또는 수정된 형태의 VOF 방법들이 제안되었다.[17~34]

그러나, VOF 기반의 방법은 고정 격자계 위에서 자유 표면의 위치를 결정하는 데에 어려움이 있다. 식 (1)의 해는 수치적으로 번지는(numerical smearing) 경향을 보인다는 것이 잘 알려져 있는데, 이동 경계에서 물리적으로 불연속이어야 하는 f의 구배가 수치 해에서는 유한한 값을 갖게 되는 것을 말하며, 이 현상을 '그릇된 수치 확산(false numerical diffusion)' 이라 한다. 따라서, VOF 방법

을 기반으로 하는 알고리듬의 성공 여부는 고정 격자계 위에서 최소의 수치 확산을 보이면서 f 를 전달할 수 있는가에 달려있다. VOF 방법을 적용한 많은 연구자들은 수치적 번짐을 억제하기 위해 다양한 기법들을 제안하였으며, 그 기법들은 전달 방정식(식 1)을 다루는 방식에 따라서 두 개의 범주로 분류할 수 있다. 어떤 연구자들은 f 를 추가의 미지 변수로 간주하고 계산 격자계 위에서 이산화한 식 (1)의 해를 직접 구하고자 했다.[20,24~26,28,33,34] 한편, Takewaki *et al.*[41]은 쌍곡선 방정식을 풀기 위해서 CIP (cubic-interpolated propagation) 방법을 제안하였는데, CIP 방법에서는 변수 뿐만 아니라 그것의 공간적인 구배 또한 주어진 속도장에 의해 함께 전달된다는 사실에 착안하고, 각각의 셀 내에서 공간적인 프로파일을 삼차 다항식으로 내삽하였다. 고체, 액체 그리고 기체를 동시에 다룰 수 있는 2 차원 쌍곡선 방정식의 단일화된 해법이 개발되어 다양한 문제에 적용되었고, 최근에 Makuuchi *et al.*[42]은 외재적 방법에서의 시간 증분 제약을 극복할 수 있는 내재적 2 차원 CIP 방법을 제안하였다. 다른 연구자들은 donor-acceptor 방법[14] 또는 van Leer 방법[43]과 같은 전달 기법을 향상시키거나 수정함으로써 유한 체적 또는 유한 차분 법의 엇갈린(staggered) 격자계 위에서 체적 유속에 근거한 방법을 사용하여 자유 표면의 위치를 추적하고자 하였다.[16,17,19,21,23,29,30~32,44~46]

3. Donor-Acceptor 방법에 기반한 새로운 자유 표면 추적 기법

본 논문에서는 VOF 방법에 근거한 새로운 자유 표면 추적 기법을 제안하고자 한다. 제안하는 방법은 donor-acceptor 기법을 기반으로 하여 유한 요소 격자계 위에서 체적 유속을 계산함으로써 자유 표면의 위치를 추적한다. 이 장에서는 셀 내부의 자유 표면 배치와 f 값을 고려하여 셀 경계에서의 실제 유체 체적 유속을 어떻게 계산할 것인가에 대해서 논의하고자 한다. 제안한 방법은 최소의 수치적 번짐 현상을 보이면서 자유 표면을 추적할 수 있으며, 더욱이 비정규 비균일 격자계의 3 차원 자유 표면 유동 문제로의 확장성은 제안한 방법이 갖는 또 하나의 큰 장점이라고 할 수 있다.

3.1 셀 경계에서의 웻-아웃 프랙션(wet-out fraction)

고정 격자계에서 체적 유속의 계산을 통하여 자유 표면의 위치를 추적하기 위해서는 모든 셀 경계에서의 유체 체적 유속을 알아야 한다. VOF 방법을 사용할 때 f는 격자점이 아닌 셀에서 정의되는데, 이것은 f 의 전달 방정식(식 1)이 운동량 또는 에너지 방정식과는 달리 다른 방식으로 다루어져야 한다는 것을 의미한다. 본 연구에서는 그러한 목적을 위해서 유한 요소를 셀(또는 제어 체적)로 생각한다. 보존식 형태로 표현된 f 의 전달 방정식을 각각의 셀에서 다음과 같이 적분한다.

$$\int_V \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla f\right] dV = 0 \tag{2}$$

식 (2)의 시간 미분항은 외재적으로 적분한다. 일반적으로 내재적 적분이 더 높은 정확도를 갖는 해를 줄 수 있지만, 그에 반해서 더욱 복잡하고 시간을 소비하는 알고리듬이 요구된다. 한편, 외재적 적분에서는 새로운 시각에서의 값들이 주어진 속도장에 의해 이전 시각에서의 값들로부터 구해지는데, 본 연구에서는 자유 표면 위치의 갱신 기법을 간단하게 하기 위해서 외재적 적분을 채택하였다. Divergence 정리를 적용하고 시간 적분을 수행하면 식 (2)는 다음과 같이 된다.

$$f_i^{new} = f_i^{old} + \frac{\Delta t}{V_i}\left[-\sum_j \left(f_{\Gamma_j}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\right)A_j\right] \tag{3}$$

여기서 하첨자 i 와 j 는 각각 셀과 면 번호를 나타내고, f_i^{new} 와 f_i^{old}는 각각 새로운 시각과 이전 시각에서의 i-셀의 f 값을 의미한다. Δt 는 시간 증분, V_i는 i-셀의 체적, A_j는 j-면의 면적이다. $\mathbf{u}$ 와 $\mathbf{n}$ 은 각각 속도 벡터와 j-면에서 바깥으로 향하는 단위 수직 벡터이다(Fig. 3(a)). 식 (3)으로부터 주어진 시간 증분 동안 셀 안의 유체 체적의 변화는 모든 셀 경계를 통한 유체 체적의 순 유속과 같음을 알 수 있다. 여기서 f_{Γ_j}는 주어진 시간 증분에 대한 i-셀의 j-면에서의 '실제 유체 체적 분율'을 의미한다.[32] 또한, f_{Γ_j} 는 셀 경계가 유체에 의해 어느 정도 젖어 있는지를 나타내는 셀 경계의 웻-

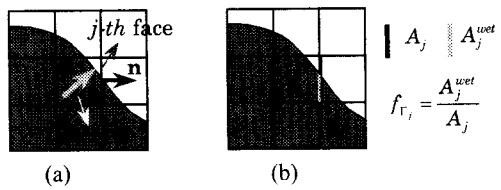


Fig. 3 Definitions of (a) cell, face and facial normal vector, and (b) wet-out fraction, f_{Γ_j}

아웃 프랙션(wet-out fraction)으로 생각할 수 있으며(Fig. 3(b)), 웻-아웃 프랙션의 기본 개념은 net inflow method[46]에서의 '유효 유동 시간(effective flowing time)'과 유사하다고 할 수 있다.

$$f_{\Gamma_j} = \frac{\text{fluid volume transferred through } \Gamma_j}{\text{total volume transferred through } \Gamma_j} \tag{4}$$

쉽게 알 수 있듯이, 식 (3)에서 f_{Γ_j} 는 일반적으로 셀 내부의 자유 표면 배치와 f 값 그리고 시간 증분의 크기(Δt)에 의존하지만, 본 연구에서 채택한 시간 적분의 외재적 특성 때문에 시간 증분과는 무관하게 된다. 따라서, f_{Γ_j} 는 다음의 함수 관계로 주어진다.

$$f_{\Gamma_j} = f_{\Gamma_j}(\text{free surface orientation}, f_i) \tag{5}$$

3.2 자유 표면의 배치를 표시하는 오리엔테이션 벡터(orientation vector)

식 (5)에서 필요한 셀 내부의 자유 표면 배치를 알기 위해서는 주위 셀들의 상태를 참고해야 한다. 본 연구에서는 다른 연구[16,17,19,21,23,29,30~32,44~46]에서와 같이 수많은 경우의 수를 고려하거나 복잡한 함수를 도입하는 것을 피하기 위해서 셀 안에서 다음과 같이 오리엔테이션 벡터(orientation vector), $\mathbf{r}$ 을 정의한다.

$$\mathbf{r} = \frac{\sum_j (f_{ij} \cdot V_{ij}) \mathbf{n}_j}{\left| \sum_j (f_{ij} \cdot V_{ij}) \mathbf{n}_j \right|} \tag{6}$$

여기서 f_{ij} 와 V_{ij} 는 각각 i-셀의 j-면에 인접한 셀에서의 유체 체적 분율과 셀 체적을 의미한다. $\mathbf{n}_j$ 는 j-면, 즉 Γ_j 에서 바깥으로 향하는 단위 수직 벡터를 나타낸다.

식 (6)의 정의에서 알 수 있듯이, 오리엔테이션 벡터는 주위 셀의 f 값들이 어떻게 분포하고 있는지를 고려함으로써 구해지며, 단위 크기를 갖고 유체가 많이 존재하는 방향을 지시한다(Fig. 4(a)). 따라서, 셀 안에서의 자유 표면 배치는 오리엔테이션 벡터에 수직한다고 생각할 수 있다. 정의로부터 오리엔테이션 벡터는 사용하는 격자계의 특성에 의해 영향을 받지만 (식 (6)에서 V_{ij} 와 $\mathbf{n}_j$ 를 통해서), 정규 균일 격자계를 사용하는 경우에는 식 (6)에 의해 결정된 오리엔테이션 벡터들은 정확한 자유 표면 배치를 표현할 수 있다 (물론 f 값의 정확도 범위 내에서). 또한, 과도하게 큰 형상 비(aspect ratio)를 갖지 않는 경우에는 비균일 격자계에서도 오리엔테이션 벡터들은 자유 표면 배치를 근사적으로 표현할 수 있다. 실제로 대부분의 수치 계산에서 격자계는 심하게 뒤틀리지 않도록 (즉, 과도하게 큰 형상 비를 갖지 않도록) 생성되기 때문에 비균일 격자계는 오리엔테이션 벡터의 결정에 큰 영향을 주지 않는다. 그러나, 본 연구에서는 임의의 비균일 격자계가 갖는 다양한 형상 비의 영향을 고려하기 위해서 식 (6)을 다음과 같이 수정한다.

$$\mathbf{r} = \frac{\sum_j (f_{ij} \cdot V_{ij}) a_j \mathbf{n}_j}{\left| \sum_j (f_{ij} \cdot V_{ij}) a_j \mathbf{n}_j \right|} \tag{7}$$

여기서 a_j 는 i-셀의 전체 표면적에 대한 j-면의 면적 비를 나타낸다. 즉, a_j 는 $\sum a_j = 1$ 을 만족한다.

a_j 는 형상 비의 불균일성을 고려하기 위해 추가한 일종의 가중 인자로 볼 수 있다. 예를 들어, 두 개의 주위 셀이 같은 f 값을 갖는 경우, a_j 는 셀 안에서의 실제 자유 표면의 배치가 보다 큰 면적을 갖는 셀 경계에 평행해지는 경향을 반영해 줄 수 있다(Fig. 4(b)).

j-면이 고체 벽일 때, 그 방향으로는 참고할 주위 셀(즉, f_{ij})이 존재하지 않게 되는데, 그러한 경우에는 고체 벽안에 가상의 셀이 존재한다고 가정하고, 고체 벽에 인접한 국소 지역에서 f 가 선형적인 분포를 갖도록 가상의 셀에서 특정한 f 값을 가정하여 처리한다. 이것은 다음과 같이 표현된다.

$$f_{ij(j=\text{solid wall})} = \min[\max(f_i + \Delta f, 0.), 1.] \tag{8}$$

여기서 Δf 는 i-셀과 고체 벽 반대편에 있는 셀에서의 f 값들의 차를 나타낸다. 대칭면도 비슷한 방식으로 처리할 수 있다.

오리엔테이션 벡터로부터 하나의 셀 안에서 자유 표면의 배향, 즉 기울기에 대한 정보를 얻을 수 있으며, 하나의 셀 안에서 자유 표면의 배향을

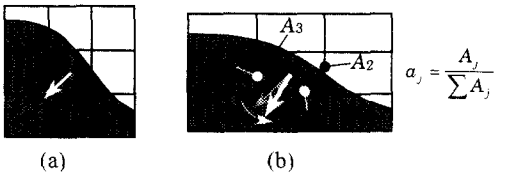


Fig. 4 Definition of orientation vector, **r**

2 차원에서는 직선으로, 3 차원에서는 평면으로 표현할 수 있다. 따라서, 하나의 셀 안에서 자유 표면의 기울기를 알아낸 후, 셀 안의 유체 체적이 그 셀의 유체 체적 분율(f)이 되도록 직선(2 차원) 또는 평면(3 차원)으로 표현된 자유 표면의 위치를 결정하는 기본 개념에서 생각하면 본 논문에서 제안하는 자유 표면 추적 기법은 넓은 의미에서 PLIC(piecewise linear interface calculation) VOF 방법[29,31,45]의 일종으로 분류될 수 있다. 그런데 이러한 체적 추적(volume tracking) 기법에 기반한 VOF 방법에서의 공통적인 어려움은 셀 경계에서의 유체 체적 유속을 결정하는 것이며, 이의 계산을 위해서 본 논문에서는 유한 요소 법의 선형 사상(linear mapping)을 이용한 베이비-셀 방법(3.3 절 참고)을 제안하였다. 오리엔테이션 벡터는 자유 표면을 단순히 국소적으로 직선(2 차원)이나 평면(3 차원)으로 표현하기 위한 것이 아니라 셀 경계에서의 유체 체적 유속을 결정하기 위한 기준으로 사용되며(3.3 절 참고), 따라서 본 논문에서 제안하는 자유 표면 추적 기법은 기존의 PLIC VOF 방법들과는 차별성이 있다. 또한, 이런 기본 개념의 구현을 위한 수치적인 처리의 측면에서 보면 기존의 방법들은 2 차원에서조차 상당히 복잡한 알고리듬의 도입을 피할 수 없고, 3 차원으로의 확장은 훨씬 더 복잡한 구조의 새로운 알고리듬을 요구하는 데 반해 본 논문에서 제안하는 베이비-셀 방법은 간단한 구조를 유지하면서 2 차원, 3 차원에 일관되게 적용될 수 있다는 장점을 지니고 있다.

3.3 균일한 부체적(sub-volume)을 표시하는 베이비-셀(baby-cell)

셀 안에서의 자유 표면 배치는 오리엔테이션 벡터로부터 알 수 있으므로 이제 셀의 f 값을 고려하여 셀 경계에서의 실제 유체 체적 유속을 구해야 한다. 그러나, 자유 표면의 배치가 같더라도 f 값에 따라서 수 많은 다른 경우가 존재할 수 있기 때문에, 셀 경계에서의 실제 유체 체적 유속은 단지 셀이 유체로 얼마나 채워져 있는가(즉, 셀의 f 값)에 의해서가 아니라 셀의 어떤 면이 유체에 의해 어느 정도 젖어 있는가에 의해서 결정되어야 한다. 본 연구에서는 이러한 검사를 위해서 베이비-셀(baby-cell)을 사용하였는데, 베이비-셀은 유한 요소 법의 마스터 요소(*master element*)에서 똑같은 체적 기여도(volumetric contribution)를 갖으면서 마스터 요소의 체적을 일정한 부체적(sub-volume)으로 분할하도록 정의하였다(Fig. 5). 실제로 베이비-셀들은 마스터 요소 안에서 일정한 부체적을 대표하는 점들로 표현되는데, 실제 요소(physical element) 안에 대응하는 베이비-셀들은 유한 요소 법에서 사용하는 마스터 요소와 실제 요소 사이의 변환에 의해서 얻어지게 된다. 만약, 실제 요소가 뒤틀려 있으면 대응하는 베이비-셀들도 뒤틀리게 되지만, 여전히 일정한 체적 기여도(즉, 일정한 부체적)를 갖는다. 이것은 선형 변환의 Jacobian 행렬의 행렬식이 동일한 요소 안에서는 일정하기 때문인데, 본 연구에서 채택하고 있는 변환의 선형성이 이러한 과정을 가능하게 해준다. 본 논문에서 제안하는 베이비-셀 방법은 사각형(2 차원) 또는 육면체(3 차원) 요소(또는 셀)로 이루어진 임의의 비정규 비균일 격자계의 사용을 기반으로 한다. 따라서, 마스터 요소에서의 베이비-셀은 정사각형(2 차원) 또는 정육면체(3 차원) 모양을 갖게 되고, 임의의 비정규 비균일 격자계의 실제 요소에서의 베이비-셀은 실제 요소의 형상을 따르는 일반적인 사각형(2 차원) 또는 일반적인 육면체(3 차원) 모양을 갖게 된다. 이렇게 정의된 베이비-셀들은 다음과 같은 방식으로 셀 경계에서의 웻-아웃 프랙션을 결정하는 데 이용된다.

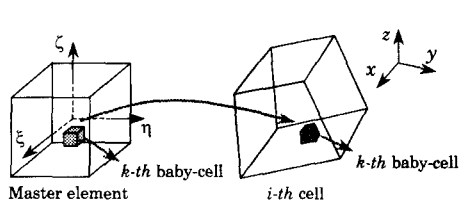
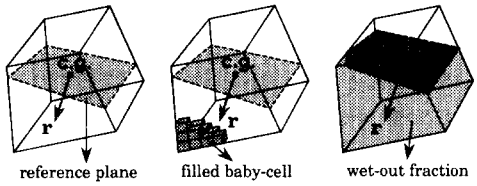


Fig. 5 Definition of baby-cell

(1) 오리엔테이션 벡터 **r** 에 수직하고 셀의 중심을 지나는 평면을 가정한다(Fig. 6(a)). 평면은 기준 평면으로만 사용되기 때문에 반드시 셀의 중심을 지날 필요는 없다. 즉, 평면은 자신으로부터 각각의 베이비-셀까지의 상대적인 거리를 결정하는 역할만을 한다.

(2) 기준 평면으로부터 오리엔테이션 벡터의 양의 방향으로 가장 멀리 있는 것을 시작으로 셀 안의 유체 체적 분율이 그 셀의 f 값이 될 때까지 순차적으로 베이비-셀들이 채워진다고 가정한다(Fig. 6(b)).

(3) 각 셀 경계에 대한 채워진 베이비-셀의 기여도를 계산한다. 채워진 모든 베이비-셀들로부터의 축적된 기여도가 각 셀 경계에서의 웻-아웃 프랙션을 의미하게 된다(Fig. 6(c)).



(a) (b) (c)

Fig. 6 Schematic illustration of the procedure for evaluating wet-out fraction at the cell boundary: (a) Construct a reference plane normal to the orientation vector, **r**; (b) fill baby-cells sequentially; (c) estimate the accumulated contribution from the filled baby-cells to each cell boundary

위의 과정에 의해서 각 셀 경계에서의 유체 체적 유속을 구할 수 있다. 제안한 기법은 자유 표면에서의 물리적인 관찰에 바탕을 두고 있기 때문에 최소의 수치적 번짐 현상을 보이면서 움직이는 자유 표면을 추적할 수 있다. 더욱이, 베이비-셀의 생성은 유한 요소법에서 사용하는 기존의 변환을 이용하기 때문에 추가의 계산 저장 용량이 거의 필요하지 않으며, 또한 위의 과정을 통해서 각 셀 경계에서의 실제 유체 체적 유속을 구하는 작업은 전체 유동 영역에서 행해지는 것이 아니라 자유 표면 셀에서만 행해지기 때문에 제안한 자유 표면 추적 기법에 의해 추가되는 계산 시간도 매우 적다(참고로 위의 과정은 전체 계산 시간의 10% 이하를 차지한다).

한편, 본 연구에서 사용한 베이비-셀의 수는 2 차원에서 1600 (=40×40) 개이고, 3 차원에서는 1000 (=10×10×10) 개이다. 베이비-셀의 정의로부터 베이비-셀 수의 변화는 셀 경계에서의 웻-아웃 프랙션 (f_{Γ_j}) 계산의 정확도에 영향을 준다. 본 논문에서는 베이비-셀 수의 변화에 따른 해의 정확도의 차이에 대한 계산 예는 제시하지 않았으나, 웻-아웃 프랙션 계산에서의 단순 오차만을 생각하면 1600 개의 베이비-셀을 사용한 2 차원 계산의 경우에는 2.5%(=1/40)이며, 1000 개의 베이비-셀을 사용한 3 차원 계산의 경우에는 1%(=1/10×10)가 된다. 한편, 유동장(특히, 압력장) 계산에서의 정확도, f의 전달 방정식의 시간 적분 방법, 셀 내부에서 자유 표면의 배향 결정, 시간 증분의 크기 등이 자유 표면 유동 수치해의 정확도에 영향을 준다는 점을 고려하면 본 계산에서 사용한 베이비-셀의 수는 타당하다.

4. 지배 방정식과 유한 요소 수식화

4.1 지배 방정식과 경계 조건

유동장의 계산을 위해 다음의 가정을 사용하였다.

(1) 움직이는 자유 표면은 혼합되지 않는 두 유체 사이에 존재한다.
(2) 비압축성, 점성, 층류 유동이다.
(3) 유체의 물성치는 일정하다.

지배 방정식은 뉴튼 유체의 층류 유동에 대한 비정상 비압축성 Navier-Stokes 방정식이다.

$$u_{i,i} = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} = -\frac{1}{\bar{\rho}} p_{,i} + \sigma_{ij,j} + S_i \tag{10}$$

여기서 $\sigma_{ij} = \bar{\nu}(u_{i,j} + u_{j,i})$ 이다. $\bar{\rho}$와 $\bar{\nu}$는 각각 밀도와 동점성 계수를 나타내고, 혼합 법칙(rule of mixture)을 이용한 가중 평균 방법으로 얻어진다.

일반적으로 Dirichlet 또는 essential 경계 조건은 다음과 같다.

$$u_i = b_i \text{ on } \Gamma_1 \tag{11}$$

Neumann 또는 natural 경계 조건에서는 총 표면 트랙션(total surface traction)을 지정한다.

$$\left[-\frac{1}{\bar{\rho}} p\delta_{ij} + \sigma_{ij}\right] n_j = t_i \quad \text{on } \Gamma_2 \tag{12}$$

여기서 Γ_1 과 Γ_2 는 부분적으로 매끄러운(piecewise smooth) 경계 Γ를 구성하는 중복되지 않는 두 개의 경계를 나타낸다. b_i 는 Γ_1 에서의 속도 벡터이고, t_i는 Γ_2에서의 표면 트랙션이다. n_j는 Γ_2에서 바깥으로 향하는 단위 수직 벡터이다.

식 (10)의 초기 조건은 초기 상태에서 식 (9)를 만족하는 속도장으로 주어진다.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},0) = \mathbf{u}_0(x) \text{ with } \nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0 \tag{13}$$

고체 벽에서는 미끄럼 없음(no-slip) 경계 조건 또는 마찰 없음(frictionless) 경계 조건을 가정할 수 있다. 비점성 유동을 가정할 수 있는 경우, 유체와 벽 사이의 마찰 없음 경계 조건은 다음과 같이 표현된다.

$$u_i n_i = 0 \text{ 그리고 } \left[-\frac{1}{\rho} p\delta_{ij} + \sigma_{ij}\right] s_i = 0 \tag{14}$$

여기서 s_j는 고체 벽에서의 접선 벡터이다.

고체 벽에서의 경계 조건은 상대적으로 간단하지만, 자유 표면 위에서의 경계 조건은 신중하게 다루어야 한다. 본 연구에서 2 차 유체는 대기압(0으로 가정)으로 유지된다고 가정한다. 또한, 자유 표면의 수직 방향 응력은 외부에서 가해지는 임의의 수직 응력과 같고, 자유 표면의 접선 방향 응력은 없다고 가정하며, 표면 장력은 무시하였다. 따라서, 자유 표면에서는 다음의 트랙션 없음(traction-free) 조건을 가정한다.

$$\left[-\frac{1}{\rho} p\delta_{ij} + \sigma_{ij}\right] n_j = 0 \tag{15}$$

4.2 유한 요소 수식화와 프랙셔널 스텝 방법 (fractional step method)

계산 영역을 2 차원에서는 4 격자점 사각형 요소, 3 차원에서는 8 격자점 육면체 요소로 이산화한다. 속도는 요소 안에서 bilinear 또는 trilinear 다항식으로 표현하고, 요소의 모든 꼭지점에서 정의한다. 압력은 요소 안에서 일정하고, 요소의 중심에서 정의한다. 식 (9)와 (10)은 Galerkin 근사를 이용해서 이산화하며, **u** 에 대한 반-이산화된(semi-discretized) 방정식은 다음과 같이 시간에 대한 상미분 방정식으로 표현된다.

$$\mathbf{M\dot{u}} + \mathbf{C(u)u} + \mathbf{Ku} - \mathbf{Hp} - \mathbf{F} = \mathbf{0} \tag{16}$$

각 행렬에 대한 자세한 정의는 예를 들어 Reddy & Gartling[47]에서 찾을 수 있다.

연속식(식 9)은 다음과 같이 각 요소에서 이산화한다.[15]

$$\mathbf{h}_e^T \mathbf{u}_e = 0 \quad (e = 1,2,3,\ldots,NE) \tag{17}$$

여기서 NE 는 계산에 참여하는 총 유한 요소의 수를 의미한다.

본 연구에서는 외재적 프랙셔널 시간 전진 방법(explicit fractional time-stepping method)을 사용하여 상미분 방정식(식 16)을 시간에 대해 적분하였다.[15] 프랙셔널 스텝 방법(fractional step method)은 Chorin[48]에 의해 유한 차분 법에서 처음 제안된 시간 적분 방법으로, 먼저 압력 구배 항을 대류, 확산 그리고 다른 외력 항들로부터 분리하고 그 과정에서 중간 단계 속도(intermediate velocity)를 얻는데, 얻어진 중간 단계 속도는 일반적으로 연속 구속 조건을 만족하지 못하기 때문에 그 후에 (미지의) 압력에 의한 동적 영향을 추가함으로써 최종 속도를 얻는다. 즉, 다음 단계에서 연속 구속 조건으로부터 압력을 구하고, 이어서 중간 단계 속도를 보정하여 최종 속도를 구한다.[15,48-52] Nakayama & Mori[15]가 제안한 방법에서는 식 (16)을 외재적으로 적분하여 중간 단계 속도를 얻고, 각 요소에서 속도의 국소 divergence 가 0 이 될 때까지 압력을 조절하면서 반복적으로 속도 보정을 수행함으로써 비정상 유동장을 해석한다. 외재적 요소별 프랙셔널 스텝 방법에서의 자세한 과정은 참고 문헌[15]에서 찾을 수 있다.

Navier-Stokes 방정식의 수식화에서 또 한가지 중요한 것은 수치 해법이 대류 지배적인 유동을 다룰 수 있어야 한다는 것이다. 비압축성 유동장에서 확산 효과가 대류 효과에 비해서 매우 작은 경우 스칼라 양은 유선을 따라서 전달된다는 사실에 근거해서 비등방성 균형 확산 방법(anisotropic balancing diffusion method)[53]이나 일관된 유선 상류 Petrov-Galerkin 방법(consistent streamline upwind/Petrov-Galerkin method; SUPG)[54] 등이 제안되었다. 본 연구에서는 유동장의 대류 지배적인 특성을 다루기 위해서 지배 방정식의 수식화에 일관된 SUPG 방법을 적용하였다.

5. 해석 과정

움직이는 자유 표면이 존재하는 유체 유동의 전반적인 해석 과정은 다음과 같이 요약된다(Fig. 7).

(1) 주어진 형상과 재료에 대해서 문제를 정의한다.
- 물성치와 파라미터들을 지정한다.
- 격자계를 생성한다.
- 요소와 격자점에 대한 정보를 얻는다.
- 경계 조건과 초기 조건을 지정한다.

(2) 계산 영역을 설정한다. f 값이 0.5 보다 큰 요소들이 계산 영역을 구성한다고 생각한다. 실제의 자유 표면 위치를 모르기 때문에 자유 표면 셀이 계산 영역에 포함되는지 아닌지를 결정하는 데는 f 의 특정한 값을 사용한다. 그러한 판정에 0.5 의 값이 가장 적합하다고 알려져 있으며,[19] 고정 격자계를 사용하는 대부분의 이동 경계 문제 해석에서 널리 사용되고 있다. 그리고 나서 새로운 계산 영역에 속도 값을 지정한다. 이것은 계산 영역에 새롭게

포함된 요소에는 속도 값이 결정되지 않아 0인 격자점들이 존재하기 때문이다.

(3) 주어진 자유 표면 형상에 대해서 새로운 시각에서의 속도장과 압력장을 얻는다.

(4) 얻어진 속도장을 이용하여 자유 표면의 위치를 갱신한다.

- 모든 셀에서 오리엔테이션 벡터를 얻는다.
- 모든 셀 경계에서 웻-아웃 프랙션을 얻는다.
- 시간 증분의 크기를 결정한다.
- 자유 표면을 이동시킨다.

(5) 지정한 최종 시각에 이를 때까지 단계 (2)-(4)를 반복한다.

본 연구에서는 최소의 수치적 번짐 현상을 보이면서 자유 표면을 추적할 수 있는 새로운 자유 표면 추적 기법의 개발을 목적으로 하는데, 새롭게 제안된 자유 표면 추적 기법은 Navier-Stokes 방정식의 해법을 위해 채택한 프랙셔널 스텝 방법과의 결합으로 더욱 효율적이 된다. 더욱이, 운동량 방정식과 f의 전달 방정식에 채택한 외재적 시간 적분 방법에 더하여 전체 해석 알고리듬의 속도와 효율 향상을 위해서 보편적인 열-더하기(row-sum) 방법으로 질량 행렬 **M** 을 대각 행렬로 대체하는 대각 총괄 질량 행렬 표현(diagonal lumped mass matrix representation) 을 사용하였다.[49]

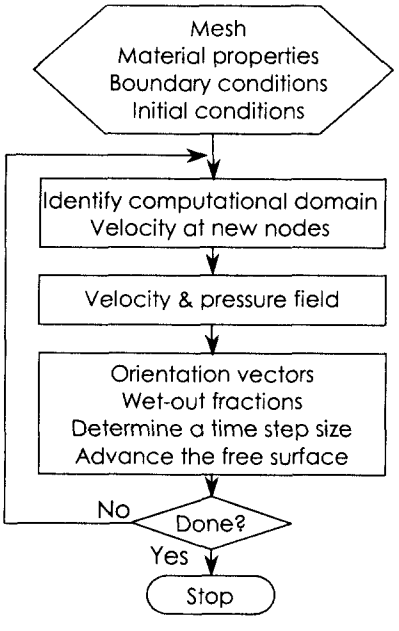


Fig. 7 Solution procedure for the fluid flow with moving free surface

5.1 시간 증분의 크기와 안정성 고려

f 의 전달 방정식 뿐만 아니라 운동량 방정식에 채택한 외재적 시간 적분 방법은 간단하고 빠른 반면 시간 증분 크기가 너무 커지면 해석 알고리듬이 불안정해질 수 있다. 그러나, 대각 총괄 질량 행렬 표현과 함께 적용된 외재적 시간 적분 방법이 훌륭한 성능을 보였다고 보고된 바 있으며,[49] 또한 내재적 시간 적분 방법이 안정성 조건의 구속을 받지는 않지만 큰 Courant 수에서 높은 정확도를 보장하지는 못한다는 사실도 상기해야 한다. 외재적 방법에서 시간 증분 크기의 안정성 한계는 다음의 CFL 구속 조건으로 표현된다.

$$\mathrm{CFL}=\left(\frac{|u|}{\Delta x}+\frac{|v|}{\Delta y}+\frac{|w|}{\Delta z}\right)\Delta t \le 1 \tag{18}$$

본 연구에서는 시간 증분 크기의 결정에 있어서 VOF 방법이 가지고 있는 근본적인 한계를 고려하여 외재적 방법을 선택하였다.[16] VOF 방법에서는 유체가 하나의 시간 증분 동안에 하나 이상의 셀을 통과하여 지나가지 않도록 시간 증분 크기를 결정해야 한다. 본 연구에서는 셀 경계에서의 유체 체적 유속을 먼저 계산하고, 유체 체적의 순 유속을 참고하여 시간 증분 크기를 결정하였다. 이 때, 순 유입 유체의 체적은 셀 안의 빈 공간보다 크지 않아야 하며, 순 유출 유체의 체적은 셀 안에 존재하고 있던 유체 체적보다 크지 않아야 한다.[32]

양의 순 체적 유속을 갖는 셀에 대해서

$$\Delta t \le \frac{(1-f_i)V_i}{\left[-\sum_j (f_{\Gamma_j}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})A_j\right]} \tag{19a}$$

음의 순 체적 유속을 갖는 셀에 대해서

$$\Delta t \le \frac{(0-f_i)V_i}{\left[-\sum_j (f_{\Gamma_j}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})A_j\right]} \tag{19b}$$

최종적인 시간 증분 크기는 계산 영역에 포함된 모든 셀에서 위의 조건을 동시에 만족하는 것으로 선택하며, 따라서 이렇게 결정된 시간 증분 크기는 자동적으로 CFL 구속 조건(식 18)을 만족하게 된다.

5.2 새로운 격자점에서의 속도 지정

새로운 계산 시각으로 진행할 때 자유 표면의 후퇴와 전진에 의해서 계산 영역으로부터 제외되

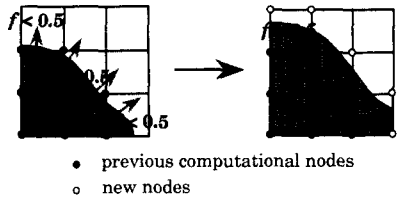


Fig. 8 New nodes entering the computational domain

거나 계산 영역에 새롭게 포함되는 요소가 존재하게 된다. 특히, 새롭게 포함된 요소에는 속도 값이 아직 결정되지 않아 0 인 격자점들이 존재하게 되고, 따라서 그러한 격자점에 합리적인 속도 값을 지정해주는 과정이 필요하게 된다. 본 연구에서는 주위 요소들에서의 평균 속도로부터 체적-가중 평균 방법을 사용하여 다음과 같이 새로운 격자점에 속도 값을 지정하였다(Fig. 8).[15]

$$\mathbf{u}^{\text{new node}} = \frac{\sum \bar{\mathbf{u}}_e \cdot V_e}{\sum V_e} \tag{20}$$

여기서 $\mathbf{u}^{\text{new node}}$ 는 새로운 격자점에서의 속도를 의미하며, $\bar{\mathbf{u}}_e$ 와 V_e 는 각각 주위 요소에서의 평균 속도와 그 요소의 체적을 나타낸다.

6. 해석 기법의 검증

본 연구에서 제안한 자유 표면 추적 기법의 타당성을 검증하고 전체적인 해석 알고리듬의 우수한 성능을 보이기 위해서 댐 붕괴 문제와 단일 파 전파 문제를 해석하였다. 본 논문에서 사용한 검증 문제는 자유 표면의 큰 변형을 수반하고 있지는 않지만 1950 년대 이래로 많은 연구자들에 의해 댐 붕괴 문제의 경우 다양한 실험적,[55] 수치적[5,8~10,15,16,19,32,46] 접근이, 단일파 전파 문제의 경우에는 다양한 실험적,[58] 수치적,[7,9,11] 해석적[56,57] 접근이 이루어져 왔기 때문에 본 논문에서 제안한 자유 표면 추적 알고리듬의 타당성을 검증할 수 있는 많은 데이터가 축적되어 있고, 특히 실험 데이터[55,58]가 존재하므로 실험과 계산의 비교가 가능하였기에 검증 문제로서 선택하였다. 한편, 큰 변형을 수반하는 실제의 3 차원 자유 표면 유동 문제(캐비티 충전 문제와 슬로싱 문제)에 본 논문에서 제안한 자유 표면 추적 알고리듬을 적용하여 얻은 해석 결과를 별도의 논문(35,36)에서 보인 바 있다.

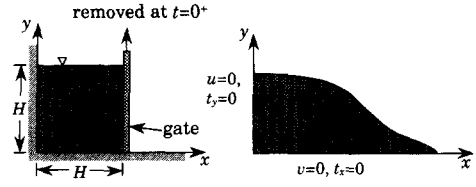


Fig. 9 Broken dam problem

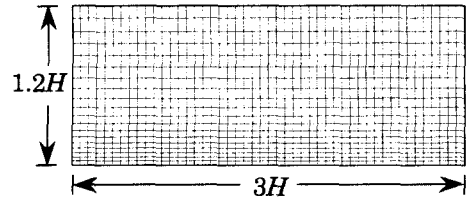


Fig. 10 Non-uniform 49×20 mesh used for the broken dam problem

6.1 댐 붕괴 문제

첫 번째 예로서 댐 붕괴 문제를 해석하였다. 이 문제는 초기의 유동 배치가 간단하고, 실험 결과가 존재하며,[55] 자유 표면의 전진과 후퇴 현상이 공존하기 때문에 자유 표면 추적 기법을 효율적으로 검증할 수 있다. 따라서, 많은 연구자들이 댐 붕괴 문제를 수치적으로 해석하였다.[5,8~10,15,16,19,32,46]

문제의 설명이 Fig. 9 에 있다. 수력학적 평형 상태에 있는 사각 물 기둥이 시각 t=0 에 두 개의 수직 벽 사이에 가두어져 있다가 시각 t=0⁺에 한 쪽 벽이 갑자기 제거되고 물 기둥은 중력의 영향으로 붕괴하기 시작하여 전진하는 물결 파를 형성한다. 물의 밀도와 점도는 각각 1000 (kg/m^3)과 1×10^{-3} (kg/m·s)이다. 주위 유체는 공기이고, 밀도는 1 (kg/m^3), 점도는 1×10^{-5} (kg/m·s)이다. 중력 가속도는 g=9.8 (m/s^2)이다. 초기 유동 배치는 Martin & Moyce[55]의 실험 조건과 같은 정사각 기둥($H\times H$, H=0.05175 m)으로 선택하였고, 계산 결과에 대한 격자계의 영향을 알아보기 위해서 다른 격자 밀도를 갖는 네 개의 격자계, 즉 세 개의 균일 격자계 (31×13, 49×20, 61×25)와 한 개의 비균일 격자계 (49×20, Fig. 10)를 사용하였다.

Fig. 11 에 비균일 49×20 격자계에서 얻어진 자유 표면 형상과 등압선을 나타내었다. 물 기둥은 오른쪽 위 자유 표면에서부터 붕괴하기 시작하고, 시간이 지나면서 물결 파는 바닥을 따라서 오른쪽 방향으로 빠르게 가속한다. Fig. 12 에 물결 파의 선단 위치와 잔류 물 기둥의 높이를 경과 시간의 함수로 나타내었고, 실험 결과[55]와 비교하였다.

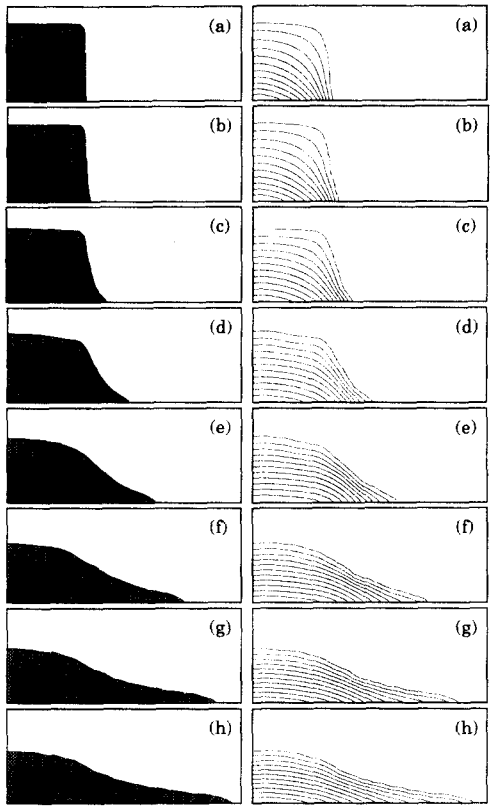


Fig. 11 Free surface profiles (left) and pressure contours (right) for the broken dam problem. (a) 0.01 s, (b) 0.02 s, (c) 0.04 s, (d) 0.06 s, (e) 0.08 s, (f) 0.10 s, (g) 0.12 s, and (h) 0.13 s

편의를 위해서 무차원 시간과 길이를 각각 $t^* = t\sqrt{(g/H)}$ 와 $x^* = x/H$ 로 정의하였다. 네 개의 다른 격자계에서 얻어진 결과들이 모두 실험 결과와 잘 일치하고 있음을 알 수 있으며, 균일한 31×13 격자계에서 얻어진 결과에서 약간의 차이를 보이고 있는 데, 이는 본 계산에서 사용한 격자계 중에서 가장 적은 수의 격자점을 갖는 격자계에 해당한다. 실험 결과와의 훌륭한 일치는 본 연구의 해석 기법이 물 기둥의 붕괴를 정확하게 예측하고 묘사할 수 있음을 보여준다.

6.2 단일 파 전파 문제

두 번째 예로서 단일 파 전파 문제를 해석하였는데, 단일 파는 주위의 교란되지 않은 수면으로부터 올라와 있으면서, 파동 전파 방향으로 일정한 속도로 움직이는 하나의 파로 정의된다.

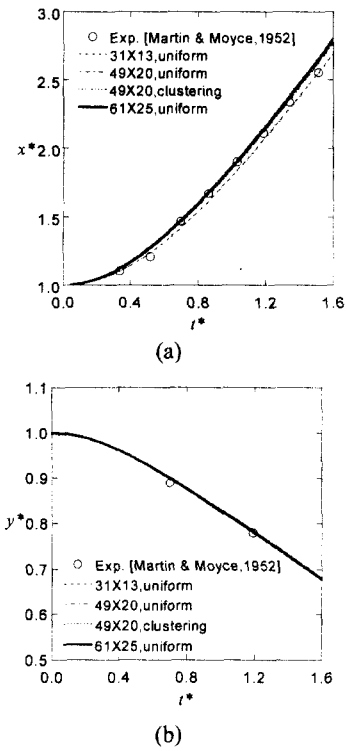


Fig. 12 (a) The position of the water wave front and (b) the height of the residual water column as functions of time. Comparison of the numerical results using four different grids with the experimental data [55]

Laitone[56]와 Byatt-Smith[57]는 비점성 표면 파에 대한 근사 해석해를 구하였고, Maxworthy[58]는 단일 파와 수직 벽의 상호 작용에 대한 실험을 수행한 바 있다. 수치적인 연구 또한 다양한 방법으로 이루어졌는데, Chan & Street[11]는 MAC 방법을 사용하였고, Ramaswamy & Kawahara[7]와 최형권[9]은 ALE 방법을 적용하였다.

문제의 설명이 Fig. 13 에 주어져 있다. 고려하는 유체와 주위 유체는 각각 물과 공기이고 물성치는 댐 붕괴 문제에서와 동일하다. 해석해는 무한 채널에 대해서 얻어지지만 계산은 유한한 영역에 서 수행되어야 하는데, 파의 물마루로부터 멀리 떨어진 곳의 유체는 정지해 있기 때문에 파의 높이에 비해 파의 전파 방향으로의 길이가 충분히 크게 되도록 유동 영역을 설정하였다. 교란되지 않은 유체의 깊이와 두 개의 수직 벽 사이의 수평 거리를 각각 d=1 (m)과 L=16 (m)로 선택하였다.[7] 경계조건과 초기 조건은 Fig. 14 에 나타내었으며, 바닥

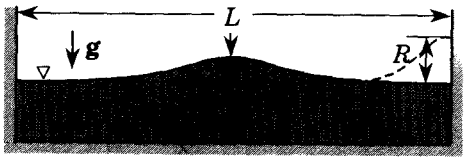
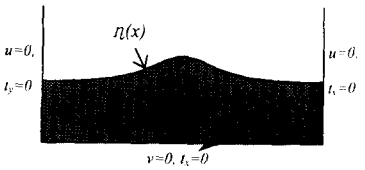


Fig. 13 Propagation of a solitary wave



$$\eta(x) = H\,\mathrm{sech}^2\left(\sqrt{\frac{3H}{4d^3}}x\right)$$

$$u = \sqrt{gd}\frac{H}{d}\,\mathrm{sech}^2\left(\sqrt{\frac{3H}{4d^3}}x\right)$$

$$v = \sqrt{3gd}\left(\frac{H}{d}\right)^{3/2}\left(\frac{y}{d}\right)\mathrm{sech}^2\left(\sqrt{\frac{3H}{4d^3}}x\right)\tanh\left(\sqrt{\frac{3H}{4d^3}}x\right)$$

$$p = \rho g(d+\eta-y)$$

Fig. 14 Boundary and initial conditions for the solitary wave propagation problem

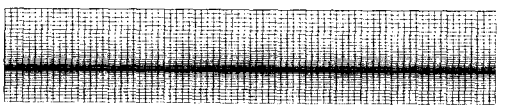


Fig. 15 Non-uniform 81×37 mesh used for the solitary wave propagation problem

벽과 수직 벽에는 마찰 없음 경계 조건을 가정하였고 초기 조건은 결과의 비교를 위해서 Laitone의 단일 파 근사를 따랐다.[56]

계산은 파의 초기 높이 H/d=0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40, 0.45, 0.50 그리고 0.55 에 대해서 수행하였으며, H/d=0.40 의 경우에 사용한 비균일 81×37 격자계를 Fig. 15 에 나타내었다. H/d=0.40 에 대한 초기 상태의 속도 벡터와 등압선은 각각 Fig. 16(a)와 17(a)에서 볼 수 있으며, 계산된 파의 형상과 대응하는 속도 벡터는 Fig. 16 에, 등압선은 Fig. 17 에 나타내었다. 수직 벽의 존재로 인해서 초기의 운동 에너지가 위치 에너지로 변환되는 것이 Fig. 16(c) 또는 16(g)에서 보인다. 압력은 거의 수력학적 압력으로 유지되며 이것은 Laitone 의 해석해[56]와 잘 일치하고 있다. Fig. 18 에 수직 벽에서의 단일 파의 최대 상승 높이를 파의 여러 가지 초기 높이에 대해서 나타내었다. 그림에서 파에 의한 최대 상승 높이는 파의 초기 높이보다 항상 두 배 이상 큰 것을 볼 수 있다. Byatt-Smith[57]는 파의 초기 높이 H/d 인 단일 파의 최대 상승 높이 R_{max}/d 를 다음과 같이 구하였다.

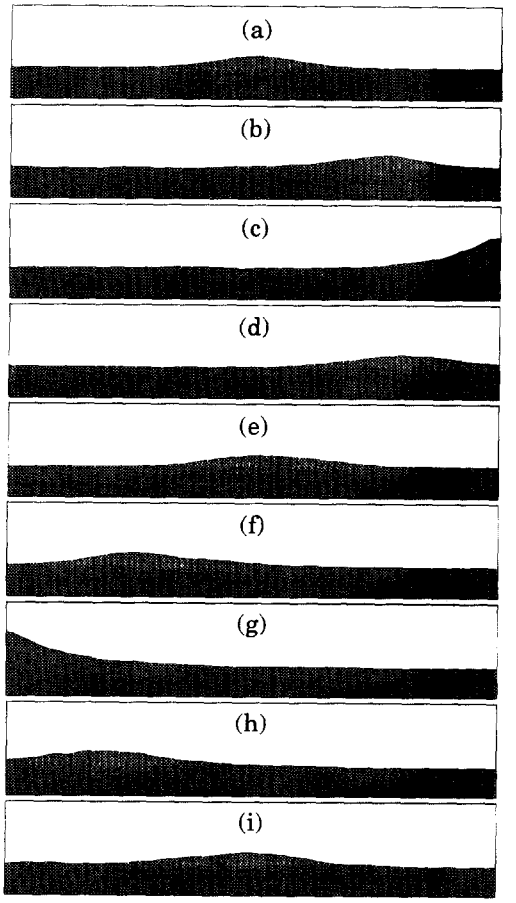


Fig. 16 Wave profiles and velocity vectors for the solitary wave propagation problem. (a) 0 s, (b) 1.2 s, (c) 2.3 s, (d) 3.4 s, (e) 4.6 s, (f) 5.7 s, (g) 6.9 s, (h) 8.1 s, and (i) 9.3 s

$$\frac{R_{max}}{d} = 2\left(\frac{H}{d}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{H}{d}\right)^2 + O\left[\left(\frac{H}{d}\right)^3\right] \tag{21}$$

Fig. 18 에서 본 계산의 결과가 다른 수치, 실험 결과와 잘 일치하고 있음을 볼 수 있으며, 또한 인위적인 댐핑 효과가 나타나지 않고 있는 것을 확인할 수 있다. 해석해와 비교해보면 계산 결과에서는 음의 공간적 상 변위(spatial phase shift)가 나타나는데, 이 공간적 상 변위는 수직 벽에서의 상호 작용이 유한한 시간 동안 일어나기 때문에 발생한다. Fig. 19 에서 H/d=0.40 의 경우 공간적 상 변위의 크기는 $\Delta X/d \approx -1.3$ 임을 알 수 있으며, 이것은 실험적인 관찰[58]과 잘 일치하고 있다.

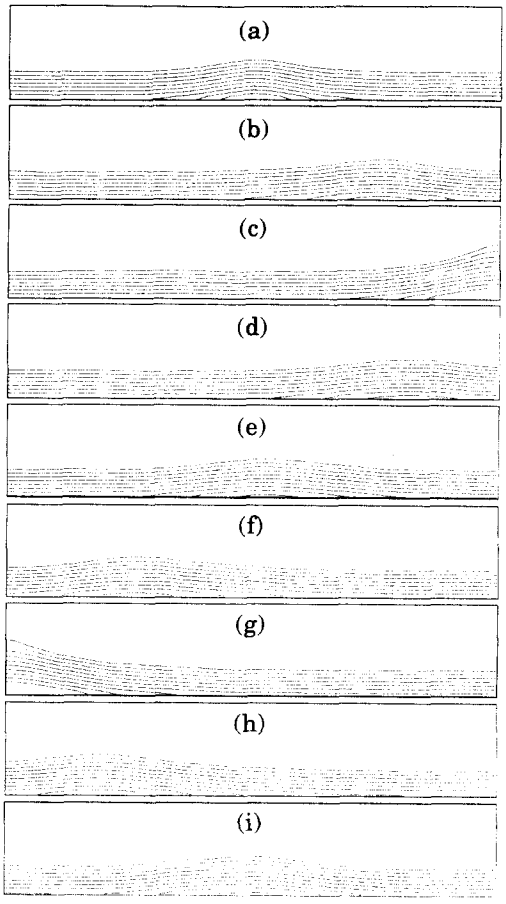


Fig. 17 Pressure contours for the solitary wave propagation problem. (a) 0 s, (b) 1.2 s, (c) 2.3 s, (d) 3.4 s, (e) 4.6 s, (f) 5.7 s, (g) 6.9 s, (h) 8.1 s, and (i) 9.3 s

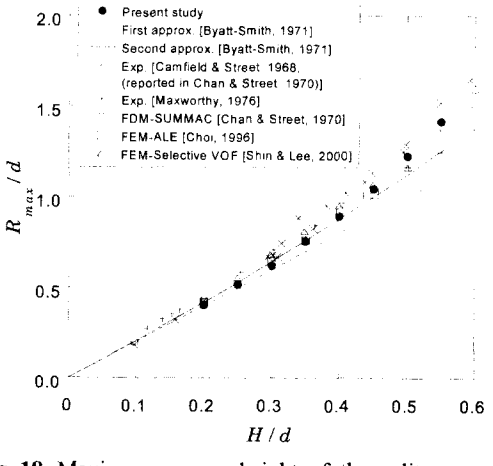


Fig. 18 Maximum run-up height of the solitary wave against the vertical wall for various incident wave heights. Comparison of the present numerical results with previous works

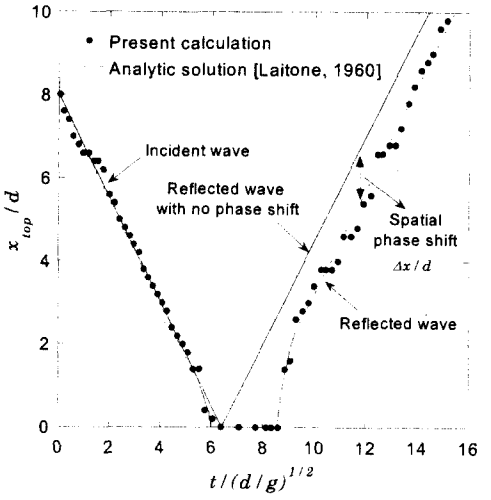


Fig. 19 Spatial phase shift of the wave crest for H/d=0.4. Comparison of the present numerical results with the analytic solution [56]

7. 결 론

비정상 자유 표면 유동 문제의 해석을 위해서 VOF 방법을 기반으로 하는 새로운 수치 알고리듬을 제안하였다. 새롭게 제안된 자유 표면 추적 기법은 두 개의 수치적 도구, 즉, 오리엔테이션 벡터와 베이비-셀로 대표된다. 오리엔테이션 벡터는 주위 셀의 f 값 분포를 고려하여 셀 안에서 자유 표면 배치에 대한 정보를 준다. 베이비-셀은 셀 안의 지정된 위치에서 균일한 부체적을 표시하도록 고안되었으며, 셀 경계에서의 유체 체적 유속 계산을 위해서 사용되었다. 오리엔테이션 벡터와 베이비-셀을 이용하여 최소의 수치적 번짐 현상을 보이면서 자유 표면의 움직임을 추적할 수 있었다. 본 연구에서 제안한 기법은 자유 표면에서의 물리적 현상에 바탕을 두고 있으며, 더욱이 간단한 구조를 갖기 때문에 3 차원 문제에 쉽게 확장, 적용할 수 있다. 댐 붕괴 문제와 단일 파 전파 문제에 적용하여 제안한 자유 표면 추적 기법의 타당성을 검증하였으며 전체적인 해석 알고리듬의 우수한 성능을 보였다.

후 기

본 연구는 과학기술부 지원 국가지정연구실 사업인 "부정형경계의 열공정 해석, 설계 및 최적화 기술 개발"과 2000 년도 두뇌한국 21 사업에 의하여 지원되었습니다.

참고문헌

(1) Floryan, J. M. and Rasmussen, H., 1989, "Numerical Methods for Viscous Flows with Moving Boundaries," *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 42, No. 12, pp. 323~341.

(2) Hirt, C. W., Cook, J. L. and Butler, T. D., 1970, "A Lagrangian Method for Calculating the Dynamics of an Incompressible Fluid with Free Surface," *J. Comput. Phys.*, Vol. 5, pp. 103~124.

(3) Ramaswamy, B., Kawahara, M. and Nakayama, T., 1986, "Lagrangian Finite Element Method for the Analysis of Two-Dimensional Sloshing Problems," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 6, pp. 659~670.

(4) Okamoto, T. and Kawahara, M., 1990, "Two-Dimensional Sloshing Analysis by Lagrangian Finite Element Method," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 11, pp. 453~477.

(5) Ramaswamy, B. and Kawahara, M., 1987, "Lagrangian Finite Element Analysis applied to Viscous Free Surface Fluid Flow," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 7, pp. 953~984.

(6) Hirt, C. W., Amsden, A. A. and Cook, J. L., 1974, "An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Computing Method for All Flow Speeds," *J. Comput. Phys.*, Vol. 14, pp. 227~253.

(7) Ramaswamy, B. and Kawahara, M., 1987, "Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Method for Unsteady, Convective, Incompressible Viscous Free Surface Fluid Flow," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 7, pp. 1053~1075.

(8) Huerta, A. and Liu, W. K., 1988, "Viscous Flow with Large Free Surface Motion," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 69, pp. 277~324.

(9) 최형권, 1996, "분리유한요소법을 이용한 Navier-Stokes 방정식의 해법에 대한 연구," 공학박사 학위논문, 서울대학교.

(10) Harlow, F. H. and Welch, J. E., 1965, "Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface," *Physics of Fluids*, Vol. 8, No. 12, pp. 2182~2189.

(11) Chan, R. K. -C. and Street, R. L., 1970, "A Computer Study of Finite-Amplitude Water Waves," *J. Comput. Phys.*, Vol. 6, pp. 68~94.

(12) Amsden, A. A. and Harlow, F. H., 1970, " The SMAC Method: A Numerical Technique for Calculating Incompressible Fluid Flow," *Los Alamos Scientific Laboratory Report*, LA-4370.

(13) Hirt, C. W. and Cook, J. L., 1972, "Calculating Three-Dimensional Flows around Structures and over Rough Terrain," *J. Comput. Phys.*, Vol. 10, pp. 324~340.

(14) Ramshaw, J. D. and Trapp, J. A., 1976, "A Numerical Technique for Low-Speed Homogeneous Two-Phase Flow with Sharp Interface," *J. Comput. Phys.*, Vol. 21, pp. 438~453.

(15) Nakayama, T. and Mori, M., 1996, "An Eulerian Finite Element Method for Time-Dependent Free Surface Problems in Hydrodynamics," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 22, pp. 175~194.

(16) Hirt, C. W. and Nichols, B. D., 1981, "Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries," *J. Comput. Phys.*, Vol. 39, pp. 201~225.

(17) Nichols, B. D., Hirt, C. W. and Hotchkiss, R. S., 1980, "SOLA-VOF: A Soultion Algorithm for Transient Fluid Flow With Multiple Free Boundaries," *Los Alamos Scientific Laboratory Report*, LA-8355.

(18) Partom, I. S., 1987, "Application of the VOF Method to the Sloshing of a Fluid in a Patially Filled Cylindrical Container," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 7, pp. 535~550.

(19) Jun, L., and Spalding, D. B., 1988, "Numerical Simulation of Flows with Moving Interfaces," *PhysicoChemical Hydrodynamics*, Vol. 10, No. 5/6, pp. 625~637.

(20) Dhatt, G., Gao, D. M. and Cheikh, A. B., 1990, "A Finite Element Simulation of Metal Flow in Moulds," *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 30, pp. 821~831.

(21) Chan, K. S., Pericleous, K. and Cross, M., 1991, "Numerical Simulation of Flows Encountered during Mold-Filling," *Appl. Math. Modelling*, Vol. 15, pp. 624~631.

(22) Minaie, B., Stelson, K. A. and Voller, V. R., 1991, "Analysis of Flow Patterns and Solidification Phenomena in the Die Casting Process," *J. Engrg. Materials Technology*, Vol. 113, pp. 296~302.

(23) Ashgriz, N. and Poo, J. Y., 1991, "FLAIR: Flux Line-Segment Model for Advection and Interface Reconstruction," *J. Comput. Phys.*, Vol. 93, pp. 449~468.

(24) Usmani, A. S., Cross, J. T. and Lewis, R. W., 1992, "A Finite Element Model for the Simulations of Mould Filling in Metal Casting and the Associated Heat Transfer," *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 35, pp. 787~806.

(25) Rice, A. B., 1993, "Numerical Simulation of Mold Filling Processes," Ph.D. Thesis, Purdue University.

(26) Swaminathan, C. R. and Voller, V. R., 1994, "A Time-Implicit Filling Algorithm," *Appl. Math. Modelling*, Vol. 18, pp. 101~108.

(27) Kothe, D. B., Mjolsness, R. C. and Torrey, M. D., 1994, "RIPPLE: A Computer Program for Incompressible Flows with Free Surfaces," *Los Alamos National Laboratory Report*, LA-12007-MS.

(28) Lewis, R. W., Usmani, A. S. and Cross, J. T., 1995, "Efficient Mould Filling Simulation in Castings by an Explicit Finite Element Method," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 20, pp. 493~506.

(29) Mashayek, F. and Ashgriz, N., 1995, "A Hybrid Finite-Element-Volume-of-Fluid Method for Simulating Free Surface Flows and Interfaces," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 20, pp. 1363~1380.

(30) Rudman, M., 1997, "Volume-Tracking Methods for Interfacial Flow Calculations," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 24, pp. 671~691.

(31) Rider, W. J. and Kothe, D. B., 1998, "Reconstructing Volume Tracking," *J. Comput. Phys.*, Vol. 141, pp. 112~152.

(32) Shin, S. and Lee, W. I., 2000, "Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flow with Moving Free Surface by Selective Volume of Fluid Method," *Int. J. Heat Fluid Flow*, Vol. 21, pp. 197~206.
(33) 김우승, 권용복, 임익태, 1998, "암시적 VOF 방법을 이용한 주조공정의 충전과정 해석," 대한기계학회논문집 B 권, 22, 10, pp. 1401~1409.
(34) 임익태, 김우승, 1998, "암시적 방법을 이용한 충전 알고리즘의 개발," 대한기계학회논문집 B 권, 22, 1, pp. 104~112.
(35) 김민수, 박종선, 이우일, "자유 표면이 존재하는 유체 유동 해석을 위한 VOF 방법 기반의 새로운 수치 기법 (II) - 캐비티 충전 문제와 슬로싱 문제에의 응용," 대한기계학회논문집 (제출).
(36) 김민수, 1998, "자유 표면이 존재하는 유체 유동의 유한 요소 해석," 공학박사 학위논문, 서울대학교.
(37) Tadmor, Z., Broyer, E. and Gutfinger, C., 1974, "Flow Analysis Network (FAN) – A Method for Solving Flow Problems in Polymer Processing," *Polymer Engrg. Sci.*, Vol. 14, pp. 660~665.
(38) Broyer, E., Gutfinger, C. and Tadmor, Z., 1975, "A Theoretical Model for the Cavity Filling Process in Injection Molding," *Transac. Society of Rheology*, Vol. 19, No. 3, pp. 423~444.
(39) Hieber, C. A. and Shen, S. F., 1980, "A Finite-Element/Finite-Difference Simulation of the Injection-Molding Filling Process," *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 7, pp. 1~32.
(40) Kang, M. K., Lee, W. I., Yoo, J. Y. and Cho, S. M., 1995, " Simulation of Mold Filling Process during Resin Transfer Molding," *J. Mater. Proc. Manufact. Sci.*, Vol. 3, pp. 297~313.
(41) Takewaki, H., Nishiguchi, A. and Yabe, T., 1985, "Cubic Interpolated Pseudo-Particle Method (CIP) for Solving Hyperbolic-Type Equations," *J. Comput. Phys.*, Vol. 61, pp. 261~268.
(42) Makuuchi, H., Aoki, T. and Yabe, T., 1997, "Implicit CIP (Cubic-Interpolated Propagation) Method in Two Dimensions," *JSME Int. J., Series B*, Vol. 40, No. 3, pp. 365~376.
(43) van Leer, B., 1977, "Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. IV. A New Approach to Numerical Convection," *J. Comput. Phys.*, Vol. 23, pp. 276~299.
(44) Noh, W. F. and Woodward, P., 1976, "SLIC (Simple Line Interface Calculation)," in *Proceedings of the fifth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, ed. van de Vooren, A. I. and Zandbergen, P. J., Lecture Notes in Physics, Vol. 59, pp. 330~340, Springer-Verlag, New York.
(45) Youngs, D. L., 1982, "Time-Dependent Multi-Material Flow with Large Fluid Distortion," in *Numerical Methods for Fluid Dynamics*, ed. Morton, K. W. and Baines, M. J., pp. 273~285, Academic Press, New York.
(46) Wang, S. P. and Wang, K. K., 1994, "A Net Inflow Method for Incompressible Viscous Flow with Moving Free Surface," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 18, pp. 669~694.
(47) Reddy, J. N. and Gartling, D. K., 1994, *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*, CRC Press, Florida.
(48) Chorin, A. J., 1968, "Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations," *Mathematics of Computation*, Vol. 22, pp. 745~762.
(49) Donea, J., Giuliani, S., Laval, H. and Quartapelle, L., 1982, "Finite Element Solution of the Unsteady Navier-Stokes Equations by a Fractional Step Method," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 30, pp. 53~73.
(50) Kim, J. and Moin, P., 1985, "Application of a Fractional-Step Method to Incompressible Navier-Stokes Equations," *J. Comput. Phys.*, Vol. 59, pp. 308~323.
(51) Ramaswamy, B. and Jue, T. C., 1992, "Some Recent Trends and Developments in Finite Element Analysis for Incompressible Thermal Flows," *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 35, pp. 671~707.
(52) Choi, H. G., Choi, H. and Yoo, J. Y., 1997, "A Fractional Four-Step Finite Element Formulation of the Unsteady Incompressible Navier-Stokes Equations using SUPG and Linear Equal-Order Element Methods," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 143, pp. 333~348.
(53) Kelly, D. W., Nakazawa, S., Zienkiewicz, O. C. and Heinrich, J. C., 1980, "A Note on Upwinding and Anisotropic Balancing Dissipation in Finite Element Approximations to Convective Diffusion Problems," *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 15, pp. 1705~1711.
(54) Brooks, A. N. and Hughes, T. J. R., 1982, "Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 32, pp. 199~259.
(55) Martin, J. C. and Moyce, W. J., 1952, "An Experimental Study of the Collapse of Liquid Columns on a Rigid Horizontal Plane," *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A, Math. Phys. Sci.*, Vol. 244, pp. 312~324.
(56) Laitone, E. V., 1960, "The Second Approximation to Cnoidal and Solitary Waves," *J. Fluid Mech.*, Vol. 9, pp.430~444.
(57) Byatt-Smith, J. G. B., 1971, "An Integral Equation for Unsteady Surface Waves and a Comment on the Boussinesq Equation," *J. Fluid Mech.*, Vol. 49, pp. 625~633.
(58) Maxworthy, T., 1976, "Experiments on Collisions between Solitary Waves," *J. Fluid Mech.*, Vol. 76, pp. 177~185.