

선형파 이론에 의한 분산계수 유도 Derivation of the Dispersion Coefficient based on the Linear Wave Theory

조흥연* · 정신택**

Hong Yeon Cho* and Shin Taek Jeong**

요 旨 : 선형파 이론에서 제시되는 유속분포를 이용하여 파랑인자에 의하여 영향을 받는 분산계수를 이론적으로 유도하였다. 유도된 분산계수는 수심평균, 주기평균된 값으로 천해조건보다 심해조건에서 큰 값을 보이고 있다. 또한, 분산계수값은 연직방향 혼합시간에 비하여 큰 주기 값에서는 특정한 값으로 수렴하고, 매우 작은 주기 값에서는 0으로 되는 일반적인 경향도 보이고 있다. 한편, 단순한 지형 및 가정하에서 유도된 본 분산계수를 보다 실질적인 상황에서도 적용할 수 있고, 천해영역의 조건을 반영할 수 있도록 보완·수정할 필요가 있다.

핵심용어 : 분산계수, 연직방향 혼합시간, 선형파 이론

Abstracts □ Dispersion coefficient influenced by the wave parameters was derived analytically using the vertical velocity distribution based on linear wave theory. It is the depth- and wave period-averaged value and shows larger values in deep water condition than in shallow water condition. It also shows the general pattern of the dispersion coefficient in the oscillatory flows, i.e. it converges the specific value as the wave period is much larger than the vertical mixing time but it approaches zero as the wave period is much smaller than the vertical mixing time. The dispersion coefficient derived in the condition of the simple assumption have to be modified in order to consider the shallow water condition or the real condition.

Keywords : Dispersion coefficient, Vertical mixing time, Linear wave theory

1. 연구의 목적 및 필요성

연안해역으로 유입되는 물질의 이동 및 확산에 관한 예측연구는 수치모형개발과 확산(또는 분산)계수 관측에 중점을 두고 수행되어 왔다. 수치모형의 보정 및 검증 을 위한 (오염)물질의 유입량 및 농도관측과 더불어 각종 부표(drogue), 형광물질 등을 이용한 분산계수 측정 연구가 다방면으로 수행되어 왔다.

그러나, 대부분의 연구는 해역 (공간평균) 분산계수, 또는 조류(tidal current)가 우세한 해역에서의 (시간평균) 분산계수의 현장관측 및 이론적인 연구에 집중되어 있다(Lewis, 1997; Bowden, 1965). 즉, 조류의 시간 규모(time scale)보다 작은 단주기 파랑에 의한 영향

이 배제되고, 국지적인 계수의 변화가 고려되지 않고 있다. 또한, 파랑작용이 우세한 해역에서의 물질확산 및 쇄파가 확산에 미치는 영향에 관한 연구(Pearson, *et al.*, 1997) 등이 추진되고 있는 현 실정에서 파랑에 의한 분산계수의 이론적인 연구는 매우 중요한 과제이다.

본 연구에서는 선형파이론에 근거하여 분산계수를 이론적으로 유도·분석하였다. 유도된 분산계수는 주기평균된 값으로 연직확산계수와 파랑 매개변수(파수, 파장, 파고, 수심)의 함수로 표현할 수 있다.

2. 지배방정식 및 경계조건

분산계수를 이론적으로 유도하기 위해서는 연직방향

*한국해양연구소 연안·항만공학연구본부 (Coastal and Harbor Engineering Research Laboratory, Korea Ocean Research & Development Institute, Ansan, Seoul 425-600, Korea)

**원광대학교 건축·도시·토목환경공학부 (School of Architecture, Urban, Civil and Environmental Engineering, Wonkwang Univ., Iksan, Chonbuk, 570-749, Korea)

의 농도편차의 분포를 먼저 유도하여야 한다. 따라서, Fischer *et al.*(1979)이 농도편차분포에 대하여 제안한 식을 지배방정식(식 1)으로 사용하였으며, 지배방정식의 풀이결과와 분산계수의 관계식을 이용하여 분산계수를 구하게 된다. 유속편차의 연직분포는 선형파이론에 의하여 제시된 값을 사용하였으며, 연직방향유속은 무시하였다.

$$\frac{\partial C'}{\partial t} + U \frac{\partial C_0}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C'}{\partial z^2} \quad (1)$$

여기서, $C'(x, z, t)$ = 농도의 연직방향(z) 편차, $C_0(x)$ = 연직방향 평균농도, D = 연직방향 확산계수, $U'(x, z, t)$ = 흐름방향(x)의 연직속도분포의 편차이다. 평면방향의 유속, 평균유속을 각각 $U(x, z, t)$, $U_0(x, t)$ 라 하면, $U' = U - U_0$ 이며, 선형파 이론에 의하면 식 (2)로 표현할 수 있다.

$$U = \frac{gka}{\sigma} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cos(kx - \sigma t)$$

$$U_0 = \frac{gka}{\sigma kh} \frac{\sinh k}{\cosh kh} \cos(kx - \sigma t)$$

$$U' = \frac{gka}{\sigma} \left\{ \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} - \frac{1}{kh} \frac{\sinh kh}{\cosh kh} \right\} \cos(kx - \sigma t) \quad (2)$$

여기서, g = 중력가속도, k = 파수(wave number), a = 파의 진폭(wave amplitude), σ = 각진동수(angular frequency)이다.

지배방정식 (1)은 Carslaw & Jaeger(1959)가 제시한 방법(시간함수로 주어진 외력조건을 시간과 무관한 외력조건으로 변환하여 미분방정식의 해를 구하는 방법)으로 변형하면, 해를 구할 수 있다. 변형된 방정식과 경계조건, 초기조건은 식 (3)에 제시되었으며, 변형된 방정식에서 얻어진 해를 적분(식 4)하면 변형전의 방정식에 해당하는 해를 구할 수 있다.

$$\frac{\partial C^*}{\partial t} - D \frac{\partial^2 C^*}{\partial z^2} = -U' \Big|_{z=10} \frac{\partial C_0}{\partial x} \quad (3)$$

$$C^*(z, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial C^*}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial C^*}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0 \quad (4)$$

$$C' = \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial t} C^*(z, t-t_0; t_0) dt_0$$

3. 해석해의 유도과정

식 (3)에서 $C^*(z, t) = v(z) + w(z, t)$ 로 표현하고, 변수

분리법을 적용하여 $w(z, t)$ 에 대한 일반해를 구하고, 경계조건 및 초기조건을 적용하여 계수를 결정하면 C^* 를 구할 수 있으며, 식 (4)에 제시된 적분식을 이용하여 $C'(z, t)$ 를 유도하여, 다음과 같은 결과 식을 얻을 수 있다(식 5).

$$C' = - \sum_{n=1}^{\infty} E(n) \left(1 + \frac{p^4}{\sigma^2}\right)^{-1/2} \frac{p^2}{\sigma} \cos\left(\frac{n\pi z}{h}\right) \sin(kx - \sigma t + \theta') \quad (5)$$

여기서, $E(n)$, p , θ' 는 각각 식 (6), (7), (8)과 같다.

$$E(n) = \frac{2}{h} \frac{gka}{\sigma D} \cos(kx - \sigma t_0) \frac{\partial C_0}{\partial x} \cdot SCC \cdot \frac{\tanh kh}{k^3}$$

$$SCC = \left(\frac{kh}{n\pi}\right)^2 \left[\left(1 + \left(\frac{kh}{n\pi}\right)^2\right)^{-1} + 2 \cdot (-1)^n - 1 \right] \quad (6)$$

$$p^2 = D \frac{(n\pi)^2}{h^2} \quad (7)$$

$$\cos \theta' = - \left(1 + \frac{p^4}{\sigma^2}\right)^{-1/2},$$

$$\sin \theta' = \frac{p^2}{\sigma} \left(1 + \frac{p^4}{\sigma^2}\right)^{-1/2} \quad (8)$$

식 (5)에 제시된 농도분포의 연직방향편차와 분산계수 ($C \sim K$)와의 관계식을 이용하여 순간적인 분산계수 (instantaneous dispersion coefficient)를 구한 후, 파랑 주기에 대하여 시간적분하면 주기평균된 분산계수 KD 를 다음과 같이 유도할 수 있다(식 9).

$$K_D = \frac{1}{T} \int_0^T \left(- \frac{1}{h} \int_{-h}^0 U' C' dz \cdot \frac{\partial C_0}{\partial x} \right) dt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} - \left(\frac{gka}{\sigma}\right)^2 \frac{1}{2D} \frac{p^4}{\sigma^2} \frac{(thkh)^2}{k^2(kh)^2} \cdot SCC$$

$$\cdot \frac{\left(\frac{kh}{n\pi}\right)^2}{1 + \left(\frac{kh}{n\pi}\right)^2} \left(1 + \frac{p^4}{\sigma^2}\right)^{-1} \quad (9)$$

이론적으로 유도된 분산계수의 식이 급수형태이고, 매우 복잡한 형태를 보이고 있으나, 파랑매개변수 (kh), p^2 (연직방향 혼합시간, 식 7 참조) 등의 함수로 표현되고 있음을 알 수 있다.

4. 분산계수 추정식에 사용된 가정

Fischer *et al.*(1979)이 제시한 분산계수 추정과정(연

직방향 농도편차에 대한 지배방정식 및 농도편차와 분산계수의 관계식) 및 본 연구에서 분산계수를 유도하는 과정에 포함된 기본 가정은 다음과 같다.

- (1) 물질의 용출, 소멸, 반응과정은 생략하였다.
- (2) 연직방향의 평균과정에서 발생하는 분산계수이다. 즉, 평면방향의 분산계수이다.
- (3) 연직방향의 이송항 및 유속을 무시하였다.
- (4) 흐름방향의 확산보다 연직방향의 농도변화가 우세하다고 가정하였다.
- (5) 시간에 대한 수심평균 농도의 변화를 무시하였으며, 흐름방향의 농도변화는 분산계수 추정영역에서 일정하다고 가정하였다.
- (6) 해역에서의 파랑(파고)변화를 무시하였다.
- (7) 계산영역에서 연직방향 확산계수를 일정하다고 가정하였다.

5. 파랑조건에 의한 분산계수의 변화

유도된 분산계수는 일반적으로 사용되는 파랑조건 매개변수(kh 값), 즉 천해조건, 심해조건 및 중간천이조건에 대하여 값의 변화를 분석할 필요가 있다. 분산계수를 산정하기 위해서는 연직확산계수(D), 파랑조건, 수심 등의 입력자료가 필요하며, 파랑의 분산관계식(dispersion relation)을 이용하여 파장(파수)을 계산하고, 계산된 값을 식 (8)에 대입하면 된다.

그러나, 본 연구에서는 파랑 매개변수에 대한 분산계수의 전반적인 변화 양상을 파악하기 위하여 우선 혼합시간 매개변수(p^2/σ), (kh) 변화에 따른 무차원 분산계수를 산정하였다. 혼합시간 매개변수는 식 (10)으로 표현할 수 있다.

$$\frac{p^2}{\sigma} = \frac{D \frac{(n\pi)^2}{h^2}}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{n^2 \pi^2}{2\pi} \cdot \frac{T}{T_c}$$

$$T_c = \frac{h^2}{D} \quad (10)$$

여기서, T_c = 연직방향 혼합시간이다.

식 (10)에 제시된 변수를 제외하고 나머지 계수를 고정하면 Fischer *et al.*(1979)가 선형속도분포에서 제시한 경우와 동일한 결과를 얻을 수 있다. 즉, $T_c \gg T$ 인 경우에는 분산계수가 0이 되고, $T > T_c$ 인 경우에는 분산계수가 특정한 값으로 수렴하고 있음을 알 수 있다.

즉, 본 연구결과에서 유도된 분산계수도 일반적으로 선형유속분포를 가정한 왕복성 흐름조건에서 유도된 분산계수의 경향과 일치하고 있다. 따라서, 본 유도결과도 혼합시간 매개변수의 측면에서는 이전의 유도식과 동일한 결과를 보이고 있음을 알 수 있다.

또한, 파랑 매개변수인 (kh)를 변화시켜 가며 분산계수의 변화를 분석한 결과, 심해조건($kh > \pi$)에서의 분산계수에 비하여 천해조건($kh < 1/4$)으로 이동할수록 분산계수값이 현저하게 작아지는 것으로 파악되었다. 이는, 천해조건으로 이동할수록, 연직방향의 속도편차가 현저하게 작아지는 경향 때문인 것으로 파악되었다. 그러나, 천해영역으로 이동하면서 발생하는 수심의 변화 및 그로 인한 파고의 변화, 파장의 변화 등을 종합적으로 감안하여 분산계수의 값을 파악하여야 할 것으로 사료된다.

일반적으로 천해영역으로 이동할수록 파랑의 비선형성, 저층의 영향, 쇄파 등의 영향으로 실질적인 분산계수가 증가할 것으로 예상되는 것과는 반대경향을 보이고 있다. 따라서, 이에 대한 적절한 평가를 수행하기 위하여는 보다 합리적인 값을 사용하여 분산계수를 추정할 필요가 있으며, 선형파 이론에 의하여 추정된 분산계수의 보완(예, 쇄파의 영향을 정성적으로 고려하거나 Stokes Drift 영향을 이론적으로 포함, 연직방향 유속을 고려) 및 수정도 필요할 것으로 사료된다.

6. 향후 연구방향

이론적인 유도를 위하여 많은 가정이 포함되어 있기 때문에 결과가 비현실적인 경향을 보일 수도 있다. 따라서, 적절한 수치기법을 도입하여 분산계수를 산정할 수 있는 수치모형을 수립하고, 유도된 해석해와의 비교를 통하여 모형을 검증하고, 연안해역에서의 파랑변형모형 및 관측성과에서 제시되는 연직방향 분산계수의 분포, 파고 분포 등 파랑조건에 의한 변화를 고려하여 보다 현실적인 경향을 보이고, 정확한 확산계수를 추정하는 방법에 대한 연구가 추진되어야 한다.

사 사

본 연구성과는 Post-Doc. 연수과정에서 수행된 결과의 일부이며, 재정적인 지원을 해준 과학재단에 사의를 표합니다.

부록 : 분산계수 유도과정

지배방정식 및 관계식

$$\frac{\partial C'}{\partial t} + U \frac{\partial C_m}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C'}{\partial z^2} \tag{A1}$$

$$hK \frac{\partial C_m}{\partial x} = \int_{-h}^0 U' C' dz \tag{A2}$$

여기서, $C'(z, t) = C - C_m$ (농도편차), $U'(z, t) = U - U_m$ (유속편차), $C =$ 농도, $C_m =$ 평균농도, $U =$ 유속, $U_m =$ 평균유속, $h =$ 수심, $K =$ 분산계수이다.

식 (A1)을 식 (A3)의 형태로 변형한다.

$$\frac{\partial C'}{\partial t} - D \frac{\partial^2 C'}{\partial z^2} = -U'(z, t) \frac{\partial C_m}{\partial x} + \tag{A3}$$

식 (A3)는 식 (A4) 형태의 시간불변방정식과 식 (A5)의 관계식으로 표현할 수 있다(Carlsaw & Jaeger, 1959).

$$\frac{\partial C^*}{\partial t} - D \frac{\partial^2 C^*}{\partial z^2} = -U'(z, t_0) \frac{\partial C_m}{\partial x} \tag{A4}$$

$$C' = \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial t} C^*(z, t-t_0; t_0) dt \tag{A5}$$

식 (A4) 방정식의 초기조건, 경계조건은 식 (A6)로 표현할 수 있다.

$$C^*(z, 0) = 0 : IC$$

$$\frac{\partial C^*}{\partial z} \Big|_{z=0, -h} = 0 : BC \tag{A6}$$

식 (A5)의 해를 식 (A7) 형태로 가정하면, 식 (A4), (A6)는 식 (A8), (A9) 형태로 변형할 수 있다(Carlsaw & Jaeger, 1959).

$$C^*(z, t) = v(z) + w(z, t) \tag{A7}$$

$$D \frac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2} = U'(z, t_0) \frac{\partial C_m}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w(z, t)}{\partial t} - D \frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial z^2} = 0 \tag{A8}$$

$$v(z) = -w(z, 0) : IC$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0, -h} = 0 : BC$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0, -h} = 0 : BC \tag{A9}$$

선형파 이론에 의하면 연직방향 유속분포 $U(z, t)$, U_m 은 식 (A10)으로 표현된다.

$$U = \frac{gka}{\sigma} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cos(kx - \sigma t)$$

$$U_m = \frac{gka}{\sigma kh} \frac{\sinh kh}{\sinh kh} \cos(kx - \sigma t)$$

$$U' = \frac{gka}{\sigma} \left\{ \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} - \frac{1}{kh} \frac{\sinh kh}{\sinh kh} \right\} \cos(kx - \sigma t) \tag{A10}$$

여기서, $g =$ 중력가속도, $k =$ 파수(wave number), $\sigma =$ 각진동수(angular frequency), $a =$ 진폭(=H/2; H=파고)이다.

식 (A10)을 식 (A8)의 첫째 식에 대입·적분하고, 식 (A9)의 경계조건을 적용하면 식 (A11)을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{gka}{\sigma D} \cdot CC \cdot \left\{ \frac{1}{k} \frac{shkh'}{chkh} - \frac{thkh}{kh} \cdot z - \frac{thkh}{k} \right\}$$

$$CC = \frac{\partial C_m}{\partial x} \cos(kx - \sigma t_0) \tag{A11}$$

여기서, $h' = h + z$, $sh = \sinh$, $ch = \cosh$, $th = \tanh$ 이다.

식 (A11)을 적분하면 $v(z)$ 에 대한 식 (A12)를 얻을 수 있다.

$$v(z) = \frac{gka}{\sigma D} \cdot CC \cdot \left\{ \frac{1}{k^2} \frac{chkh'}{chkh} - \frac{thkh}{kh} \frac{z^2}{2} - \frac{thkh}{k} \cdot z + K_1 \right\} \tag{A12}$$

여기서, $K_1 =$ 상수이다.

식 (A8)의 $w(z, t)$ 방정식으로부터 변수분리법에 의하여 일반해를 구하고, 식 (A9)의 경계조건을 적용하여 무의미한 해를 배제하면 식 (A13) 형태의 해를 얻을 수 있다.

$$w(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-p^2 t) \cdot A(n) \cdot \cos\left(\frac{n\pi z}{h}\right)$$

$$p^2 = D \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 \tag{A13}$$

식 (A9)의 초기조건을 식 (A12), (A13)을 적용하고, Fourier 적분전개식(구간 : $-h \sim 0$)을 이용하면 식 (A14), (A15)에 제시된 급수 $A(n)$ 을 얻을 수 있다.

$$A(0) = -\frac{gka}{\sigma D} \cdot CC \cdot thkh \cdot \left(\frac{1}{hk^3} - \frac{h}{3k} + K_1 \right) \tag{A14}$$

$$A(n) = \frac{2}{h} \frac{gka}{\sigma D} \cdot CC \cdot SCC \cdot \frac{thkh}{k^3}$$

$$SCC = \left(\frac{kh}{n\pi} \right)^2 \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{kh}{n\pi} \right)^2} + 2(-1)^n - 1 \right] \quad (A15)$$

또한, 식 (A12), (A13)을 (A7)에 대입·정리하면, 식 (A4)의 해[식 (A16)]를 얻을 수 있다.

$$C^*(z, t) = v(z) + A(0) \cdot \exp(-p^2 t) + \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-p^2 t) \cdot A(n) \cdot \cos\left(\frac{n\pi z}{h}\right) \quad (A16)$$

식 (A16)을 식 (A5)에 대입하여 적분을 수행하면 식 (A17)에 제시된 형태의 $C'(z, t)$ 를 얻을 수 있다.

$$C'(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A'(n) \cdot \frac{p^2}{\sigma} \cdot \frac{\partial C_m}{\partial x} \cdot \sin(kx - \sigma t + \theta') \cdot \left(1 + \frac{p^4}{\sigma^2}\right)^{-1/2} \quad (A17)$$

$$A(n) = A'(n) \cdot \cos(kx - \sigma t_0)$$

$$\cos \theta' = \left(1 + \frac{p^4}{\sigma^2}\right)^{-1/2},$$

$$\sin \theta' = \frac{p^2}{\sigma} \left(1 + \frac{p^4}{\sigma^2}\right)^{-1/2} \quad (A18)$$

최종적으로 식 (A17)의 결과와 식 (A2)의 관계식을 이용하면 분산계수를 구할 수 있다.

$$K = -\left(\frac{gka}{\sigma}\right)^2 \frac{1}{2D} \frac{p^4}{\sigma^2} \frac{(thkh)^2}{k^2(kh)^2} \cdot SCC \cdot \frac{\left(\frac{kh}{n\pi}\right)^2}{1 + \left(\frac{kh}{n\pi}\right)^2} \cdot \left(1 + \frac{p^4}{\sigma^2}\right)^{-1} \quad (A19)$$

참고문헌

- Bowden, K.F., 1965. Horizontal mixing in the sea due to a shearing current, *J. of Fluid Mechanics*, Vol.21, pp.83-95.
- Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C., 1959. *Conduction of Heat in Solids*, Oxford Press.
- Fischer H.B., List, E.J., Koh, R.C.Y., Imberger, J. and Brooks, N.H., 1979. *Mixing in Inland and Coastal Waters*, Academic Press.
- Lewis, R., 1997. *Dispersion in Estuaries and Coastal Waters*, John Wiley & Sons.
- Pearson, J.M., Guymer, I., Coates, L.E. and West, J.R., 1997. *Mixing Processes due to Breaking Wave Activity in the Coastal Zone*, *Coastal Dynamics '97*, pp.197-206.