

B-스플라인 고차패널법에 의한 3차원 포텐셜 유동 해석

김건도*, 황의상*, 이창섭**

A B-Spline Higher Order Panel Method for Analysis of Three Dimensional Potential Flow

by

Gun-Do Kim*, Ui-Sang Hwang* and Chang-Sup Lee**

요 약

기하학적 형상과 유동의 해를 B-스플라인으로 표현하는 3차원 고차 패널법은 프로펠러 주위의 유동을 해석하기 위해 개발되었다. 제어점이 패널내에 놓이는 경우, 고차의 다이폴과 소스스에 의해 유기되는 자기 유기 포텐셜의 특이 거동은 2차 변환(quadratic transformation)을 통하여 제거하였으며, 특이 부분은 해석적인 적분으로 비특이 부분은 정도 높은 Gauss 구적법으로 계산함으로써 자기 포텐셜을 정도 높게 구할 수 있음을 보였다. 또한, 날개 뒷날에서의 압력 점프의 값이 명시적으로 영이 되도록하는 동역학적 Kutta 조건식을 도입하고, 이의 적용이 안정된 해를 보장함을 확인하였다. 수치 실험을 통하여, 제안된 수치해석 기법이 안정적이고 정확한 해를 줌을 확인하였으며, 특히 저차 패널법과 비교하여 적은 수의 패널로 동일한 정도의 해를 유지할 수 있음을 보였다.

Abstract

A higher order panel method based on B-spline representation for both the geometry and the velocity potential is developed for the analysis of steady flow around marine propellers. The self-influence functions due to the normal dipole and the source are desingularized through the quadratic transformation, and then the singular part is integrated analytically whereas the non-singular part is integrated using Gaussian quadrature. A null pressure jump Kutta condition at the trailing

접수일자: 1999년 11월 5 일, 재접수일자: 2000년 3월 27 일

*학생회원, 충남대학교 선박해양공학과

**정회원, 충남대학교 선박해양공학과

edge is found to be effective in stabilizing the solution process and in predicting the correct solution. Numerical experiments indicate that the present method is robust and predicts the pressure distribution around lifting bodies with much fewer panels than existing low order panel methods.

1. 서 언

Hess/Smith[1] 이후로 패널법은 항공동역학이나 유체동역학 분야의 설계를 함에 있어서 매우 유용한 도구로 이용되어 왔으며, 지금까지 다양한 종류의 패널법들이 꾸준히 개발, 발전되어 왔다. Morino[2]는 포텐셜을 기저로 한 패널법을 소개함으로써, 기존의 속도를 기저로 한 패널법에 비해 수렴성과 해의 정도를 향상시켰으며, Lee[3], Hoshino[4]에 의해서 공동이 발생하지 않은 정상 상태의 프로펠러 문제에서의 적용이 최초로 이루어졌다. 이어서, Hsin[5], 문일성[6] 등은 각각 비정상 프로펠러의 성능을 추정하여 좋은 결과를 보여주었으며, 최근 김영기[7]에 의해 비정상 공동 프로펠러의 성능 해석을 수행하는 단계까지 발전되었다. 그러나 이제까지의 포텐셜을 기저로 한 저차 패널법은 각 패널에 있어 포텐셜이 일정하다고 가정하고 있으며, 물체표면에서의 속도를 계산하기 위해서 이웃하는 패널사이에 유한차분법을 적용하기 때문에 근본적으로 수치적 오류를 피할 수 없게 된다. 이러한 수치적 오류는 양력을 발생하는 물체의 뒷날과 날개끝 근처에서의 정확도를 낮추는 결과를 가져온다. 본 논문의 목적은 이 같은 부분의 속도와 압력을 보다 정확히 예측할 수 있는 고차 패널법의 개발에 있다. 고차 패널법은 Brebbia 등[8]에 잘 소개되어 있으며, 최근에는 홍사영/최항순[9]에 의하여 선체 주위의 유동 해석에 적용된 바도 있으며, 박일룡/전호환[10]이 수중익에 대한 3차원 조파저항 문제를 해석한 바 있다. 지금까지 보급되어 있는 고차 패널법은 패널 내부에서의 함수의 변화를 고차의 다항식으로 표현하고 있으며, 통상의 문제에서는 성공적으로 사용되고 있다. 본 연구에서 채택하는 B-스플라인을 기저로 한 고차 패널법은 물체의 형상뿐 만이 아니라 물체 표면에서의 포텐셜도 B-스플라인으로

표현함으로써 포텐셜의 변화를 원하는 높은 차수까지 정도를 보장할 수 있다는 큰 장점을 갖고 있다. 물체형상과 포텐셜을 표현하기 위해 B-스플라인 기저함수를 사용하면, 기저함수의 미분을 정확하게 구할 수 있기 때문에, 더 이상 포텐셜로부터 속도를 계산하기 위해서 유한차분에 의한 수치미분을 수행할 필요가 없다. 또한, 물체와 포텐셜을 표현하기 위한 B-스플라인의 차수를 증가시키는 것에 제한이 없기 때문에, 원칙적으로 어떠한 차수의 해도 구할 수가 있다. B-스플라인을 기저로 한 고차패널법은 Hsin 등[11]이 2차원 물체 주위의 유동을 해석함으로써 처음으로 소개되었으며, Maniar[12]에 의해서 3차원 고차패널법으로 확장되었다. Maniar는 논문에서 영향함수(influence function)의 적분을 B-스플라인 기저함수로부터 유도된 계수들로 이루어진 다항식으로 표현하였는데, 이는 Maniar에 의해 채택된 구형 부유체와 해양구조물을 비롯한 대부분의 물체의 형상을 표현함에 있어서 적합하지만 선박의 형상과 같은 복잡한 형상 표현에 이용되며 현재 표준으로 자리잡고 있는 NURBS(Non-Uniform Rational B-Spline)곡면으로의 확장에는 적합하지 못한 단점이 있다. 본 논문의 궁극적인 목표는 NURBS에 의한 3차원 형상과 포텐셜 표현에 있으며, 최근 발표된 Lee/Kerwin[13]에서 제시한 영향함수 적분방법을 일반적인 3차원 형상에도 적용할 수 있도록 정식화하는데 있다. 본 논문에서는 물체 표면에 분포되어 있는 법선 다이폴과 소오스에 의한 영향함수를 특이부분과 비특이부분으로 분리하여, 특이부분은 해석적으로 적분을 수행하고 비특이부분은 Gauss 구적법을 이용하였다. 3차원 패널에서의 비특이화 과정은 Maniar에 의해 제안된 2차변환법을 사용하였으나, Maniar의 경우와 같이 다항식으로 전개하는 방법을 택하지 않고 비특이화 된 부분을 Gauss 구적법에 의해

수치적으로 계산하는 방법을 택하였다. 이 방법은 Maniar보다 수학적, 수치적으로 훨씬 간단하면서도 유기적분의 계산에 있어서 높은 정도를 희생시키지 않는 장점이 있다. 본 논문에서는 B-스플라인을 이용하여 물체의 형상을 표현하는 방법 및 B-스플라인에 기저한 고차패널법의 정식화 과정을 보이고, 제시한 수치해석기법의 타당성을 확인하기 위하여 해석해가 있는 간단한 3차원 형상인 구, 저차패널법에 의한 해가 존재하는 원판형 날개의 양력 문제의 해석 결과를 보인다. 수치 실험 결과는 새로이 제안된 B-스플라인 고차 패널법이 3차원 물체 주위의 유체역학적 거동을 예측하는 데에 유용한 도구가 될 수 있음을 보인다.

2. B-스플라인에 의한 기하학적 형상 및 포텐셜의 표현

물체의 경계는 패치의 연속으로 표현될 수 있으며, 각 패치의 기하학적 형상과 패치위에서의 포텐셜의 변화는 2개의 독립적인 매개변수 (u, v) 의 함수로 표현될 수 있다. 선체의 표면, 프로펠러의 날개, 후류면 등은 서로 중첩되지 않는 패치로 표현 가능하다. B-스플라인을 이용하여 형상을 표현하는 방법은 개념적으로 동일하기 때문에 본 논문에서는 양력을 발생하는 물체와 그의 후류를 각각 표현하기 위한 2개의 패치만 있는 경우에 대하여 모든 정식화 과정을 보이나, 다른 패치와의 상호작용을 포함하는 경우에는 쉽게 확장이 가능하다. 3차원 곡면 패치를 다음과 같이 매개변수로 표현하기로 하자.

$$\vec{x} = \vec{x}(u, v) \quad (1)$$

여기서 u 와 v 는 각각의 공간에서 단조증가하는 서로 독립된 매개변수이다. 우리는 우선 매개변수 u 의 공간을 정의하고, 동일한 방법으로 매개변수 v 의 공간을 정의하고자 한다. 매개변수의 정의역 $u = [0, u_{\max}]$ 는 사용가능한 매개변수 공간이라고 불리며, 이 공간을 \widehat{N}^p 개의 등 간격인 스패운으로 나누어, $\{1, 2, \dots, \widehat{N}^p - 1\}$ 에 내부 매듭을 놓는다. 사용가능한 매개변수 공간은 양끝에 $(p+1)$ 개

의 영과 $(p+1)$ 개의 u_{\max} 를 더하여 $p=2$ 의 경우에 다음과 같은 균일 매듭벡터로 완성된다.

$$\vec{U}^p = \{0, 0, 0, 1, 2, \dots, \widehat{N}^p - 1, \widehat{N}^p, \widehat{N}^p, \widehat{N}^p\}^T \quad (2)$$

위 식을 $u_{\max} = 1.0$ 가 되도록 다시 정규화하면,

$$\vec{U}^p = \{0, 0, 0, 1/\widehat{N}^p, \dots, (\widehat{N}^p - 1)/\widehat{N}^p, 1, 1, 1\}^T \quad (3)$$

또한, 동일한 방법으로 (3)식에 직교하는 정규화된 매개변수 공간을 정의할 수 있으며, $q=2$ 의 경우 균일 매듭 벡터는 다음과 같이 된다.

$$\vec{V}^q = \{0, 0, 0, 1/\widehat{M}^q, \dots, (\widehat{M}^q - 1)/\widehat{M}^q, 1, 1, 1\}^T \quad (4)$$

위 집합의 양단에도 $q+1$ 개의 중첩된 원소를 볼 수 있다. 물체 표면 패치를 표현하기 위하여, (p, q) -차 B-스플라인 기저함수를 채택하여, 이들 함수의 가중된 합의 형태로 표면을 다음과 같이 표현한다.

$$\vec{x}(u, v) = \sum_{i=0}^{\widehat{N}^p - 1} \sum_{j=0}^{\widehat{M}^q - 1} \vec{x}_{i,j}^p \widehat{N}_i(u) \widehat{M}_j(v) \quad (5)$$

여기서 $\widehat{N}_i(u)$, $\widehat{M}_j(v)$ 는 각각 p , q -차의 B-스플라인 기저함수이다. $\vec{x}_{i,j}^p$ 는 기하학적 제어 꼭지점, \widehat{N}^p 및 \widehat{M}^q 는 각각 매개변수 (u, v) 방향의 기하학적 꼭지점의 개수이다. 또한, $\widehat{N}_i(u)$ 및 $\widehat{M}_j(v)$ 는 일반적으로 u , v 의 유리함수이지만, 본 연구에서는 정수 B-스플라인만을 다룬다. 그러나, 여기에서 개발된 수치 기법은 NURBS로 표현되는 일반적인 형상을 표현하는 데에 직접 확장될 수 있다. 본 논문의 목표는 물체의 표면에서의 속도 포텐셜 $\phi(u, v)$ 를 구하는 것이다. 그러나, 속도 포텐셜을 직접 다루는 것보다 포텐셜을 (5)식에서와 같이 B-스플라인의 가중된 합으로 표현하고, 포텐셜 제어 꼭지점 $\phi_{i,j}^p$ 를 다룬다.

$$\phi(u, v) = \sum_{i=0}^{\widehat{N}^p - 1} \sum_{j=0}^{\widehat{M}^q - 1} \phi_{i,j}^p \widehat{N}_i(u) \widehat{M}_j(v) \quad (6)$$

여기서 $\widehat{N}_i(u)$, $\widehat{M}_j(v)$ 는 B-스플라인 기저함수, $\phi_{i,j}^p$ 는 포텐셜 제어 꼭지점, \widehat{N}^p 및 \widehat{M}^q 는 각각

(u, v)방향의 포텐셜 제어 꼭지점의 수이다. 포텐셜 제어 꼭지점의 수 ($N^p \cdot M^q$)와, 기저함수 $N_i(u), M_j(v)$ 는 기하학적 형상을 표현하기 위한 경우와 다를 수 있지만, 기하학적 형상과 포텐셜을 표현하는 사용 가능한 매개변수의 공간은 동일하여야 한다. 포텐셜 꼭지점의 도입으로 경계치 문제의 미지수는 포텐셜 값 자체가 아니라 포텐셜을 표현하는 (6)식에서 B-스플라인의 계수에 해당하는 포텐셜 제어 꼭지점이 된다. (u, v)-방향의 포텐셜 매듭 벡터는 (3), (4)식과 유사하게 $p=q=2$ 의 경우에는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \vec{U} &= \{0, 0, 0, 1/N^p, \dots, (N^p-1)/N^p, 1, 1, 1\}^T \quad (7) \\ \vec{V} &= \{0, 0, 0, 1/M^q, \dots, (M^q-1)/M^q, 1, 1, 1\}^T \end{aligned}$$

사용 가능한 매개변수 공간에서의 (u, v)-방향 포텐셜 스패인의 갯수는 (N^p, M^q), 포텐셜 제어 꼭지점의 갯수는 각각 $N^p = N^p + p$, $M^q = M^q + q$ 가 된다. Fig. 1은 기하학적 제어 꼭지점으로 생성되는 대표적인 곡면 패치와 내부 매듭에 의해 만들어진 포텐셜 패널의 경계면선을 보여준다. 이 패치는 (3,3)-차 B-스플라인 함수, ($\widehat{N}^p, \widehat{M}^q$)=(4,4) 및 (N^p, M^q)=(40,40)에 의해 생성되었다.

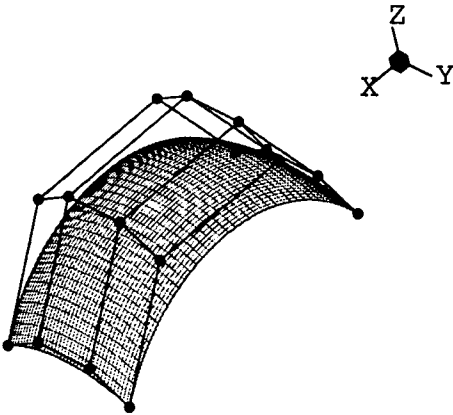


Fig. 1 A surface patch generated by B-splines with $(p, q) = (3, 3)$, $(\widehat{N}^p, \widehat{M}^q) = (4, 4)$ and $(N^p, M^q) = (40, 40)$

3. 적분 방정식의 이산화

물체표면에서의 포텐셜은 물체 표면 S_B 과 후류면 S_W 에 분포된 법선 다이폴과, 소오스의 영향으로 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\phi}{2} &= \int_{S_B} \left\{ (-\phi) \frac{\partial G}{\partial n} + \frac{\partial \phi}{\partial n} G \right\} ds \\ &+ \int_{S_W} (-\Delta \phi) \frac{\partial G}{\partial n} ds \end{aligned} \quad (8)$$

여기서, ϕ 는 섭동 포텐셜, \hat{n} 은 물체표면 및 후류면에 수직인 단위 법선벡터, G 는 다음과 같이 정의되는 Green 함수이다.

$$G = \frac{-1}{4\pi r} \quad (9)$$

후류에 있는 다이폴의 세기는 날개 뒷날에서의 포텐셜 점프 $\Delta \phi$ 로 표현된다. 포텐셜을 기저로 한 정식화에서는 S_B 에서의 포텐셜의 법선방향 미분이 다음과 같은 운동학적 경계조건으로부터 결정된다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\hat{n} \cdot \vec{U}_r \quad (10)$$

여기서 \vec{U}_r 는 고정된 물체로 유입되는 상대유속 벡터이다. 앞절에서 보인 바와 같이, 곡면 패치를 (7)식을 사용하여 (N^p, M^q)개의 패널로 이산화하고, (정상 유동의 경우) 후류면 패치는 스패인 방향으로 M^q 개의 세기가 일정한 다이폴 띠를 갖도록 이산화 한다. 즉,

$$\begin{aligned} \frac{\phi}{2} &+ \sum_{\nu=0}^{N^p-1} \sum_{\mu=0}^{M^q-1} \int_{S_{\nu,\mu}} \phi \frac{\partial G}{\partial n} dS \\ &+ \sum_{\mu=0}^{M^q-1} \int_{S_{\nu,\mu}} \Delta \phi \frac{\partial G}{\partial n} dS = \sum_{\nu=0}^{N^p-1} \sum_{\mu=0}^{M^q-1} \int_{S_{\nu,\mu}} \frac{\partial \phi}{\partial n} G dS \end{aligned} \quad (11)$$

포텐셜 (6)식을 (11)식에 대입하면, 물체 표면위의 제어점 $\vec{x}_c(u_c, v_c)$ 에 대하여 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ \sum_i \sum_j N_i(u_c) M_j(v_c) \phi_{i,j}^v \right\} \\ & + \sum_v \sum_\mu \int_{S_{v,\mu}} \left\{ \sum_i \sum_j N_i(u_c) M_j(v_c) \phi_{i,j}^v \right\} \frac{\partial G}{\partial n} dS \\ & \sum_\mu \int_{S_{v,\mu}} (\Delta \phi) \frac{\partial G}{\partial n} dS = \sum_v \sum_\mu \int_{S_{v,\mu}} \frac{\partial \phi}{\partial n} G dS \end{aligned} \quad (12)$$

4. 자기 유기 포텐셜 적분의 비특이화

제어점이 패널위에 놓일 경우는 영향적분을 계산할 때 특이 거동을 피하기 위해 특별한 주의가 필요하다. 특히, (12)식에서 B-스플라인의 계수가 상수인 경우가 가장 특이 거동이 심하므로 이 경우에 적용할 수 있는 비특이화 방법이 정립되면, 고차의 경우는 그대로 적용이 가능하다. 이를 보이기 위해 쏘오스나 다이폴의 세기의 상수항에 의한 자기 포텐셜 I^S, I^D 을 다음과 같이 표기하자.

$$I^S = -\frac{-1}{4\pi} \int \frac{1}{r} dS \quad (13)$$

$$I^D = -\frac{-1}{4\pi} \int \frac{-\hat{n} \cdot \vec{r}}{r^3} dS \quad (14)$$

여기서 \vec{r} 은 제어점에서 패널위의 특이점에 이르는 거리 벡터로 B-스플라인 텐서곱의 급수로 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \sum_i \sum_j (\vec{x}_{i,j}^v - \vec{x}_c) \bar{N}_i(u) \bar{M}_j(v) \\ r &= |\vec{r}| \end{aligned} \quad (15)$$

위 식의 매개변수에 대한 미분은 B-스플라인 함수의 미분에 의해 해석적으로 구할 수 있다. 즉,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \sum_i \sum_j (\vec{x}_{i,j}^v - \vec{x}_c) \frac{\partial \bar{N}_i(u)}{\partial u} \bar{M}_j(v) \quad (16)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \sum_i \sum_j (\vec{x}_{i,j}^v - \vec{x}_c) \bar{N}_i(u) \frac{\partial \bar{M}_j(v)}{\partial v}$$

거리 r 이 적분 표면에서 영이 되므로, (13), (14) 식은 특이성을 갖지만, 적분가능하다. 위 식의 피적분함수에서 영점을 제거하기 위하여, 패널의 사각형 매개변수 공간을 Fig. 2에서 보는 바와 같이 4개의 삼각형으로 분할한다. Fig. 2의

비특이화 과정은 Mania(1995)에 의해 제안된 것이나, 단일 논문으로서의 자연스런 기술을 위해 여기서도 소개한다. 각 삼각형의 꼭지점은 제어점에 위치하고, 사각형의 각변은 삼각형의 밑변이 되도록 하며, 삼각형을 $\Delta^{(k)}$ ($k=0, \dots, 3$)로 첨자를 붙여 표기한다. 각 삼각형에 대하여 Maniar는 다음과 같은 2차 변환을 적용하였다.

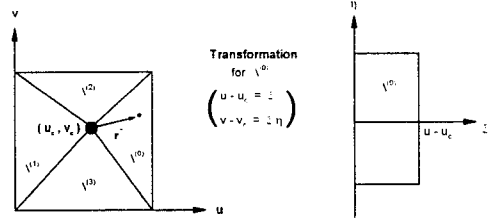


Fig. 2 A typical triangulation of the parametric space and the quadratic transformation, after Maniar

$$\begin{aligned} \text{For } \Delta^{(0)} & \quad u - u_c = \xi \\ & \quad v - v_c = \xi\eta \\ \text{For } \Delta^{(1)} & \quad u - u_c = -\xi \\ & \quad v - v_c = -\xi\eta \\ \text{For } \Delta^{(2)} & \quad u - u_c = \xi\eta \\ & \quad v - v_c = \xi \\ \text{For } \Delta^{(3)} & \quad u - u_c = -\xi\eta \\ & \quad v - v_c = -\xi \end{aligned} \quad (17)$$

삼각형 분할에 의해, 자기 유기 적분 (13), (14) 식은 각 삼각형 부분의 기여항을 합쳐 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$I^S_0 = \sum_{k=0}^3 I^S_{0,\Delta^{(k)}} = \sum_{k=0}^3 \frac{-1}{4\pi} \int_{\Delta^{(k)}} \frac{1}{r} J d\xi d\eta \quad (18)$$

$$I^D_0 = \sum_{k=0}^3 I^D_{0,\Delta^{(k)}} = \sum_{k=0}^3 \frac{-1}{4\pi} \int_{\Delta^{(k)}} \frac{-\hat{n} \cdot \vec{r}}{r^3} J d\xi d\eta \quad (19)$$

여기서 J 는 표면요소 dS 의 Jacobian으로 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$J = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right| \quad (20)$$

또한, 표면 요소 위의 단위 법선 벡터 \hat{n} 는 다음에 의해 구할 수 있다.

$$\hat{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} / J \quad (21)$$

하나의 삼각형에 대하여 적분을 수행하는 과정을 보이면, 이의 적분이 일반적이므로 다른 삼각형에도 동일하게 적용 가능하므로, 우측의 삼각형 $\Delta^{(0)}$ 에 대하여 비특이화 과정을 보이기로 한다. $\Delta^{(0)}$ 삼각형에 대한 2차변환

$$u - u_c = \xi \quad v - v_c = \xi \eta \quad (22)$$

은 다음과 같은 미분을 가능하게 한다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \xi} &= 1 & \frac{\partial u}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} &= \eta & \frac{\partial v}{\partial \eta} &= \xi \end{aligned} \quad (23)$$

거리벡터 \vec{r} 의 변환 변수에 대한 미분은 연쇄법칙을 써서 다음과 같이 구한다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (24)$$

이를 이용하여 Jacobian (20)식과 법선벡터 (21) 식을 구할 수 있다. Maniar는 또한 거리 벡터 \vec{r} 를 변환변수 ξ 와 영이 아닌 유한한 수 \vec{Q} 의 곱으로 표현할 수 있음을 보였다.

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \xi \vec{Q}(u, v) \\ r &= \xi Q(u, v) \end{aligned} \quad (25)$$

여기서 $Q = |\vec{Q}|$, 변환되는 삼각형에서 ξ 는 항상 양의 값을 갖는다. Q 는 거리 r 과 ξ 의 비로, 결코 영이 되지 않으며, 이는 (25)식에서 거리 벡터 \vec{r} 로부터 ξ 인자를 빼냈기 때문이다. (25)식으로부터, 표면요소의 법선벡터는 다음과 같이 계산된다.

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} = \xi \left(\vec{Q} + \xi \frac{\partial \vec{Q}}{\partial \xi} \right) \times \frac{\partial \vec{Q}}{\partial \eta} \quad (26)$$

$\Delta^{(0)}$ 에 대하여 (25), (26)식을 쏘오스 적분 (18)식에 대입하면,

$$\begin{aligned} I^S_{0, \Delta^{(0)}} &= \frac{-1}{4\pi} \int_{\Delta^{(0)}} \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right| \frac{d\xi d\eta}{r} \\ &= \frac{-1}{4\pi} \int_{\Delta^{(0)}} \left| \left(\vec{Q} + \xi \frac{\partial \vec{Q}}{\partial \xi} \right) \times \frac{\partial \vec{Q}}{\partial \eta} \right| \frac{d\xi d\eta}{Q} \end{aligned} \quad (27)$$

여기서 맨 나중 식의 피적분함수가 비특이화된 사실을 관찰할 필요가 있다. 동일한 삼각형에 대하여 다이폴 적분에 2차 변환을 적용하면,

$$\begin{aligned} I^D_{0, \Delta^{(0)}} &= \frac{-1}{4\pi} \int_{\Delta^{(0)}} - \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} d\xi d\eta \\ &= \frac{-1}{4\pi} \int_{\Delta^{(0)}} - \xi \left(\vec{Q} + \xi \frac{\partial \vec{Q}}{\partial \xi} \right) \times \frac{\partial \vec{Q}}{\partial \eta} \cdot \frac{\xi \vec{Q}}{\xi^3 Q^3} d\xi d\eta \\ &= \frac{-1}{4\pi} \int_{\Delta^{(0)}} \left\{ \frac{-\vec{Q} \times \partial \vec{Q} / \partial \eta \cdot \vec{Q}}{\xi Q^3} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial \vec{Q}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \vec{Q}}{\partial \eta} \cdot \vec{Q} \right) \frac{1}{Q^3} \right\} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (28)$$

윗식의 첫째 항의 분자는 벡터곱의 성질에 의해 항상 영이지만, 분모는 $\xi=0$ 이 아닌 경우에는 영이 아니다. Maniar가 보인 바에 의하면, $\xi=0$ 인 경우에 전체 삼각형의 이 항이 합쳐지면, 입체 각이 2π 가 되며, 이 값이 적분 방정식에서 $\phi/2$ 가 된다. 위의 피적분함수의 둘째 항의 분모는 항상 영이 아니므로 비특이성을 보인다. (27)식과 (28)식에서의 이러한 성질은 원래의 (18)식과 (19)식에서 특이부분이 제거되고 정규화 되었음을 의미하며, 따라서 수치적 구적법에 의해 유기 포텐셜의 적분을 수행할 수 있게 되었음을 의미한다. (28)식의 피적분함수를 Q 또는 \vec{Q} 가 아닌 보다 익숙한 물리량으로 고치기 위하여 다음 관계식을 사용한다.

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{\partial \vec{Q}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \vec{Q}}{\partial \eta} \cdot \vec{Q} \right) \frac{1}{Q^3} \\ &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \cdot \frac{-\vec{r}}{r^3} + \frac{\vec{Q} \times \partial \vec{Q} / \partial \eta \cdot \vec{Q}}{\xi Q^3} \end{aligned} \quad (29)$$

윗식의 첫째 항은 지금까지 잘 정의된 값으로 표

현되어 있으며, 둘째 항은 수치 적분에 사용할 Gauss 방법에서 $\xi \neq 0$ 이므로 항상 영이 된다. 삼각형 패널에서의 자기 유기 적분식 (27), (28)식은 이제 전역 변수를 사용하여 Gauss 구적법으로 계산할 수 있게 되었다. 즉,

$$I_{0,A}^{S(0)} \approx \frac{-1}{4\pi} \frac{\xi_R - \xi_L}{2} \frac{\eta_T - \eta_B}{2} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} w_m w_n \left\{ \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right| \frac{1}{r} \right\}_{n,m} \quad (30)$$

$$I_{0,A}^{D(0)} \approx \frac{-1}{4\pi} \frac{\xi_R - \xi_L}{2} \frac{\eta_T - \eta_B}{2} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} w_m w_n \left\{ -\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \right\}_{n,m} \quad (31)$$

여기서 ξ_L, ξ_R 는 각각 제어점과 삼각형의 우변에서의 ξ 값이며, η_B, η_T 는 각각 삼각형의 밑변, 윗변에서의 η 값이고, w_n, w_m 는 ξ, η 방향의 Gauss 구적법의 가중치, N_g, M_g 는 양방향 Gauss 구적법의 차수이다. 이후의 수치 실험에 의해 밝혀지지만, 자기 유기 포텐셜의 계산에서 패널의 변화가 심하지 않은 대부분의 경우는 $(N_g)_{Self} \geq 4, (M_g)_{Self} \geq 4$ 면 충분하지만, 곡률이 심하게 변하는 곳에서는 10 또는 그 이상의 차수가 필요한 경우도 있다. 유사한 방식을 Fig. 2에 보인 삼각형내의 다른 삼각형에도 적용할 수 있다.

5. 고차 다이폴의 자기 유기 포텐셜

제어점이 패널내에 올 경우, 고차 법선 다이폴에 의해 유기 적분도 위와 같은 특별한 조치를 필요로 한다. 그러나, 고차항은 상수항보다 특이거동이 덜하므로 (31)식에 따른 추론을 동일하게 적용하여 적분을 수행할 수 있다.

$$I_{self}^D = \sum_{k=0}^3 I_{D,A}^{D(k)} = \sum_k \int_{J_{A^k}} \phi \frac{\partial G}{\partial n} dS \quad (32)$$

$$= \sum_k \int_{J_{A^k}} \sum_i \sum_j \phi_{i,j}^v N_i(u) M_j(v) \frac{\partial G}{\partial n} J d\xi d\eta$$

위의 (32)식의 마지막 줄을 다시 정리하면,

$$I_{self}^D = \sum_k \sum_i \sum_j \phi_{i,j}^v \int_{J_{A^k}} N_i(u) M_j(v) \frac{\partial G}{\partial n} J d\xi d\eta$$

$$= \sum_k \sum_i \sum_j \phi_{i,j}^v \left\{ \frac{-1}{4\pi} \int_{J_{A^k}} N_i(u) M_j(v) \frac{-\hat{n} \cdot \vec{r}}{r^3} J d\xi d\eta \right\}$$

$$\approx \sum_k \sum_i \sum_j \phi_{i,j}^v \left\{ \frac{-1}{4\pi} \frac{\xi_R - \xi_L}{2} \frac{\eta_T - \eta_B}{2} \sum_m \sum_n w_m w_n \left(N_i(u) M_j(v) \frac{-\hat{n} \cdot \vec{r}}{r^3} J \right)_{n,m} \right\} \quad (33)$$

여기서 삼각형의 원점에서의 특이 거동이 제거되었으므로 (33)식의 계산을 위하여 특별한 조치가 필요하지 않음을 상기할 필요가 있다. 따라서, 일정 세기의 다이폴 적분 (31)식과 동일한 차수의 Gauss 구적법을 사용해도 동일한 정도를 유지할 수 있다.

6. 고차 쏘오스의 자기 유기 포텐셜

(12)식에 있는 쏘오스의 세기 $\partial\phi/\partial n$ 는 운동학적 경계조건으로부터 기지의 값이므로, 고차 쏘오스에 의해 유기되는 포텐셜의 계산은 보다 간단히 다음과 같이 Gauss 구적법에 의해 계산된다.

$$I_{self}^S = \sum_{k=0}^3 I_{S,A}^{S(k)}$$

$$= \sum_k \int_{J_{A^k}} \frac{\partial \phi}{\partial n} G dS$$

$$\approx \sum_k \frac{-1}{4\pi} \frac{\xi_R - \xi_L}{2} \frac{\eta_T - \eta_B}{2} \sum_m \sum_n w_m w_n \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{1}{r} J \right)_{n,m} \quad (34)$$

7. 고차 법선 다이폴 유기 포텐셜의 원장근사

제어점이 다이폴 패널에서 떨어져 있는 경우에는 매개변수 공간에서 직접 원장 근사법을 사용하여 계산할 수 있다. 즉,

$$I_{far}^D = \sum_\mu \sum_\nu \int_{S_{\mu\nu}} \phi \frac{\partial G}{\partial n} dS$$

$$= \sum_\mu \sum_\nu \int_{S_{\mu\nu}} \sum_i \sum_j \phi_{i,j}^v N_i(u) M_j(v) \frac{\partial G}{\partial n} J du dv$$

$$= \sum_\mu \sum_\nu \sum_i \sum_j \phi_{i,j}^v \left\{ \int_{S_{\mu\nu}} N_i(u) M_j(v) \frac{\partial G}{\partial n} J du dv \right\}$$

$$\approx \sum_\mu \sum_\nu \sum_i \sum_j \phi_{i,j}^v \left\{ \frac{u_R - u_L}{2} \frac{v_T - v_B}{2} \sum_m \sum_n w_m w_n \left(N_i(u) M_j(v) \frac{\partial G}{\partial n} J \right)_{n,m} \right\} \quad (35)$$

여기서 $J = |\partial \vec{r} / \partial u \times \partial \vec{r} / \partial v|$. (35)식의 계산에서 μ, ν 의 지수가 제어점이 위치한 지수와 같아지면, 즉, 자기 유기의 경우이면, 적분은 (33)식에 의해 수행되어야 한다.

8. 고차 쏘오스 유기 포텐셜의 원장근사

제어점이 쏘오스 패널로부터 떨어져 있는 경우는 피적분 함수가 정규함수이므로, 매개변수 공간에서 직접 원장 근사법을 사용하여 계산할 수 있다. 즉, 경계 조건으로부터 쏘오스의 세기에 관한 정확한 식을 알므로, 직접 Gauss 구적법을 적용할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 I_{far}^S &= \sum_{\mu} \sum_{\nu} \int_{S_{\mu, \nu}} \frac{\partial \phi}{\partial n} G dS \\
 &= \sum_{\mu} \sum_{\nu} \int_{S_{\mu, \nu}} \frac{\partial \phi}{\partial n} G J du dv \\
 &= \sum_{\mu} \sum_{\nu} \left\{ \frac{u_R - u_L}{2} \frac{v_T - v_B}{2} \sum_{n,m} w_n w_m \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} G \right)_{n,m} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{36}$$

(36)식의 계산에서 μ, ν 의 지수가 제어점이 위치한 지수와 같아지면, 즉, 자기 유기의 경우이면, 적분은 (34)식에 의해 수행되어야 한다.

9. 근사 유기 포텐셜 적분

원장 근사식인 (35), (36)식은 포텐셜의 값이 계산될 제어점이 패널로부터 충분히 멀리 위치한 경우에만 유효하다. 제어점이 패널로부터 충분히 떨어져 있지 않은 경우에는, 패널을 4개 또는 그 이상의 부분 패널로 분할하여 각 부분 패널에 원장 공식을 적용하여 유기 포텐셜을 계산할 수 있다. 본 논문에 채택된 부분분할법은 Maniar(1995)에 의해 제안된 것으로, 논문의 흐름에 도움이 되도록 여기에 소개한다. 우선, 원거리의 척도가 되는 원장기준 $Cr = (d/\ell)^2$ (여기서 d 는 패널 중심과 제어점 사이의 거리, ℓ 은 패널의 특성길이)를 도입하여, 만일 $(d/\ell)^2 < Cr$ 이면, 제어점이 근장에 위치한다고 정의한다. Fig. 3에 보인 바와 같이, 만일 제어점이 근장에 위치하면, 패널을 매개변수 공간에서 중심을 지나도록

4개의 하부 패널로 분할하여, 각 부분 패널의 중심과 제어점 사이의 거리 d 를 하부패널의 특성길이 ℓ 과 비교한다. 원장 기준을 만족하면, 즉, $(d/\ell)^2 > Cr$ 이면, 원장 근사 공식을 이용하여 유기 적분을 수행하고, 그렇지 않은 경우에는 또다시 부분분할을 수행한다. 이러한 과정을 모든 부분 패널이 원장조건을 만족할 때까지 반복한다. 부분분할은, 새로 생성되는 부분 패널의 특성길이 ℓ , 쏘오스와 제어점 사이의 거리 d 와 같은 기하학적 양에 대한 새로운 계산을 필요로 한다. 그러나, 모든 기하학적 양은 (15)식과 같은 B-스플라인 표현에 의해 계산되므로 계산방법이 간단하며, 계산시간도 빠르고, 정확성도 높다. 실제 컴퓨터 코드에서는 동적인 기억 기법을 사용하여, 부분패널의 수가 원장조건을 만족하기 위하여 계속 증가하여도 필요한 기억공간을 하드웨어가 지원하는 한 무제한으로 증가할 수 있도록 하는 기능을 갖고 있다.

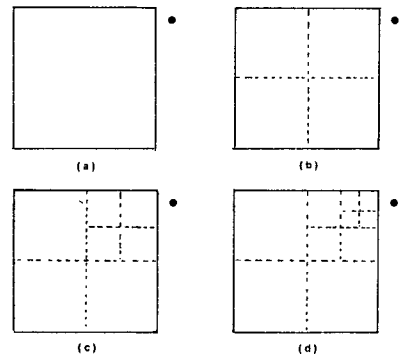


Fig. 3 Continuous partitioning of the parametric space from (a) to (d), after Maniar

10. Kutta 조건

양력문제를 풀기 위하여는 날개 뒷날에 Kutta 조건을 주어야 한다. Kutta 조건은 운동학적 또는 동역학적 경계조건중 하나, 또는 두 조건 모두를 동시에 만족시키는 경우가 있다. 정상 양력문

제의 경우, 후류면 다이폴의 세기는 날개 뒷날에서의 포텐셜 점프의 값과 같다는 전통적인 Morino(1974)의 Kutta 조건이 포텐셜을 기저로 하는 문제에서 널리 사용되어 왔다. 이를 포텐셜 제어 꼭지점의 식으로 보면,

$$\Delta\phi_j^v = \phi_j^{+,v} - \phi_j^{-,v} = \phi_{N-1,j}^v - \phi_{0,j}^v \quad (37)$$

여기서 상첨자 +, -는 날개 뒷날의 흡입면, 압력면을 나타낸다. 이렇게 허용된 포텐셜 점프는 물체 주위에 순환을 주며, 물체의 양력과 연결된다. 또 다른 형태의 Kutta 조건은 날개 뒷날에서의 압력 점프의 값이 영이어야 한다는 동역학적 Kutta 조건이다. 이는 Bernoulli의 정리에 의해 정상유동의 경우 날개 뒷날의 상하에서 속도의 크기가 동일하다는 조건으로 표현될 수 있다. 즉,

$$(\vec{U}_r + \nabla\phi^+)^2 = (\vec{U}_r + \nabla\phi^-)^2 \quad (38)$$

유입속도와 섭동속도를 $\vec{U}_r = (U, V, W)$ 와 $\nabla\phi = (\partial\phi/\partial x, \partial\phi/\partial y, \partial\phi/\partial z)$ 로 표현하면, 압력 점프가 영인 조건은 다음과 같이 변형된다.

$$\left\{ \frac{\partial\phi}{\partial x} \left(2U + \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial\phi}{\partial y} \left(2V + \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial\phi}{\partial z} \left(2W + \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \right\}^+ - \left\{ \frac{\partial\phi}{\partial x} \left(2U + \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial\phi}{\partial y} \left(2V + \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial\phi}{\partial z} \left(2W + \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \right\}^- = 0 \quad (39)$$

이 식은 섭동속도를 기준할 때 비선형이므로, 해를 구하는 데에 위의 식이 사용되면 반복 계산이 필요하리라는 것을 예상할 수 있다. 이를 위하여 현재 시각의 지수를 t 라 하고, 다음에 보는 기호를 도입하면,

$$\begin{aligned} E &\equiv \left(2U + \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^{(t-1)} \\ F &\equiv \left(2V + \frac{\partial\phi}{\partial y} \right)^{(t-1)} \\ G &\equiv \left(2W + \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^{(t-1)} \end{aligned} \quad (40)$$

(39)식은 새로운 기호를 사용하여 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$\left\{ E \frac{\partial\phi}{\partial x} + F \frac{\partial\phi}{\partial y} + G \frac{\partial\phi}{\partial z} \right\}^+ - \left\{ E \frac{\partial\phi}{\partial x} + F \frac{\partial\phi}{\partial y} + G \frac{\partial\phi}{\partial z} \right\}^- = 0 \quad (41)$$

섭동속도는 부록 A에 보인 바와 같이 포텐셜의 매개변수에 대한 미분의 항으로 표현된다. 따라서, (41)식의 첫째항은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} E \frac{\partial\phi}{\partial x} &= \frac{E}{D} \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial u} & \frac{\partial\phi}{\partial v} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi}{\partial v} & \frac{\partial\phi}{\partial v} & \frac{\partial\phi}{\partial v} \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} & n_1 & n_2 \end{vmatrix} = \frac{E}{D} \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial v} & \frac{\partial\phi}{\partial v} \\ n_1 & n_2 \end{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial u} \\ &\quad - \frac{E}{D} \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial u} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \\ n_1 & n_2 \end{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial v} + \frac{E}{D} \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial u} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi}{\partial v} & \frac{\partial\phi}{\partial v} \end{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial n} \end{aligned} \quad (42)$$

비슷한 방법으로 제2, 제3 항도 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} F \frac{\partial\phi}{\partial y} &= -\frac{F}{D} \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial v} & \frac{\partial\phi}{\partial v} \\ n_0 & n_2 \end{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial u} + \frac{F}{D} \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial u} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \\ n_0 & n_2 \end{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial v} - \frac{F}{D} \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial u} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi}{\partial v} & \frac{\partial\phi}{\partial v} \end{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial n} \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} G \frac{\partial\phi}{\partial z} &= \frac{G}{D} \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial v} & \frac{\partial\phi}{\partial v} \\ n_0 & n_1 \end{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial u} - \frac{G}{D} \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial u} & \frac{\partial\phi}{\partial v} \\ n_0 & n_1 \end{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial v} + \frac{G}{D} \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial u} & \frac{\partial\phi}{\partial v} \\ \frac{\partial\phi}{\partial v} & \frac{\partial\phi}{\partial v} \end{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial n} \end{aligned} \quad (44)$$

위의 (42), (43) 및 (44) 식에 있는 포텐셜이 매개변수에 대하여 미분가능하므로, (41) 식의 처음 세개의 항을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} &E \frac{\partial\phi}{\partial x} + F \frac{\partial\phi}{\partial y} + G \frac{\partial\phi}{\partial z} \\ &= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} E & F & G \\ \frac{\partial\phi}{\partial v} & \frac{\partial\phi}{\partial v} & \frac{\partial\phi}{\partial v} \\ n_0 & n_1 & n_2 \end{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial u} \\ &\quad + \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial u} & \frac{\partial\phi}{\partial v} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \\ E & F & G \\ n_0 & n_1 & n_2 \end{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial v} + \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial u} & \frac{\partial\phi}{\partial v} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi}{\partial v} & \frac{\partial\phi}{\partial v} & \frac{\partial\phi}{\partial v} \\ E & F & G \end{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial n} \\ &\equiv E^* \frac{\partial\phi}{\partial u} + F^* \frac{\partial\phi}{\partial v} + G^* \frac{\partial\phi}{\partial n} \\ &= E^* \sum_i \sum_j \frac{\partial N_i}{\partial u} M_j + F^* \sum_i \sum_j N_i \frac{\partial M_j}{\partial v} \phi^{v_{i,j}} + G^* \frac{\partial\phi}{\partial n} \end{aligned} \quad (45)$$

(45)식을 (41)식에 대입하면, 다음과 같은 동역학적 Kutta 조건식을 얻는다.

$$\begin{aligned} &\left\{ \sum_i \sum_j \left[E^* \frac{\partial N_i}{\partial u} M_j + F^* N_i \frac{\partial M_j}{\partial v} \right] \phi^{v_{i,j}} \right\}^+ \\ &\quad - \left\{ \sum_i \sum_j \left[E^* \frac{\partial N_i}{\partial u} M_j + F^* N_i \frac{\partial M_j}{\partial v} \right] \phi^{v_{i,j}} \right\}^- \\ &= - \left\{ G^* \frac{\partial\phi}{\partial n} \right\}^+ + \left\{ G^* \frac{\partial\phi}{\partial n} \right\}^- \end{aligned} \quad (46)$$

위의 동역학적 Kutta 조건 (46)식은 포텐셜 제어 꼭지점 $\phi^v_{i,j}$ 의 선형 중첩으로 표현된다는 점이 큰 특징이다. 이 식은 나중에 포텐셜 꼭지점의 값이 최소자승법에 의해 결정될 때 구속조건으로 사용된다.

11. 구속조건이 있는 최소자승해법

제어 꼭지점의 수와 패널수 사이에 $N^v = N^p + p$, $M^v = M^p + q$ 의 관계가 있으므로 미지수 포텐셜 꼭지점의 수 $NV = (N^v \times M^v)$ 는 패널수 ($N^p \times M^p$)보다 항상 크다. 따라서, 각 패널에는 운동학적 경계조건인 (10) 식을 만족시킬 제어점을 하나 이상 놓아야 한다. 현재의 방법을 2차원 유동에 적용한 Lee/Kerwin(1999)의 경험에 근거하여, 본 논문에서는 $\xi = [-1, 1]$, $\eta = [-1, 1]$ 로 정규화된 지역 패널의 매개변수 공간에서 $\xi = -0.5, 0.5$ 와 $\eta = -0.5, 0.5$ 가 교차하는 4개의 점에 제어점을 놓는다. 따라서, 전체 제어점의 개수는 $NCP = 4 \times (N^p \times M^p)$ 가 된다. 이로서 $NCP > NV$ 가 되므로, 연립방정식은 overdetermined계가 되므로 최소자승법에 의해 해를 구하여야 한다. 개별 적분의 연산식 (32), (34), (35), (36)식과 Morino의 조건식 (37)식을 적분방정식 (12)식에 대입하고, (12)식을 NCP개의 제어점에 적용하면, NV개의 포텐셜 꼭지점을 결정하기 위한 다음과 같은 관계식을 얻는다.

$$A\phi^v = B \tag{47}$$

여기서 A는 $NCP \times NV$ 의 직사각형 매트릭스, ϕ^v 는 미지 포텐셜 꼭지점 세기 벡터, B는 NCP개의 원소를 갖는 벡터이다. 포텐셜 꼭지점 세기의 선형 중첩으로 표현되는 동역학적 Kutta 조건 (46)식은 매트릭스 형태로 다음과 같이 표현된다.

$$S\phi^v = T \tag{48}$$

여기서 S는 $2M^p \times NV$ 의 직사각형 매트릭스, T는 $2M^p \times 1$ 의 매트릭스이다. 운동학적 경계조건보다 날개 뒷날에서의 동역학적 Kutta 조건에 더

큰 가중치를 주고 싶으므로, 우리가 해석하고자 하는 문제는 $S\phi^v = T$ 를 구속조건으로 하고 $B - A\phi^v$ 를 최소화하는 문제가 된다. Lagrange 승수 L를 사용하여, Lee/Kerwin은 포텐셜 꼭지점의 벡터 ϕ^v 를 위한 최종해를 다음과 같이 구하였다.

$$\phi^v = (A^T A)^{-1} (A^T B - S^T L) \tag{49}$$

여기서 Lagrange 승수 L는 다음과 같이 계산된다.

$$L = (S(A^T A)^{-1} S^T)^{-1} (S(A^T A)^{-1} A^T B - T) \tag{50}$$

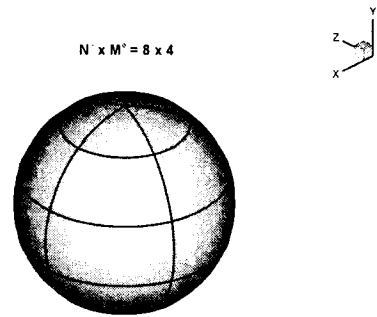


Fig. 4 A sphere represented by B-spline with $(p, q) = (3, 3)$, $(\tilde{N}^p, \tilde{M}^p) = (11, 7)$ and $(N^p, M^p) = (4, 4)$

12. 수치 계산 결과 및 토의

본 절에서는 현재의 수치 해석법을 검증하기 위하여 예제 계산을 수행한다. 먼저 해석해가 존재하는 균일 유동장에 놓여 있는 구를 선택하였으며, 양력문제를 다루기 위해 원형 평면을 갖는 날개를 선택하였다.

12.1 구 주위의 유동

무한 유체 공간의 균일 유동장중에 놓여 있는 구 주위의 유동을 해석하였다. 중앙의 대칭면에서의 포텐셜은 $\phi = 0.5 \cos \theta$ 에 의해 주어진다. 여기

서 $\theta = [0, 2\pi]$ 는 구의 하류쪽 정체점에서 시작하는 방위각이다. Fig. 4는 $N^p \times M^p = 8 \times 4$, 즉, 전체 32개의 패널로 표현된 구를 보여준다. 그림에선 B-스플라인에 의한 표현이 각 패널의 경계선을 곡선으로 표현할 수 있음을 알 수 있다. 본 논문의 방법에 의해 계산된 포텐셜을 해석해와 Fig. 5에 비교하였다. 예상대로 그 차이는 구별할 수 없을 정도이다. 이 결과는 본 연구의 수치 해석 기능이 최소한 양력이 발생하지 않는 뚱뚱한 물체 주위의 유동해석에 바르게 적용될 수 있음을 확인할 수 있다.

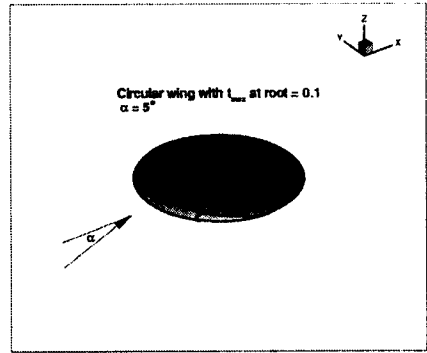


Fig. 6 A circular wing represented by B-splines with $(p, q) = (3, 3)$, $(\widehat{N}^p, \widehat{M}^p) = (13, 7)$ and $(N^p, M^p) = (10, 4)$

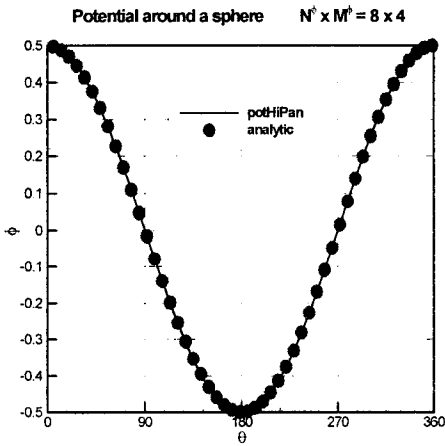


Fig. 5 Comparison of potentials predicted by the present method with $(N^p, M^p) = (8, 4)$ and the analytic solution

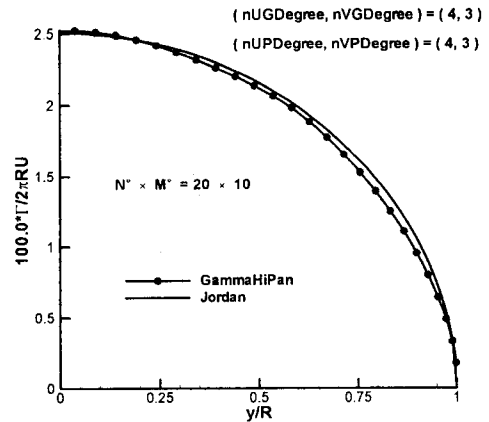


Fig. 7 Comparison of circulations predicted by the present method with $(N^p, M^p) = (20, 10)$ and Jordan's solution

12.2 원형 평면의 날개 주위의 유동

다음, 균일 유동장에 받음각 $\alpha = 5^\circ$ 로 놓여 있는 원형 평면의 날개 문제를 선택하였다. 날개의 두께가 영인 경우에는 순환 분포에 대한 해석해가 존재하므로 본 해석과의 비교 목적으로 활용하고자 한다. 계산에 사용된 날개의 중앙 대칭면에서의 최대 두께 t_0 는 코드길이의 10%이며, 날개끝으로 갈수록 날개의 최대 두께는 $t_{\max}(y) = t_0 \times \{1.0 - (2y/s)^2\}$ 식에 의해 이차식으로 감소된다. 여기서 s는 스패น, y는 스패방향 좌표이다. Fig. 6는 $N^p \times M^p = 10 \times 4$ 개의 패널로 표현된

원형 날개를 보여준다. Fig. 7은 현재의 방법에 의해 $N^p \times M^p = 20 \times 10$ 을 사용하여 계산된 순환과 Jordan의 해를 함께 보여준다. Jordan의 해는 두께가 영인 원형 날개의 해석해이므로, 이 해가 현재의 계산 결과를 직접 검증할 수 있는 기준이 될 수는 없다. 현재의 원형 날개에서의 순환의 값이 두께 영의 날개보다 적다는 사실은 날개의 두께 효과를 설명해 준다고 생각된다. 유한한 두께를 가진 스윕된 날개 앞날은 스패 중앙의 대칭면에서 날개끝쪽으로 갈수록 두께 영인 날개보

다 하중을 감소시켜 주는 것으로 보인다. 이 결과는 Ramsey(1995)의 저차 패널법이 Jordan의 해와 거의 일치하는 것과는 전혀 다른 결과이다. 그러나 현 단계에서는 어느 쪽이 바른 해인지 판단하기는 어렵고, 엄격한 수치 실험을 통해서만 밝힐 수 있을 것이다. 비교 결과와 경향을 볼 때, 현재의 수치해석쪽이 옳을 가능성이 높아 보인다

13. 결 언

기하학적 형상과 유체 거동을 나타내는 포텐셜을 모두 B-스플라인으로 표현할 수 있는 고차 패널법이 이상 유체중에 있는 물체 주위의 유동해석을 목적으로 개발되었다. 제어점이 특이점 패널로부터의 상대적인 위치에 따라, 자기 유기, 근장 유기, 원장 유기 적분으로 구분한 후에, 각각에 맞는 적분 방법을 적용하여 유효함을 보였다. 범선 다이폴과 소오스에 의한 자기 유기 함수는 2차 변환을 통하여 비특이화된 적분으로 바꾸어 통상적인 수치 구적법으로 계산을 수행할 수 있음을 보였으며, 구적법의 차수를 적절히 선택하여 유기 적분을 원하는 정도까지 계산할 수 있음을 보였다. 원장 유기, 근장 유기 영향 함수도 동일한 원장 공식에 의해 계산될 수 있음을 보였으며, 제어점이 근장에 위치하는 경우, 부분 분할법을 계속 적용함으로써 높은 정도를 갖도록 계산이 가능함을 보였다. 물체 표면위에서 운동학적 경계조건을 만족시키는 제어점이 미지 포텐셜 꼭지점의 수보다 많은 overdetermined계를 이루게 됨을 보였고, 동역학적 Kutta조건을 구속조건으로 하는 최소자승해법에 의해 포텐셜 꼭지점의 세기를 결정할 수 있음을 보였다. 수치 실험 결과, 본 논문에서 제안된 B-스플라인 고차 패널법이 수치적으로 안정되고, 얇은 두께의 날개끝이나 날개 뒷날에서도 정확한 압력의 계산이 가능함을 확인하였다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 특정연구과제(KOSEF 97-02-00-01-01-3)의 일부로 수행되었습니다.

재단의 지원에 감사를 표합니다.

참 고 문 헌

- [1] Hess, J. L. and Smith, A.M.O., "Calculation of nonlifting potential flow about arbitrary three-dimensional bodies," *Journal of Ship Research*, 8, 2, 1964
- [2] Morino, L. and Kuo, C.-C., "Subsonic potential aerodynamic for complex configuration: A general theory," *AIAA Journal*, 12, 2, pp. 191-197., 1974
- [3] Lee, J.-T., A Potential based panel method for the analysis of marine propellers in steady flow, PhD Thesis, Department of Ocean Engineering, M.I.T., 1987
- [4] Hoshino, T., Hydrodynamic Analysis of Propellers in Steady Flow using a Surface Panel Method. Proceedings of the Spring Meeting No. 1-6, The Society of Naval Architects of Japan, 1989
- [5] Hsin, C.-Y., Development and Analysis of Panel Methods for Propellers in Unsteady Flow, PhD Thesis, Department of Ocean Engineering, M.I.T., 1990
- [6] 문일성, 김영기, 이창섭, "포텐셜을 기저로한 패널법에 의한 프로펠러의 비정상 유동해석," 대한조선학회, 춘계학술발표회, pp. 331-336., 1994
- [7] 김영기, 패널법에 의한 프로펠러 주위의 비정상 공동 유동 해석, 충남대학교 대학원 박사학위 논문, 342p., 1995
- [8] Brebbia, C.A., Telles, J.C.F., Wrobel, L.C., *Boundary Element Techniques*. Springer-Verlag, 464 p., 1984
- [9] 홍사영, 최항순, "고차경계요소법에 의한 선체주위 유동해석", 대한조선학회 논문집, 제 32권, 제 1호, pp. 42-57, 1995

- [10] 박일룡, 전호환, "고차경계요소법을 이용한 수중익에 대한 3차원 조파문제 해석", 대한조선학회 논문집 제 35권 3호, pp. 14-25, 1998
- [11] Hsin, C.-Y., Kerwin, J.E. and Newman, J.N., HIPAN2: A Two-Dimensional Higher-Order Panel Method Based on B-Splines, theory and program documentation, Department of Ocean Engineering, M.I.T., 1993
- [12] Maniar, H.D., A three dimensional higher order panel method based on B-splines, PhD Thesis, Department of Ocean Engineering, M.I.T., 1995
- [13] Lee, C.-S. and Kerwin, J.E., "A B-spline higher order panel method applied to two-dimensional lifting problem," submitted for publication, 1999

부록 A. 섭동 속도의 계산

물체 표면에서의 섭동 속도를 계산하기 위하여, 섭동 포텐셜을 물리적인 좌표계에 대하여 미분할 필요가 있다. 섭동 포텐셜 ϕ 과 물리적인 좌표 \vec{x} 가 (6), (5)식에 의해 모두 매개변수 (u, v) 의 함수로 표현되므로, 연쇄법칙을 써서 다음 식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial u} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial \phi}{\partial v} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} n_0 + \frac{\partial \phi}{\partial y} n_1 + \frac{\partial \phi}{\partial z} n_2 \end{aligned} \quad (51)$$

여기서 $\vec{x}=(x, y, z)$, $\hat{n}=(n_0, n_1, n_2)$. (16)식을 사용하여 \vec{x} 의 매개변수 (u, v) 에 대한 미분을 수행할 수 있고, 동일한 방식으로 포텐셜 ϕ 의 미분을 수행할 수 있다. (51)식의 맨 아랫줄의 $\partial\phi/\partial n$ 은 운동학적 경계조건으로부터 기지의 값이다. Kramer의 법칙을 사용하여 (51)식을 풀어서 섭동 속도 성분을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial u} & \frac{\partial \phi}{\partial v} & \frac{\partial \phi}{\partial n} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial n} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial n} \end{vmatrix} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial u} & \frac{\partial \phi}{\partial v} & \frac{\partial \phi}{\partial n} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial n} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial n} \end{vmatrix} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial u} & \frac{\partial \phi}{\partial v} & \frac{\partial \phi}{\partial n} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial n} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial n} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (52)$$

여기서 행렬식 D는 다음과 같이 정의된다.

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial n} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial n} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial n} \end{vmatrix} \quad (53)$$