

가산성 백색 가우시안 잡음과 레일리/라이시안 페이딩 채널에서 하이브리드 연쇄 길쌈부호의 성능 분석

정회원 김 세 훈*, 윤 원 식*

Performance Analysis of Hybrid Concatenated Convolutional Codes over AWGN and Rayleigh/Rician Fading Channels

Sae-Hoon Kim*, Won-Sik Yoon* *Regular Members*

요 약

신호 대 잡음비(SNR)가 낮을 때에는, 하이브리드 연쇄 부호화 시스템의 성능분석도구로 컴퓨터 시뮬레이션을 사용한다. 그러나, 과도한 시뮬레이션을 요구하는 높은 신호 대 잡음비 영역에서는 BER(비트오류확률)과 WER(워드오류확률)에 대한 평균 상한계(average upper bound)가 사용된다. [1]에서, 평균 상한계를 얻기 위해서는 모든 구성코드의 WEF(weight enumerating functions)가 필요했다. 본고에서는 구성코드로서 RSC(Recursive Systematic Convolutional) 부호를 사용하고 이에 대한 해석을 위하여 WEF 대신에 유효자유거리(effective free distances)를 사용함으로써 하이브리드 연쇄 길쌈부호(Hybrid Concatenated Convolutional Codes)의 비트오류확률과 워드오류확률에 대한 상한계를 유도하고, AWGN(가산성 백색 가우시안 잡음)과 레일리/라이시안 페이딩채널에 대한 비트오류확률과 워드오류확률을 분석한다.

ABSTRACT

In regions of low signal-to-noise ratio (SNR), performance analysis uses simulations of hybrid concatenated coding systems. However, for higher SNR regions beyond simulation capabilities, average upper bounds to bit error rate (BER) and word error rate (WER) are used. In [1], all weight enumerating functions are needed to obtain average bounds. In this paper, we use RSC as constituent codes, by using effective free distances instead of WEF, we derive average BER and WER bounds of hybrid concatenated convolutional codes (HCCC) and analyze the BER and WER over AWGN and Rayleigh/Rician fading channels.

I. 서 론

페이딩 채널환경인 무선 네트워크 상에서 채널 부호화의 선택은 통신신뢰도를 향상시키는데 있어서 매우 중요하다. 최근에 제안된 하이브리드 연쇄부호는 인터리버 크기가 충분히 클 때, 신호 대 잡음비

가 낮은 영역에서 터보부호보다 Shannon 한계에 더 가까운 에러정정 능력을 보여주고 있다^[1]. 신호 대 잡음비가 낮을 때에는, 하이브리드 연쇄 부호화 시스템의 성능분석도구로 컴퓨터 시뮬레이션을 사용한다. 그러나, 시뮬레이션 용량을 초과하는 높은 신호 대 잡음비 영역에서는 BER과 WER에 대한 평균 상한계가 사용된다. [1]에서 제안된 상한계는 모든

* 아주대학교 전자공학부(wsyoon@madang.ajou.ac.kr)

논문번호 : 99189-0514, 접수일자 : 1999년 5월 14일

※ 본 연구는 한국과학재단(97-0100-1401-5) 지원에 의해 수행되었습니다.

구성코드의 WEF가 필요하다. 본고에서는 구성코드로서 RSC(Recursive Systematic Convolutional) 부호를 사용하고 이에 대한 해석을 위하여 WEF 대신에 각각의 구성코드의 유효자유키리를 사용함으로써 하이브리드 연쇄 길쌈부호의 BER과 WER에 대한 평균 상한계를 얻는다. 이러한 상한계를 사용함으로써 AWGN과 레일레이라이시안 페이딩 채널환경에서 하이브리드 연쇄 길쌈부호의 BER과 WER에 대한 평균 상한계를 분석한다.

II. 시스템 모델

1. 채널 환경

AWGN과 페이딩 채널환경에 대해서 최대가능성 복호를 하는 동기 BPSK를 가정한다. 이러한 채널 환경에서의 개별출력은 $y_k = a_k x_k + n_k$ 이다. 여기서 $x_k \in \{+1, -1\}$ 이고, n_k 는 평균이 0인 가우시안 랜덤변수이다. 그리고 a_k 는 i.i.d. 랜덤변수를 갖는 페이딩 계수이다. 라이시안 페이딩 채널의 경우에 $a_k > 0$ 이면 확률밀도함수는 다음과 같다

$$f(a_k) = \frac{a_k}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{a_k^2 + A^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{Aa_k}{\sigma^2}\right) \quad (1)$$

여기에서 $I_0()$ 는 0차의 Bessel 함수, A^2 은 직접파 성분의 전력이고 $2\sigma^2$ 은 분산 성분의 전력이다. 그리고 $E[a_k^2] = A^2 + 2\sigma^2$ 이고 라이시안 계수 ρ 는 $A^2/2\sigma^2$ 이다. 만일 $A^2 = 0$ 이면 $f(a_k)$ 는 레일레이 확률밀도함수가 된다.

모두 0인 부호어가 전송된다고 가정하며, 이러한 가정은 일반성을 잃지 않는다. Side information을 갖는 페이딩 채널환경에서 모두 0인 부호어 c_0 가 (i_1, i_2, \dots, i_h) 로 표시된 h 개의 비트 위치에서 c_0 와 다른 부호어 c_j 로 잘못 복호될 확률은 다음과 같다.

$$P(c_0 \rightarrow c_j | \mathbf{a}) = Q\left(\sqrt{(2E_s/N_0) \sum_{k=1}^h a_{i_k}^2}\right) \quad (2)$$

여기에서 $Q(x) = \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$, E_s 는 심볼 에너지이고, 그리고 N_0 는 잡음 전력 스펙트럼 밀도이다. 여기에서 $E_s = R_c E_b$ 이고 R_c 는 부호율이며 E_b 는 정보 비트 에너지이다. 만일 페이딩이 독립적이면 다른 비트 위치를 나타내는 인덱스는 중요한 요소가 되지 않는다. 그러므로 평균 pairwise 오류 확

률 $P_2(h)$ 는 다음과 같다.

$$P_2(h) = P(c_0 \rightarrow c_j) = \int_{a_1} \dots \int_{a_h} f(a_1, \dots, a_h) \cdot Q\left(\sqrt{(2E_s/N_0) \sum_{k=1}^h a_{i_k}^2}\right) da_1 \dots da_h \quad (3)$$

Q함수 상한계 $Q(x) \leq \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ 를 식 (3)에 적용하면 레일레이와 라이시안 페이딩 채널에 대한 $P_2(h)$ 의 상한계를 다음 식과 같이 각각 얻는다.

$$P_2(h) \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 + R_c \gamma} \right]^h = \frac{1}{2} (P_2)^h \quad (4)$$

$$P_2(h) \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1 + \rho}{1 + \rho + R_c \gamma} \exp\left(-\frac{\rho R_c \gamma}{1 + \rho + R_c \gamma}\right) \right]^h = \frac{1}{2} (P_2)^h \quad (5)$$

여기에서 $\gamma = \frac{E_b}{N_0} E[a_k^2]$ 는 비트당 평균 에너지이다.

2. 하이브리드 연쇄 길쌈부호 구조

본고에서는 각각의 구성코드가 RSC 부호로 이루어져 있는 한정된 하이브리드 연쇄 길쌈부호의 구조만을 다룬다. 그림 1은 하이브리드 연쇄 길쌈부호의 구조를 나타낸다. 하이브리드 연쇄 길쌈부호는 parallel 부호, inner 부호, 그리고 outer 부호로 이루어진다. Parallel 부호와 inner 부호는 RSC(Recursive Systematic Convolutional) 코드로 구성되고 outer 부호는 RCC(Recursive Convolutional Codes)로 구성된다. 하이브리드 연쇄 길쌈 부호는 π_1, π_2 의 uniform 인터리버를 갖는 systematic 부호

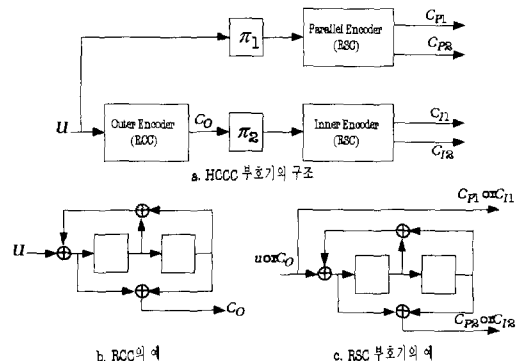


그림 1. 하이브리드 연쇄 길쌈부호 구조

C_{P1} 과 3개의 연쇄부호 C_H 로 이루어진다. 해석의 단순화를 위하여 인터리버 π_1 과 π_2 의 크기는 같고 C_{P2} , C_O , 그리고 C_H 의 구조는 같다고 가정한다.

III. 하이브리드 연쇄 길쌈부호의 오류확률에 대한 상한계 유도

이 절에서는 유효자유거리^[2]와 uniform 인터리버 [2]를 사용해서 BER과 WER에 대한 상한계를 유도한다. CWF(conditional weight enumerating function)로부터 ML 복호를 하는 하이브리드 연쇄 길쌈부호의 BER과 WER에 대한 상한계는 다음과 같이 주어진다.

$$P_b(e) \leq \frac{1}{2} \sum_{w=1}^N \frac{k}{N} W^w A^{C_H}(w, H) \Big|_{W=H=P} \quad (6)$$

$$P_w(e) \leq \frac{1}{2} \sum_{w=1}^N W^w A^{C_H}(w, H) \Big|_{W=H=P} \quad (7)$$

여기에서 u 는 정보데이터의 Hamming 가중치(weight)이고 h 는 하이브리드 연쇄 길쌈부호의 출력 Hamming 가중치이다. N 은 인터리버 크기이다. w 와 H 는 부호기의 출력 가중치를 표시하기 위한 dummy 변수이다. 그리고 $A^{C_H}(w, H)$ 는 C_{P1} 을 제외한, 즉 systematic 성분을 제외한 하이브리드 연쇄 길쌈부호의 CWF이며 다음과 같이 주어진다.

$$A^{C_H}(w, H) = \frac{[A(w, H)]^2}{\binom{N}{w}} \sum_{l=d_{\min}}^N \frac{A_{w,l}^{C_O} A^{C_Z}(l, H)}{\binom{N}{l}} \quad (8)$$

여기에서 $A(w, H) = A^{C_P}(w, H) = A_{w,l}^{C_O} A^{C_Z}(l, H)$ 이고 $A_{w,l}^{C_O}$ 은 정보데이터의 가중치 w 와 outer 부호기의 출력 가중치 l 을 갖는 부호어들의 수이다. 그리고 d_{\min}^O 은 outer 부호기의 최소자유거리(minimum free distance)이다. N 이 길쌈부호의 메모리 크기보다 커지게 되면 CWF $A(w, Z)$ 는

$A(w, Z) \approx \sum_{n=1}^{n_{\max}} \binom{N}{n} A(w, Z, n)$ 에 근접한다. 여기에서 n 은 오류사건의 수이고, $A(w, Z, n)$ 은 패리티 검사(parity check) WEF, n_{\max} 는 입력 가중 u 에 의해 생성된 오류사건 중에서 가장 큰 수이다. n_{\max} 는 부호기 구조에 의존하는 u 의 함수이다.

$A(w, Z, n) = \sum_{w,i,n} A_{w,i,n} Z^i$ 으로부터 다음 식을 얻는다.

$$A_{w,i,n} = \left[\frac{1}{j!} \frac{d^j}{dz^j} \{A(w, Z, n)\} \right]_{Z=0} \quad (9)$$

여기에서 $A_{w,i,n}$ 은 정보데이터의 가중치 u , 구성 부호기의 출력 가중치 j , 오류 사건의 수 n 을 갖는 부호어의 수이다. N 이 큰 값을 가질 때 $\binom{N}{n} = \frac{N^n}{n!}$ 을 사용하고 N 의 승수중에서 가장 큰 값으로 근사, 즉 $n_1 = n_2 = n_{\max 1}$, $n_3 = n_{\max 2}$ 을 사용하면 $A^{C_H}(w, H)$ 는 다음과 같이 된다.

$$A^{C_H}(w, H) = \frac{w! N^{2n_{\max 1} - w}}{(n_{\max 1}!)^2} [A(w, H, n_{\max 1})]^2 \cdot \sum_{l=d_{\min}}^N \frac{l! N^{n_{\max 1} + n_{\max 2} - l}}{n_{\max 1}! n_{\max 2}!} A_{w,l,n_{\max 1}}^{C_O} \cdot A^{C_Z}(l, H, n_{\max 2}) \quad (10)$$

여기에서 $n_{\max 1}$ 은 정보데이터열의 가중치 u 에 의해 생성된 오류사건중에서 가장 큰 수이고, $n_{\max 2}$ 은 outer 부호기의 출력열의 가중치 l 에 의해 생성된 오류사건중에서 가장 큰 수이다. RCC의 경우에 $n_{\max 1} = \lfloor w/2 \rfloor$, $n_{\max 2} = \lfloor l/2 \rfloor$ 이 된다. $\lfloor x \rfloor$ 는 “ x 의 정수 부분”을 의미한다.

식 (10)에서 u 와 l 을 짝수와 홀수로 구분하여 나타내면 다음과 같다.

1. 홀수 u 와 홀수 l , 즉 $w=2k+1$, $l=2q+1$ 이면 $A^{C_H}(w, H)$ 는 다음과 같다.

$$\frac{(2k+1)!}{(k!)^2} [A(2k+1, H, k)]^2 \cdot \sum_{q=d_{\min}^O/2}^{N/2} \frac{(2q+1)! N^{k-q-2}}{k! q!} \cdot A_{2k+1, 2q+1, k}^{C_O} A^{C_Z}(2q+1, H, q) \quad (11)$$

2. 홀수 u 와 짝수 l , 즉 $w=2k+1$, $l=2q$ 이면 $A^{C_H}(w, H)$ 는 다음과 같다.

$$\frac{(2k+1)!}{(k!)^2} [A(2k+1, H, k)]^2 \cdot \sum_{q=d_{\min}^O/2}^{N/2} \frac{(2q)! N^{k-q-1}}{k! q!} \cdot A_{2k+1, 2q, k}^{C_O} A^{C_Z}(2q, H, q) \quad (12)$$

3. 짝수 u 와 홀수 l , 즉 $w=2k$, $l=2q+1$ 이면 $A^{C_H}(w, H)$ 는 다음과 같다.

$$\frac{(2k)!}{(k!)^2} [A(2k, H, k)]^2 \cdot \sum_{q=d_{\min}^O/2}^{N/2} \frac{(2q+1)! N^{k-q-1}}{k! q!} \cdot A_{2k, 2q+1, k}^{C_O} A^{C_Z}(2q, H, q) \quad (13)$$

4. 짝수 u 와 짝수 i , 즉 $w=2k, l=2q$ 이면 $A^{C_u}(w, H)$ 는 다음과 같다.

$$\frac{(2k)!}{(k!)^2} [A(2k, H, k)]^2 \sum_{q=d_{\min}/2}^{N/2} \frac{(2q)! N^{k-q}}{k! q!} \cdot A_{2k, 2q, k}^{C_u} A^{C_u}(2q, H, q) \quad (14)$$

(11), (12), (13), (14)를 비교하면 식 (14)에서의 N 의 승수가 다른 식에서의 값보다 N^2 또는 N 배 정도 커지기 때문에 $A^{C_u}(w, H)$ 는 w 와 i 모두 짝수일 경우만이 고려되어질 수 있다.

$A(2k, Z, k) = [A(2, Z, 1)]^k$ 을 이용하면 BER과 WER에 대한 상한계를 얻을 수 있다. 또한 입력 Hamming 가중치 2와 하나의 오류사건을 갖는 RCC의 부호어의 패리티 검사 WEF는 다음과 같다 [2].

$$A(2, Z, 1) = Z^{z_{\min}} + Z^{2z_{\min}-2} + Z^{2z_{\min}-4} + \dots = \frac{Z^{z_{\min}}}{(1 - Z^{z_{\min}-2})} \quad (15)$$

여기에서 z_{\min} 은 입력 가중치 2에 의해 생성된 구성코드의 오류사건 중에서 가장 작은 출력 가중치를 나타내는 유효자유거리이다.

식 (15)를 식 (14)에 대입하고 그 결과를 식 (6)과 식 (7)에 대입하면 BER과 WER에 대한 상한계를 각각 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$P_b(e) \leq \sum_{k=1}^{N/2} \frac{k}{N} \frac{(2k)!}{(k!)^2} \left[\frac{H^{1+z_{\min}^0}}{1 - H^{z_{\min}^0-2}} \right]^{2k} \cdot \sum_{q=z_{\min}/2}^{N/2} \frac{(2q)! N^{k-q}}{k! q!} \left[\frac{1}{2q!} \frac{d^{2q}}{dH^{2q}} \right] \cdot \left\{ \left[\frac{H^{z_{\min}^0}}{1 - H^{z_{\min}^0-2}} \right]^k \right\}_{H=0} \cdot \left[\frac{H^{z_{\min}^0}}{1 - H^{z_{\min}^0-2}} \right]^q \Big|_{H=P_r} \quad (16)$$

$$P_w(e) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N/2} \frac{(2k)!}{(k!)^2} \left[\frac{H^{1+z_{\min}^0}}{1 - H^{z_{\min}^0-2}} \right]^{2k} \cdot \sum_{q=z_{\min}/2}^{N/2} \frac{(2q)! N^{k-q}}{k! q!} \left[\frac{1}{2q!} \frac{d^{2q}}{dH^{2q}} \right] \cdot \left\{ \left[\frac{H^{z_{\min}^0}}{1 - H^{z_{\min}^0-2}} \right]^k \right\}_{H=0} \cdot \left[\frac{H^{z_{\min}^0}}{1 - H^{z_{\min}^0-2}} \right]^q \Big|_{H=P_r} \quad (17)$$

여기에서 z_{\min}^0 는 outer 부호기의 유효자유거리이고 z_{\min}^L 는 inner 부호기 구성코드 C_L 의 유효자유거리이다.

IV. 하이브리드 연쇄 길쌈부호의 성능 분석

본고에서는 4-state RCC (HCCC1)와 8-state RCC (HCCC2)를 사용한 2개의 하이브리드 연쇄 길쌈부호를 고려하고 본고에서 유도한 식 (16), (17)을 사용하여 BER과 WER에 대한 상한계를 나타낸다. 모든 RCC들의 생성 행렬은 HCCC1의 경우는 $G_1 = [(1+D^2)/(1+D+D^2)]$, HCCC2의 경우는 $G_1 = [(1+D+D^2+D^3)/(1+D^2+D^3)]$ 이다. 그러므로 HCCC1의 경우는 $z_{\min}^O = z_{\min}^{P2} = z_{\min}^L = 4$ 이고 HCCC2의 경우는 $z_{\min}^O = z_{\min}^{P2} = z_{\min}^L = 6$ 이다. 부호율 R_c 는 1/4이고 $N=440$ 비트이다. AWGN과 레일리/라이시안 페이딩 채널에 대한 BER과 WER에 대한 상한계는 그림 2와 그림 3에 각각 나타나 있다. 그림 2와 3으로부터 state의 수가 증가함에 따라 성능이 크게 증가하는 것을 볼 수 있다. 또한 outer 부호기의 유효자유거리가 하이브리드 연쇄 길쌈부호의 성능에 큰 영향을 준다는 것을 알 수 있다.

V. 결론

본고에서는 각각의 구성코드가 RSC 부호로 이루어져 있는 한정된 구조만을 다루었고 구성코드의 WEF 대신에 유효자유거리를 사용함으로써 하이브리드 연쇄 길쌈부호의 BER과 WER에 대한 상한계를 유도하고, AWGN과 레일리/라이시안 페이딩 채널에 대한 비트오류확률과 워드오류확률을 분석하였다. 각각의 구성코드의 state의 수가 증가함에 따라 성능이 크게 향상된다. 또한 outer 부호기의 유효자유거리의 크기를 크게 부호기를 설계하면 하이브리드 연쇄 길쌈부호의 성능을 크게 향상시킬 수 있다.

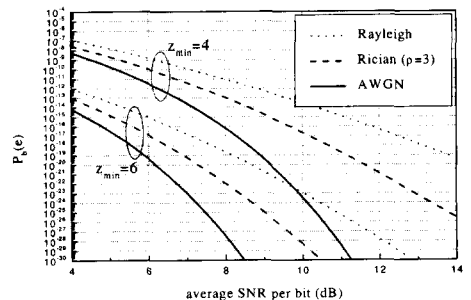


그림 2. AWGN과 레일리/라이시안 페이딩채널에 대한 HCCC1과 HCCC2의 BER 상한계 ($R_c=1/4$).

