

열탄성 구조물의 자유진동 특성

조희근*, 박영원**, 박기영***, 이경돈***

Free Vibration Analysis of Thermoelastic Structure

Hee Keun Cho*, Young Won Park**, Ki Young Park***, Kyoung Don Lee***

ABSTRACT

A numerical analysis algorithm for thermally loaded structures has been proposed and compared with the general free vibration approach to determine the characteristics of thermal load effects in vibrating structures. The field of numerical inspection includes free vibration analysis, transient heat transfer analysis and thermal stress analysis. The key point of the analysis of thermally loaded structure is the method of parallel time integration between transient heat transfer and free vibration simultaneously. The results of the study demonstrate the computation of the specific total external force vector and stiffness matrix. The proposed analysis method can be applied to both heated and cooled structure vibration analysis.

Key Words : Thermal stress (열응력), Free vibration (자유진동), Isoparametric element (등매개변수 요소), Thermoelasticity (열탄성), Buckling (좌굴)

기호설명

- { Q } : 상당 열외력 벡터
- [K^k] : 전도 강성 행렬
- [K^c] : 대류 강성 행렬
- [K^r] : 복사 강성 행렬
- γ : 열팽창율
- [C] : 열용량 행렬
- { H } : 형상함수 벡터
- [B] : 변형율-변위 행렬
- ρ : 질량 밀도
- R_I : 열응력 상당 행렬

1. 서론

실제 구조물에 가해지는 하중은 다소간의 동적인 성질을 갖는 것이 대부분이고 편의상 정적하중으로 취급하는 경우가 많다. 시간적으로 변하는 동적하중에 대한 구조물의 응답인 동적거동을 구하기 위해서는 구조물의 강성에 대한 탄성력 이외에 질량에 의한 관성력과 감쇠 효과에 의한 감쇠력을 고려하여야 한다. 구조물의 동적해석에서는 Newmark, Houbolt⁽³⁾, Wilson- θ ⁽³⁾, Central difference method⁽³⁾ 등이 대표적인 수치해석 방법으로 알려져 있다. 정적하중 외에 관성력(inertia force)을 고려 하여야 하는 동적 해석에서는 이러한 수치해석 방법에 의

* 아주대학교 시스템공학부
 ** 아주대학교 시스템공학부 교수
 *** 고등기술연구원

해서 구조물의 동적 거동을 비교적 정확하게 구할 수 있다. 정적 문제나 동적 문제에 있어서 비선형 대변위 구조물의 해석에서는 Newton type 방법^(1,2,3)이 주로 이용되고 있다. 구조물이 동적 거동을 할 때 외부 힘, 간섭 혹은 다른 여러 가지 요인에 의해서 영향을 받는다면 이에 대한 고려가 필요하다.

고온에서 열전달이 일어나고 있는 열탄성 구조물의 동적 거동해석은 일반적인 탄성 구조물의 동적 거동해석과는 다르며 열에 의해 구조물의 동적 특성이 변하게 된다. 열탄성^(6,7) 구조물의 진동특성에서 열응력의 영향을 보다 정확하게 확인하기 위하여 감쇠가 없는 자유진동을 해석하였다. 해석에서는 2차원 8절점 등매개변수요소를 사용하였다. 해석시 시간 의존적 열전달과 동적거동을 동시에 시간 적분하여 해를 구하였다. 기존의 연구는 주로 열전달과 진동해석 각각의 독립된 영역에서 많이 행해졌으나 실제현상에서는 이러한 독립된 영역의 문제보다는 서로 복합되어 상호작용을 하는 구조물을 해석해야하는 경우가 많다. 본 논문에서는 열탄성 거동을 하는 구조물을 2차원 8절점 유한요소로 모델링한 다음 자유진동특성을 해석하였다.

열탄성 구조물의 자유진동을 해석하기 위해서는 먼저 시간의존적 열전달해석에 의한 온도분포를 구한다. 다음 단계로 온도분포에 의한 열응력 상당 외력벡터를 구하고 마지막 단계로 이 상당외력이 포함된 자유진동해석 정식화를 유도한다. 따라서 이 순서에 의하여 수식화를 유도한다.

2. 시간의존적 비선형열전달 유한요소 해석

2.1 시간의존적 열전달 해석 정식화

일반적 비정상상태의 2차원 열전달 지배 방정식은 식(1)과 같이 주어진다.

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right] - \dot{q} = 0 \quad (1)$$

c : 비열 k : 열전도 계수 \dot{q} : 열발생량

t : 시간 θ : 온도

식(1)을 변분법에 의하여 유한요소해석 평형방

정식으로 변환하면 식(2)가 된다. 식(2)에서 $\dot{\theta}$ 는 시간에 대한 온도의 변화율을 나타낸다.

$${}^{t+\Delta t}C^{(i)} \dot{\theta}^{(i)} + ({}^tK^k + {}^tK^c + {}^tK^r) \Delta \theta^{(i)} = {}^{t+\Delta t}Q + {}^{t+\Delta t}Q^c(i-1) + {}^{t+\Delta t}Q^r(i-1) - {}^{t+\Delta t}Q^k(i-1) \quad (2)$$

Q^c : 대류 외력벡터 Q^r : 복사 외력벡터

Q^k : 전도 외력벡터

여기서 i 번째 반복증분 끝에서 절점의 온도는 식(3)과 같다.

$${}^{t+\Delta t}\theta^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\theta^{(i-1)} + \Delta \theta^{(i)} \quad (3)$$

${}^{t+\Delta t}Q$ 는 external heat flow에 의해 시스템으로 유입된 열량이다. 식(2)의 각 항을 평형식으로 표현하면 다음과 같다.

$${}^tK^k \Delta \theta^{(i)} = \left(\sum_m \int_{v^{(m)}} k^{(m)} B^{(m)T} B^{(m)} dV^{(m)} \right) \Delta \theta^{(i)} \quad (4)$$

$${}^tK^c \Delta \theta^{(i)} = \left(\sum_m \int_{s_c^{(m)}} h^{(m)} H^{(m)T} H^{(m)} dS^{(m)} \right) \Delta \theta^{(i)} \quad (5)$$

$${}^tK^r \Delta \theta^{(i)} = \left(\sum_m \int_{s_r^{(m)}} \hat{k}^{(m)} H^{(m)T} H^{(m)} dS^{(m)} \right) \Delta \theta^{(i)} \quad (6)$$

$${}^{t+\Delta t}Q^{\alpha(i-1)} = \sum_m \int_{S_c^{(m)}}^{t+\Delta t} h^{(m)(i-1)} H^{(m)T} [H^{(m)} ({}^{t+\Delta t}\theta_e - {}^{t+\Delta t}\theta^{(i-1)})] dS^{(m)} \quad (7)$$

$${}^{t+\Delta t}Q^{k(i-1)} = \sum_m \int_{S_r^{(m)}} {}^{t+\Delta t}k^{(m)(i-1)} H^{(m)T} [H^{(m)}({}^{t+\Delta t}\theta_r - {}^{t+\Delta t}\theta^{(i-1)})] dS^{(m)} \quad (8)$$

$${}^{t+\Delta t}Q^{h(i-1)} = \sum_m \int_{V^{(m)}} B^{(m)T} [{}^{t+\Delta t}k^{m(i-1)} B^{(m)T} \theta^{(i-1)}] dV^{(m)} \quad (9)$$

h : 열대류 계수 \hat{k} : 열복사 계수
 θ_e : 대류 외부온도 θ_r : 복사외부온도

위의 식(4)~(9)에서 알 수 있는 바와 같이 k , h \hat{k} 가 온도에 의존적인 변수임을 알 수 있다. 그리고 열발생, 열플럭스 등도 온도의 함수가 된다. 여기서 온도의 함수라는 것은 물성치가 온도의 다항함수로 나타나는 것을 의미한다. 시간의존적 열전달을 해석하기 위해서는 시간에 대한 적분을 하여야 한다. 시간간격 Δt 에 대한 시간적분의 수식을 유도한다. 식(2)를 단순형태로 나타내면 식(10)과 같이 된다.

$${}^{t+\Delta t}C^{(i)} \dot{\theta}^{(i)} + {}^tK \Delta \theta^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \bar{Q}^{(i-1)} \quad (10)$$

${}^{t+\Delta t} \bar{Q}^{(i-1)}$: 절점의 열하중
 ${}^tK = {}^tK^k + {}^tK^c + {}^tK^r$

Euler backward 방법을 사용한 시간적분 수식은 식(11)이 된다.

$${}^{t+\Delta t} \dot{\theta}^{(i)} = \frac{{}^{t+\Delta t} \theta^{(i)} + \Delta \theta^{(i)} - {}^t\theta}{\Delta t} \quad (11)$$

따라서 식(11)을 식(10)에 대입하면 식(12)와 같이 표현된다. 열탄성 자유진동해석의 첫 단계로써 시간의존적인 온도분포를 구하기 위한 수식을 정립하였다.

$$\left({}^tK + \frac{1}{\Delta t} {}^{t+\Delta t}C^{(i)} \right) \Delta \theta^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \bar{Q}^{(i-1)} - {}^{t+\Delta t}C^{(i)} \dot{\theta}^{(i-1)} \quad (12)$$

2.2 열응력 상당 외력 벡터

2.1절에서 유도한 식(12)를 이용하여 시간의 변화에 따른 구조물의 온도분포를 구할 수 있다. 이 온도분포는 구조물에 열응력을 발생시켜 내력을 작용시킨다. 따라서 온도분포로 인한 내력계산을 위한 정식화를 유도한다. 열응력을 받지 않는 초기 기준온도를 θ_0 라고 하면 기계적 변형율과 열변형율에 의한 전체응력⁽³⁾은 다음과 같다.

$$\sigma = E(\epsilon - \epsilon^{th}) \quad (13)$$

E : 응력-변위 재료물성치 행렬

여기서 $\epsilon_{xx}^{th} = \alpha(\theta - \theta_0)$, $\epsilon_{yy}^{th} = \alpha(\theta - \theta_0)$, $\gamma_{xy}^{th} = 0$ 이 된다. 만약 절점에서의 변형율을 $\epsilon = 0$ 이라고 하면 열적 변형율에 의한 응력은 초기응력(initial stress)으로 생각될 수 있다. 따라서 절점에서의 상당응력 외력벡터는 식(14)와 같다.

$$R_I = - \int_v [B]^T \tau^I dV \quad (14)$$

여기서 τ^I 는 초기응력 벡터이며 다음과 같다.

$$\tau^I = \frac{E\gamma}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \left\{ \left(\sum_{i=1}^8 h_i \theta_i \right) - \theta_0 \right\} \quad (15)$$

3. 열탄성(Thermoelasticity) 자유진동

3.1 자유진동해석 (Newmark Method)

자유진동해석에서 시간적분 방법의 하나인 Newmark 방법^(3,9)은 선형 가속도 방법의 확장에 의해서 이해 될 수 있으며 아래의 식들에 의해서 가정된 속도와 변위에 바탕을 두고 있다.

시간 $t + \Delta t$ 에서의 일반적인 자유진동해석의 평형 방정식은 식(16)과 같다. 식(17)은 Fig. 1의 trapezoidal rule에 의한 $t + \Delta t$ 에서의 속도와 변위를 나타낸다. 식(17)의 속도와 변위 항을 식(16)에 대입하여 시간적분 가능한 유한요소 평형방정식을 유도한다. 식(17)에서 α 와 δ 는 적분의 정확성과 안정성을 위하여 정의되어지는 파라미터이다. α 와 δ 가 각각 0.5 와 0.25 일 경우에는 무조건 안정적이며 이것은 일정 평균 가속도 방법에 의해서 얻어진 것이다. 아래에서 유도되는 식은 α, δ 가 각각 0.5 와 0.25인 경우의 평형방정식이다.

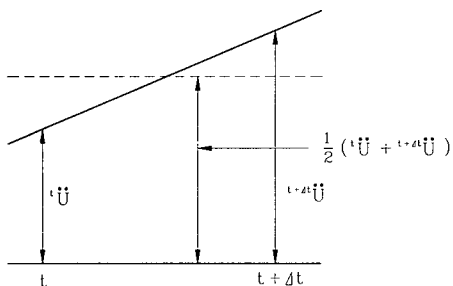


Fig. 1 Neqmark's constant-average-acceleration scheme.

$$[M] {}^{t+\Delta t}\ddot{U} + [D] {}^{t+\Delta t}\dot{U} + [K] {}^{t+\Delta t}U = {}^{t+\Delta t}\{R\} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\dot{U} &= {}^t\dot{U} + [(1-\delta){}^t\ddot{U} + \delta {}^{t+\Delta t}\ddot{U}] \Delta t \\ {}^{t+\Delta t}U &= {}^tU + {}^t\dot{U}\Delta t \\ &\quad + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) {}^t\ddot{U} + \alpha {}^{t+\Delta t}\ddot{U} \right] \Delta t^2 \end{aligned} \quad (17)$$

[M] : 질량행렬 [D] : 감쇠행렬
 \dot{U} : 속도벡터 \ddot{U} : 가속도벡터

진동해석에서는 가해진 체적력에 관성력이 포

함된다. 만약 체적의 무게가 일정하게 보존된다고 생각하면 질량 행렬은 시간적분이 행해지기 전인 $t=0$ 인 초기 형상에서 계산되어져 사용될 수 있다. 대변위 문제는 비선형적인 것으로 이를 해석하는 방법중 Total-Lagrangian 방법⁽⁹⁾과 Updated-Lagrangian⁽⁹⁾ 방법이 많이 사용되고 있다. Total-Lagrangian 방법은 초기상태를 기준으로 다음 단계의 상태를 계산하는 방식이며 본 연구에서는 Total-Lagrangian 방법을 사용하였다. 식(16)에서 감쇠가 없는 자유진동을 생각하면 Total-Lagrangian 증분형 평형 방정식은 식(18)과 같다.

$$\begin{aligned} \left({}^t_0 K_L + {}^t_0 K_{NL} \right) \Delta u^{(k)} &= {}^{t+\Delta t}R \\ - {}^t_0 F^{(k-1)} - M {}^{t+\Delta t} \ddot{u}^{(k)}, \quad k=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (18)$$

$[K_L]$: 선형 강성행렬 $[K_{NL}]$: 비선형 강성행렬

Fig. 1의 trapezoidal rule을 사용하여 변위, 속도, 가속도의 항들을 나타내면 다음과 같다.

$${}^{t+\Delta t}U = {}^tU + \frac{\Delta t}{2} ({}^t\dot{U} + {}^{t+\Delta t}\dot{U}) \quad (19)$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{U} = {}^t\dot{U} + \frac{\Delta t}{2} ({}^t\ddot{U} + {}^{t+\Delta t}\ddot{U}) \quad (20)$$

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\ddot{U}^{(k)} &= \frac{4}{\Delta t^2} ({}^{t+\Delta t}U^{(k-1)} - {}^tU + \Delta U^{(k)}) \\ &\quad - \frac{4}{\Delta t} ({}^t\dot{U} - {}^t\ddot{U}) \end{aligned} \quad (21)$$

식(19)~(21)을 식(16)에 대입하고 감쇠행렬을 제거하면 식(22)의 증분형 시간적분 비선형 평형방정식이 된다.

$$\begin{aligned} \left({}^t[K] + \frac{4}{\Delta t^2} [M] \right) \Delta U^{(k)} &= {}^{t+\Delta t}\{R\} \\ - {}^{t+\Delta t}\{F\}^{(k-1)} - [M] \left(\frac{4}{\Delta t^2} \right. \\ &\quad \left. ({}^{t+\Delta t}U^{(k-1)} - {}^tU) - \frac{4}{\Delta t} ({}^t\dot{U} - {}^t\ddot{U}) \right) \end{aligned} \quad (22)$$

비선형 동적 해석에서는 정적 해석에서와 같이 각 시간구간 마다 정확한 반복 계산이 이루어져야 한다. 아래의 식은 질량, 강성, 외력을 계산 가능한 행렬의 형태로 나타낸 것이다.

$$M^{t+\Delta t} \ddot{u} = {}^0\rho \left(\int H^T H^0 dV \right)^{t+\Delta t} \ddot{u} \quad (23)$$

$${}^t_0 K_L u = \left(\int {}^t_0 B_L^T {}^0 E {}^t_0 B_L^0 dV \right) u \quad (24)$$

$${}^t_0 K_{NL} u = \left(\int {}^t_0 B_{NL}^T {}^t_0 S {}^t_0 B_{NL}^0 dV \right) u \quad (25)$$

$${}^t_0 F = \int {}^t_0 B_L^T {}^t_0 S^0 dV \quad (26)$$

S : 응력행렬 F : 내력벡터

B_{NL} : 비선형 변형율-변위 행렬

B_L : 선형 변형율-변위 행렬

Total-Lagrangian formulation의 이차원 평면 해석에 사용되는 증분형 변형율을 ${}^0 e^T = [{}^0 \epsilon_{11}, {}^0 \epsilon_{22}, {}^0 \epsilon_{12}, {}^0 \epsilon_{33}]$ 라고하면 선형 변형율-변위 변환 행렬은⁽⁹⁾ 식(28)을 이용하여 계산한다.

$${}^0 e = {}^t_0 B_L u \quad (27)$$

$${}^t_0 B_L = {}^t_0 B_{L0} + {}^t_0 B_{L1} \quad (28)$$

$${}^t_0 B_{L0} = \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} {}^0 h_{1,1} & 0 & \cdots & {}^0 h_{N,1} & 0 \\ 0 & {}^0 h_{1,2} & \cdots & 0 & {}^0 h_{N,2} \\ {}^0 h_{1,2} & {}^0 h_{1,1} & \cdots & {}^0 h_{N,2} & {}^0 h_{N,1} \\ \frac{h_1}{x_1} & 0 & \cdots & \frac{h_N}{x_1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} {}^0 h_{i,j} &= \frac{\partial h_k}{\partial x_j} \\ \text{여기서 } u_j^k &= {}^{t+\Delta t} u_j^k - {}^t u_j^k \\ {}^0 \bar{x}_1 &= \sum_{k=1}^N h_k^0 x_1^k; \\ N &= \text{number of nodes} \end{aligned} \quad (30)$$

$${}^t_0 B_{L1} = \begin{bmatrix} l_{11} {}^0 h_{1,1} & l_{21} {}^0 h_{1,1} \\ l_{12} {}^0 h_{1,2} & l_{22} {}^0 h_{1,2} \\ (l_{11} {}^0 h_{1,2} + l_{12} {}^0 h_{1,1}) & (l_{21} {}^0 h_{1,2} + l_{22} {}^0 h_{1,1}) \\ l_{33} \frac{h_1}{x_1} & 0 \\ \cdots & l_{21} {}^0 h_{N,1} \\ \cdots & l_{22} {}^0 h_{N,2} \\ \cdots & (l_{21} {}^0 h_{N,2} + l_{22} {}^0 h_{N,1}) \\ \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

여기서

$$\begin{aligned} l_{11} &= \sum_{k=1}^N {}^0 h_{k,1} {}^t u_1^k \\ l_{22} &= \sum_{k=1}^N {}^0 h_{k,2} {}^t u_2^k \\ l_{21} &= \sum_{k=1}^N {}^0 h_{k,1} {}^t u_2^k \\ l_{12} &= \sum_{k=1}^N {}^0 h_{k,2} {}^t u_1^k \\ l_{33} &= \left(\sum_{k=1}^N h_{k,1} {}^t u_1^k \right) / {}^0 \bar{x}_1 \end{aligned} \quad (32)$$

$${}^t_0 B_{NL} = \begin{bmatrix} {}^0 h_{1,1} & 0 & {}^0 h_{2,1} & 0 \\ {}^0 h_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^0 h_{1,1} & 0 & {}^0 h_{2,1} \\ 0 & {}^0 h_{1,2} & 0 & {}^0 h_{2,2} \\ \frac{h_1}{x_1} & 0 & \frac{h_2}{x_1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \dots & {}_0 h_{N,1} & 0 \\
 \dots & {}_0 h_{N,2} & 0 \\
 \dots & 0 & {}_0 h_{N,1} \\
 \dots & 0 & {}_0 h_{N,2} \\
 \dots & \frac{{}_0 h_N}{{}_0 x_1} & 0
 \end{array} \quad (33)$$

$$\tau^I = \frac{E\gamma}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \left\{ \left(\sum_{i=1}^n h_i \theta_i \right) - \theta_0 \right\} \quad (35)$$

식(35)는 열전달에 의해 발생한 온도변화의 2차원 초기응력 행렬이다.

비선형 변형율-변위 변환 행렬은 식(33)과 같이 나타내어진다.

4. 열탄성 자유진동 해석

3.2 열탄성(Thermoelastic) 자유진동 유한요소 평형방정식

최종적인 열탄성 자유진동 평형 방정식을 유도하기 위해서는 식(12)의 시간의존적 열전달 해석 방정식에 의한 온도분포 해석 결과와 식(14)의 온도분포에 의한 상당 열응력 외력벡터를 식(22)의 자유진동 평형식에 적용하여야 한다. 열탄성 거동을 하는 연속체의 자유진동 평형식은 Newmark⁽³⁾ 직접적분 평형식에 열응력의 영향을 고려하여 구성된다. 시간적분 하는 동안 Δt 시간이 길어지면 열전달에 의한 온도의 변화가 급격하게 되고 이로 인하여 발생하는 내부력이 증가하게 되어 자유진동 해석시 불안정한 상태가 된다. 식(34)는 열탄성 자유진동 해석의 유한요소 해석 평형식이다. Δt 시간동안 시간의존적 열전달 해석과 각 시간 단계마다 구조물이 이동한 좌표값의 고려가 이루어져야 하며 열전달의 연속적인 계산이 필요하다. 이 식은 연속체의 온도에 의해 발생하는 영향을 적용하여 자유진동을 해석할 수 있는 유한요소 평형식이다.

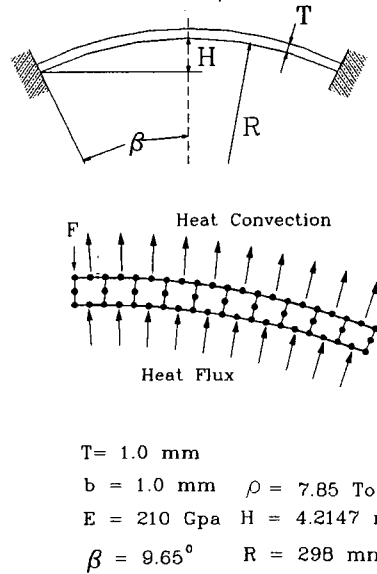


Fig. 2 Geometry and finite elements of a shallow arch.

$$\begin{aligned}
 & \left({}^t [K] + \frac{4}{\Delta t^2} [M] \right) \Delta U^{(k)} = {}^{t+\Delta t} \{R\} \\
 & - \int_v {}^{t+\Delta t} [B] {}^{t+\Delta t} \tau^I dV \\
 & - {}^{t+\Delta t} \{F\}^{(k-1)} - [M] \left(\frac{4}{\Delta t^2} \right. \\
 & \left. ({}^{t+\Delta t} U^{(k-1)} - {}^t U) - \frac{4}{\Delta t} ({}^t \dot{U} - {}^{t-1} \dot{U}) \right)
 \end{aligned} \quad (34)$$

Fig. 2와 같은 얇은 아아치 형상의 구조물에 열탄성 자유진동 해석을 하였다. 아아치의 내부에서는 열 입력이 있으며 바깥면에서는 열대류가 발생한다. 이때 전도, 대류, 열 입력은 온도의 함수로 비선형 적으로 변한다. Table 1은 재료의 물성치를 나타내며 열전달 해석에서 초기 온도는 0°C이다.

Table 1에서 알 수 있는 바와 같이 열전도 계수, 열대류 계수, 열 플럭스 등이 온도의 함수로 주어졌다. Fig. 2의 모델을 비선형 정적해석을 통하여 좌굴 강성을 알아본다.

Table 1 Material Property of Shallow Arch

Properties	Given values
$K_{xx}, K_{yy} (W/mm^2 \text{ } ^\circ C)$	$31.2E-3 + 2.E-4*\theta$
$h (W/mm^2 \text{ } ^\circ C)$	$140.E-5 - 8.75E-8*\theta$
$Q_{flux} (W/mm^2)$	$400.E-5 - 2.5E-8*\theta$
$\alpha_{xx}, \alpha_{yy} (1/^\circ C)$	$11.9E-6$
E (GPa)	210.
ν	0.3
S_y (MPa)	510.
θ_0 ($^\circ C$)	25.

Fig. 3은 열전달이 없을 경우 아아치의 중앙에 하중을 가했을 때 정적 응력-변위 곡선이다. 약 8N 근처에서 아아치가 좌굴이 일어나는 것을 알 수 있다.

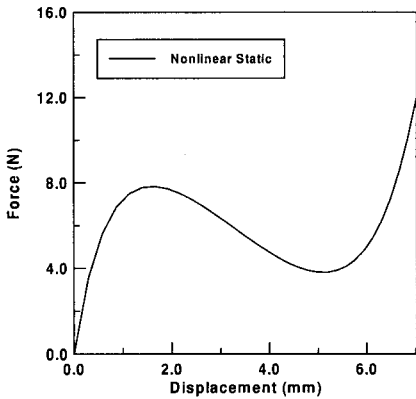


Fig. 3 Force & displacement relation of shallow arch by static analysis.

Fig. 4는 하중이 5N, 6N, 6.5N, 7N을 가하였을 경우의 동적 거동을 나타낸다. Fig. 3에서 알 수 있는 바와 같이 정적해석에서는 좌굴 하중이 8N 정도지만 동적 해석에서는 관성력의 첨가로 인해 약 6.5~7N 사이에서 좌굴이 일어난다.

Fig. 3, 4의 해석을 토대로 하여 열하중이 가해졌을 경우의 거동을 알아보기 위하여 5N, 6N의 하중이 각각 가해졌을 경우 일반적인 탄성 자유진동 해석과 열탄성 자유진동해석을 비교 검토하여 열탄성 자유진동의 거동 특성을 알아본다.

아아치의 열탄성 자유진동 특성을 알아보기 위하여 좌굴이 일어나기 전과 좌굴이 일어난 후의 두 가지 경우에 대하여 해석을 하였다.

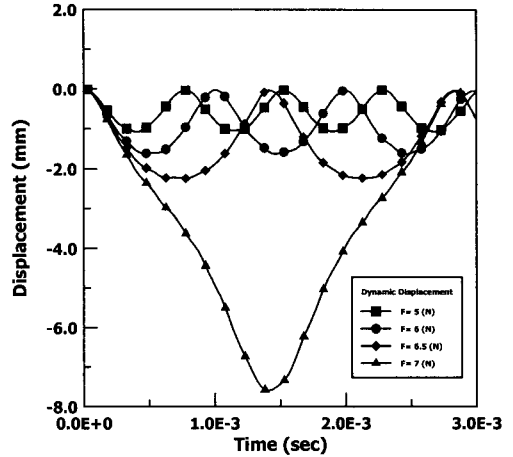


Fig. 4 Force & displacement relation of shallow arch by dynamic analysis.

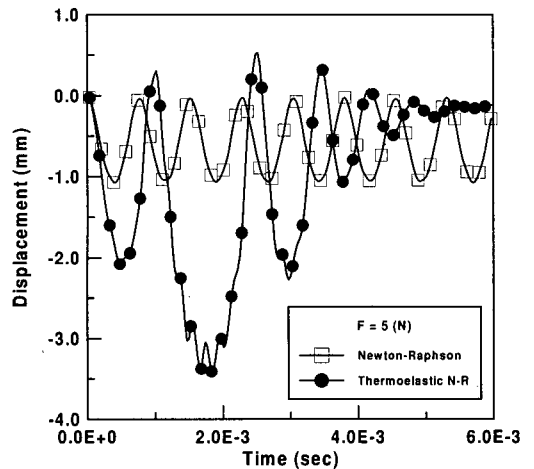


Fig. 5 Dynamic response of elastic and thermoelastic shallow arch before buckling occurred. (F=5N)

Fig. 5는 5N의 하중을 일정하게 작용하였을 경우 일반적인 자유진동 해석 결과와 열탄성 자유진동 결과를 나타낸다. 처음 열전달이 일어나면서 아아치의 진동이 불규칙적인 현상을 나타내었다. 시간이 약 6ms 초 되는 지점에서는 열에 의해 내부력

이 증가하여 진동의 감쇠가 일어났다. 이 경우는 좌굴이 일어나지 않았으며 단지 진동현상이 매우 불규칙하다.

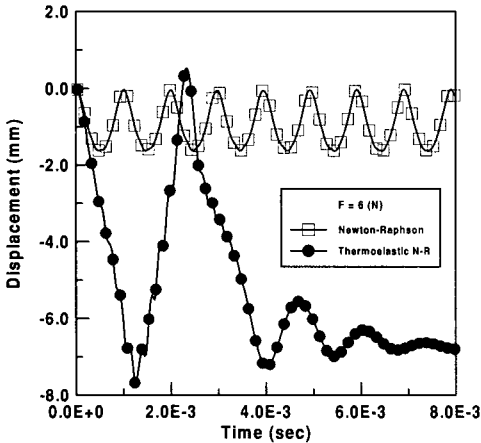


Fig. 6 Dynamic response of elastic and thermoelastic shallow arch after buckling occurred. (F=6N)

Fig. 6은 6N의 하중이 가해진 경우이며 탄성 자유진동 해석에서는 좌굴이 일어나지 않았으나 열탄성 자유진동에서는 좌굴이 일어났다. 이것은 온도 분포에 의한 열하중의 첨가로 인하여 진동특성이 변하였기 때문이며 좌굴이 된 상태에서 진동의 감쇠가 일어났다. 이 해석을 통하여 열탄성 자유진동 특성은 일반적인 탄성 자유진동 특성과 다르며 일반적으로 온도분포에 의한 열응력을 받음으로써 내부력이 증가하여 진동의 감쇠가 일어난다.

5. 결론

본 연구에서는 기존의 진동문제로부터 열전달에 의해 고체에 내부응력이 발생하는 구조물의 진동문제를 해결할 수 있는 방법을 제안하였다. 시간의존적 열전달이 일어나는 열탄성 구조물의 동적해석에 필요한 유한요소 평형방정식을 완성하고 이를 실제 문제에 적용하였다. 해석에는 2차원 8절점요소 사용하며 비선형 Newton-Raphson Method로 해를 구하였다. 유한요소를 사용하여 진동과 열전달을 동시에 해석하기 위해서는 고체가 진동을 하면서 각 절점의 좌표가 변하기 때문에 이 변경된 좌표에 대한 열전달을 해석해야 하는 어려움이 있으며 또한 열전달과 동적거동을 동시에 시간적분

할 수 있는 알고리즘이 필요하다. 따라서 본 연구에서는 각 시간적분 단계별로 변경된 좌표를 가지고 각 절점의 온도를 계산하였다.

얇은 아아치의 해석에서는 열전달이 처음 시작되는 시간에서는 동적 응답에 거의 변화가 없었으나 고체내부의 온도변화가 급격한 부분에서는 많은 차이점을 보였다. 열전달이 충분히 일어난 후 온도가 거의 정상상태에 이르면서 감쇠현상이 나타나 진동의 폭이 매우 좁아졌다.

참고문헌

1. O.C. Zienkiewicz, "The Finite Element Method in Engineering Science," McGraw-Hill, London, 1971.
2. K.J. Bathe and E.L. Wilson, "Numerical Methods in Finite Element Analysis," Prentice-Hall, 1976.
3. K.J. Bathe, "Finite Element Procedures in Engineering Analysis," Prentice-Hall, 1982.
4. R.D. Cook, "Concepts and Applications of Finite Element Analysis," Wiley, 1989.
5. K.G. McConnell, "Vibration Testing Theory and Practice," Wiley International Science, 1995.
6. R. Song, G. Dhatt, A.B. Cheikh, "Thermo-mechanical Finite Element Model of Casting Systems," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 30, pp. 579-599, 1990.
7. K. J. Bathe, "Finite element formulation and solution of nonlinear heat transfer," Nuclear Engineering and Design, Vol. 51, pp.389-401, 1979.
8. Tairo Ishizaki and K.J Bathe, "On Finite Element Large Displacement and Elastic-Plastic Dynamic Analysis of Shell Structures," Computers & Structures, Vol. 12, pp. 309-318, 1980.
9. K.J Bathe and E.L. Wilson, "Finite Element Formulation for Large Deformation Dynamic Analysis," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.9, pp. 353-386, 1975.
10. J.S. Humphreys, "On Dynamic Snap Buckling of Shallow Arches," AIAA Journal, Vol. 4, pp. 878-886, 1966.
11. 이우식, "열탄성 진동감쇠에 관한 해석적연구," 대한기계학회논문집, Vol. 9, pp. 801-809, 1985.