한국정밀공학회지 제17권 제12호 (2000년 12월)
Journal of the Korean Society of Precision Engineering Vol. 17, No. 12, December 2000.

선형 주기시스템의 제어 및 수치해석적 절차 수립에 관한 연구

조장현*

Development of the Numerical Procedures for the Control of Linear Periodic Systems

Jang Hyen Jo*

ABSTRACT

The scope of this paper is focused to the systems which have the time period and they should be necessarily studied in the sense of stability and design method of controller to stabilize the original unstable systems. In general, the time periodic systems or the systems having same motions during certain time interval are easily found in rotating motion device, i.e., satellite or helicopter and widely used in factory automation systems. The characteristics of the selected dynamic systems are analyzed with the new stability concept and stabilization control method based on Lyapunov direct method. The new method from Lyapunov stability criteria which satisfies the energy convergence is studied with linear algebraic method. And the numerical procedures are developed with computational programming method to apply to the practical linear periodic systems. The results from this paper demonstrate the usefulness in analysis of the asymptotic stability and stabilization of the unstable linear periodic system by using the developed simulation procedures.

Key Words : Linear periodic system(선형주기시스템), Asymptotic stability(점근적 안정성), Lyapunov direct method(리아프노프 직접방법)

기호설명

x = state variables
$f(x)$ = system equation
A = matrix of Linear periodic systems
Φ = state transition matrix
λ = characteristic multiplier
ρ = characteristic exponent
$V(x)$ = Lyapunov function
S = matrix of Lyapunov function
C = auxiliary matrix of time derivative of Lyapunov function

1. 서론

동적 시스템 중 일정한 시간동안 동적 특성이 반복되는 주기시스템의 해석은 실질적인 운동계의 수식 표현과 시스템 안정성 분석에서 시작된다. 이중 시스템 설계개념의 기본 요소인 안정성 분석은 여러 방법으로 시도되었으며 그 중의 하나인 리아프노프 직접방법(Lyapunov direct method)은 시스

* 한라대학교 기계공학부

템 전체에너지의 발산 또는 수렴성 해석에 기초를 두고 있다. 이에 선형주기시스템의 리아프노프의 안정해석이론을 바탕으로 시스템 변수의 수학적 변경 즉, 모오드 변환에 의한 비선형계의 선형계로의 변환에 따른 제어연구가 Calico와 Wiesel[1]에 의해 수행되었다. 또한 Wiesel,W와 Shelton, W.[2]는 불안정한 주기궤도상의 인공위성에 대하여 연구하였으며 Breakwell, J.V. 와 Ratner, M.J.[3]에 의하여 정지궤도상에서의 주기적 운동이 연구되었다. 또한 2차원 주기시스템의 경우에 다항식형태(Quadratic form)의 리아프노프함수를 이용한 스칼라적 제어방법이 Radziszewski와 Zaleski[4]에 의해 제안되었고 E.J. Davison과 E.M. Kurak[5]은 비선형시스템에 적용하는 다항식의 리아프노프함수를 프로그래밍에 의해 도출하는 연구가 수행된바 있다. 이러한 주기시스템은 인공위성분야의 대형 시스템에서 일반산업용 로봇시스템 등 광범위하다.

이에 본 연구는 리아프노프 직접방법에 기초하여 제시된 새로운 안정기준을 주기시스템에 적용하여 안정성을 확인하고 이후 불안정한 시스템의 안정화를 위한 제어기를 설계하는 수치해석적 절차 수립에 목표를 두고 있다.

2. 동적 주기시스템 및 안정성이론

2.1 동적 주기시스템

일반적으로 비선형 주기시스템은

$$\dot{x}=f(x)\ ,\ x^*(t)=x^*(t+T) \tag{1}$$

으로 표현되며

$$\delta x(t)=x(t)-x^*(t) \tag{2}$$

는 시간에 대하여 주기궤적에서 작은 이탈범위를 나타내거나 주기 T>0 인 상태 공간에서의 폐곡선근의 경로를 나타낸다. 비선형함수의 선형화 시스템으로의 변경은 아래와 같이 표현된다.

$$\delta\dot{x}=A(t)\ \delta x \tag{3}$$

여기에서 $A(t)$는 $\frac{\partial f}{\partial x}\ (x(t))$에 의한 선형화결과로 시간에 대하여 주기성을 지닌다. 이에 대한 선형주기시스템의 수학적 표현은

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x(t)\ ,\ A(t)=A(t+T) \tag{4}$$

이며 자료[6]를 토대로 주기시스템의 안정성해석의 내용을 살펴보면 우선 주기시스템의 상태전이행렬 (state-transition matrix) Φ은

$$\frac{d\Phi}{dt}=A(t)\Phi\ ,\ \Phi(t,t)=I \tag{5}$$

로 표현되고 이와 같은 수학적 모델로부터 선형대수학을 통하여 아래의 과정이 계산된다. 즉

$$\Phi(t+T,t_0)=\Phi(t,t_0)C \tag{6}$$

이고 식(6)을 식(5)에 대입하면

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}(t+T,t_0)&=\dot{\Phi}(t,t_0)C=A(t)\Phi(t,t_0)C\\ \dot{\Phi}(t+T,t_0)&=A(t)\Phi(t+T,t_0)\end{aligned} \tag{7}$$

가 되며 또한

$$C=e^{RT} \tag{8}$$

인 상수 행렬 C와 R가 존재하며 새로운 행렬 P의 정의와 주기성은

$$\begin{aligned}\Phi(t,t_0)&=P(t,t_0)e^{R(t-t_0)}\\ P(t,t_0)&=P(t+T,t_0)\end{aligned} \tag{9}$$

가 된다. 이를 이용한 결과

$$\begin{aligned}\Phi(t_0,t_0)&=\ P(t_0,t_0)=e^{R(t_0-t_0)}=I\\ \Phi(t_0+T,t_0)&\ =P(t_0+T,t_0)e^{RT}=e^{RT}\end{aligned} \tag{10}$$

와 같은 상태전이 행렬과 시스템 방정식은 주기를 갖는 조정된 자연지수(exponential)의 행렬함수로 표현된다.

2.2 주기시스템의 안정성 관련 분석

위의 선형주기시스템의 특성에 의하여 지수행렬 R의 고유값(eigenvalues)의 실수부가 음(negative)일 경우 점근적으로 안정(asymptotically stable)한 시스템으로써, 이 조건을 수식으로 표현하면

$$\begin{aligned}det[I\rho-R]&=0\ ,\ Re(\rho_i)<0\\ det[\lambda I-e^{RT}]&=0\ ,\ |\lambda_i|<1\end{aligned} \tag{11}$$

이 된다. 여기에서 ρ는 행렬 A의 특성지수(characteristic exponents)로, λ는 특성배수(characteristic multiplier)로 정의한다. 또한

$$x = P(t, t_0)y \ , \ y = P^{-1}(t, t_0)x \qquad (12)$$

를 이용하여 상태변수를 변환하여 주기시스템을 계산하면 상태변수와 행렬 R로써

$$\dot{y} = Ry \qquad (13)$$

와 같이 선형 시불변 시스템으로 작성된다. 이는 행렬 R의 고유값(eigenvalues) ρ의 실수부로써 주기시스템의 안정성을 판단할 수 있음을 알 수 있다. 이제 ρ와 λ의 관계를 살펴보면

$$Q^{-1}e^{RT}Q = Q^{-1}[I + RT + \frac{(RT)^2}{2!} + \cdots]Q = e^{Q^{-1}RTQ} = \Lambda \qquad (14)$$

로 부터

$$Q^{-1}RTQ = \ln \Lambda \qquad (15)$$

가 되며 ρ는 행렬 R의 고유값으로 행렬 e^{RT}의 고유값인 λ와는 각각

$$\rho_i = \frac{\ln \lambda_i}{T} \qquad (16)$$

임을 알 수 있다. 이 같은 결과와 더불어

$$det[\Phi(t, t_0)] = \exp \int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}A(\sigma)d\sigma \qquad (17)$$

와 식(10)으로부터

$$det[e^{RT}] = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j = \exp \int_{t}^{t+T} \mathrm{Tr}A(\sigma)d\sigma \qquad (18)$$

이 되며 식(16)을 적용하면

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_j = \frac{1}{T} \int_{t}^{t+T} \mathrm{Tr}A(\sigma)d\sigma \qquad (19)$$

의 연관관계를 얻을 수 있다. 일반적인 상태변수에 의한 폐루프 선형 주기시스템은

$$\dot{x} = [A(t) + B(t)G(t)]x \qquad (20)$$

이며 식(12)를 이용, 변환하면

$$\dot{y} = [R + P^{-1}(t)B(t)G(t)P(t)]y \qquad (21)$$

가 된다. 위의 시스템방정식을 2개의 mode를 갖는 경우는

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} \omega_1 + k_1(t)g_1(t) & k_2(t)g_1(t) \\ k_1g_2(t) & \omega_2 + k_2(t)g_2(t) \end{bmatrix} y \qquad (22)$$

가 된다.

2.3 리아프노프 이론에 근거한 안정 판정

리아프노프의 직접방법은 리아프노프 함수라 불리는 스칼라함수를 이용한 것으로 이 함수는 $V(0) = 0$, $V(x) > 0 (\|x\| \neq 0)$, 그리고 시간의 도함수는 연속 등의 특성을 지닌 함수가 시간의 도함수가 항상 음(negative-definite)일 경우 시스템이 점근적 안정하다고 판정할 수 있는 방법이다. 리아프노프 함수는 시스템의 에너지를 상징하는 것으로 행렬과 상태 벡터와의 곱 형태 (Quadratic form)인 양의 에너지 함수로

$$V(x) = x^TSx \qquad (23)$$

이며 시간에 대한 미분은 식(4)와 함께

$$\dot{V} = x^T(A^TS + SA)x = x^TQx \qquad (24)$$

이 된다. R.A. Ibrahim의 참고자료[8]에 나타난 선형 대수학적인 관계와 리아프노프함수와 시간에 대한 미분함수의 상관관계를 보면 먼저 이차다항식 함수 F를

$$F = x^TDx - x^TBx \qquad (25)$$

로 가정한다. D와 B는 $n\times n$의 대칭(symmetric) 행렬이며 B는 항상 양(positive definite)을 유지한다. 이때에 특성방정식을 아래와 같이 행렬식으로 표시하면

$$det|D-\lambda B|=0 \tag{26}$$

이고 F의 고유값(eigenvalues)중 최대, 와 $\lambda_{\min}$이라 하면 이는 DB^{-1}의 고유최소값을 $\lambda_{\max}$값과 같으므로 이를 나타내면

$$\lambda_{1or\ n}[\,DB^{-1}]=min\ \text{or}\ max\frac{x^TDx}{x^TBx} \tag{27}$$

이 된다. 고로 위의 식(23)의 리아프노프함수에 나타난 행렬 S을 식(27)에서 나타난 행렬 B로, 또한 식(24)의 리아프노프함수의 시간에 대한 미분함수에 나타난 행렬 Q을 역시 식(27)의 행렬 D로 치환하여 새로운 고유값의 관계식을 표현하면

$$\lambda(t)[QS^{-1}]=\frac{\dot{V}}{V}=\frac{x^TQx}{x^TSx} \tag{28}$$

와 같다. 식(24), (27), (28)로 부터

$$\lambda_{\min}[A^T+SAS^{-1}]<\lambda(t)<\lambda_{\max}[A^T+SAS^{-1}] \tag{29}$$

가 되며 새로운 행렬

$$C(t)=A^T+SAS^{-1} \tag{30}$$

가 되고 식(28)의 1차미분방정식을 적분하면

$$V(x(t))=V(x_0)\exp[\int_{t_0}^{t}\lambda(\mathrm{t})\mathrm{dt}] \tag{31}$$

이 된다. 이는 행렬 C의 고유값에 대하여 리아프노프 직접방법을 적용하여 주기시스템의 안정성을 판정할 수 있다. 이에 바로 주기시스템의 안정성의 판단기준은 식(31)의 지수항으로 $t=t_0+nT$를 대입하면

$$V(x(t))=V(x_0)e^{n\int_0^T\lambda_{\max}(t)dt} \tag{32}$$

가 되며 결과적으로 지수항만을 다시 표현하면

$$\int_0^T\lambda_{\max}(t)dt \tag{33}$$

이 안정성 판정의 기준임을 알 수 있다. 즉 식(33)이 음 또는 실수부가 음일 때 리아프노프 함수의 1차도함수가 음인 것을 의미하며 이는 리아프노프 직접방법의 점근적 안정 조건이 된다. 또한 식(33)을 기초하여 불안정한 주기시스템의 안정화를 위한 제어기의 설계가 가능하다. 이에 먼저 제어기의 형태는 주기시스템의 주기성을 만족해야 하므로 Fourier 급수 형태를 선택하는 것이 보편적인 방법으로 판단된다.

$$k_i=k_i(0)+\sum_{n=1}^{m}[Ak_i(n)\sin\frac{2n\pi t}{T}+Bk_i(n)\cos\frac{2n\pi t}{T}] \tag{34}$$

시스템의 안정화를 위한 Fourier 급수의 계수선정이 수치 해석적 절차에 의해 제한된(truncated) 항까지 도출하도록 한다. 본 논문에서는 시스템의 안정화에 우선적인 목표를 두고 있으며 목적하는 바에 따라 최적설계를 위한 시스템에 적합한 제어기 선택에 대한 연구가 추가적으로 필요하다.

3. 수치해석 절차 수립

3.1 안정성 판정기준의 함수화

위에서 도출된 새로운 판정기준인 식(33)으로 선형 주기시스템의 안정성 판정과 불안정한 시스템의 안정화에 필요한 프로그래밍 절차를 살펴보면, 우선 안정성 판단기준인 식(33)은 식(30)의 행렬 C의 고유값의 적분으로 행렬식의 계산에서 고유값을 아래와 같이 계산할 수 있다.

$$det[\lambda I - C] = \begin{vmatrix} \lambda - C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & \lambda - C_{22} \end{vmatrix} = (\lambda - C_{11})(\lambda - C_{22}) - C_{12}C_{21} = \lambda^2 - (C_{11} + C_{22}) + (C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}) = \lambda^2 - TrC + detC = 0 \quad (35)$$

$$\lambda_{max} = \frac{Tr(C)}{2} + \sqrt{(\frac{Tr(C)}{2})^2 - detC} \quad (36)$$

위의 계산결과에 식(34)의 Fourier 급수 형태의 제어기를 선택한 경우 고유값내의 계산요소는

$$Tr(C) = Tr(C)(t, k_i(0), Ak_{i(1),\ldots,}Ak_i(m) Bk_i(1),,,,Bk_i(m)), \; i=1,2 \quad (37)$$

$$detC = detC(t, k_i(0), Ak_i(1),,Ak_i(m), Bk_i(1),,Bk_i(m), s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22}) \quad (38)$$

과 같이 표현된다. 즉, 식(37)과 (38)에 의해 행렬 C의 고유값이 시간, 제어기의 계수, 리아프노프함수의 행렬요소값을 변수로 한 함수임을 나타내며 이제 식(36)을 포함한 식(33)을 목적함수로 하여 안정성 판정과 안정화 제어기의 수치해석적 절차를 단계별로 수립할 수 있다.

3.2 단계별 수치해석 프로그램 작성

<1단계 프로그램> 안정성판정의 기준인 식(33)을 대상으로 이의 실수부의 값을 계산하는 절차에서 먼저 리아프노프함수를 구성하는 식(23)의 형태로

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \quad (39)$$

를 취한다. 이 행렬은 대칭이며 항상 양인 조건을 만족해야한다. 이러한 구속조건을 만족하면서 안정성 판정 기준인 식(33)을 최소화하는 행렬(39)의 요소를 찾아내는 프로그램이 필요하다. 이에 대한 첫 번째 수치해석 절차를 Table 1과 같은 조건에 맞추어 수행한다.

Table 1 Conditions for 1st stage program

최소화함수	식(33) 관련수식 (36), (37), (38)
변수	s_{11}, $s_{12}=s_{21}$, s_{22}
제한조건	$s_{11} \cdot s_{22} - s_{12} \cdot s_{21} > 0$
상수입력값	제어기 계수 k_i, $Ak_i(n)$, $Bk_i(n)$

한편 1단계의 제한조건이 존재하는 경우의 최소화 프로그램[9] 수행결과로 식(33)의 값과 이 경우의 식(39)의 행렬요소를 얻는다. 이때 안정조건인 음의 값을 갖지 못하게 될 경우 2단계의 프로그램절차가 필요하다.

<2단계 프로그램> 이번 단계에서는 같은 함수를 최소화하되 1단계에서 얻어진 변수인 행렬요소를 상수값으로 입력하고 제어기의 계수값을 변수로 한 제한조건이 없는 프로그램[10]이 필요하다. 이를 정리하면 Table 2와 같다.

Table 2 Conditions for 2nd stage program

최소화함수	식(33) 관련수식 (36), (37), (38)
변수	k_i, $Ak_i(n)$, $Bk_i(n)$
제한조건	-
상수입력값	s_{11}, $s_{12}=s_{21}$, s_{22}

이 결과 안정조건인 식(33)의 값이 음이 아닌 경우 1단계의 프로그램을 2단계에서 얻어진 제어기의 계수값을 상수입력값으로 하여 또 다시 수행하게 된다. 즉 각각 다른 조건의 두종류의 최소화 프로그램을 안정조건에 부합되는 결과가 얻어질 때까지

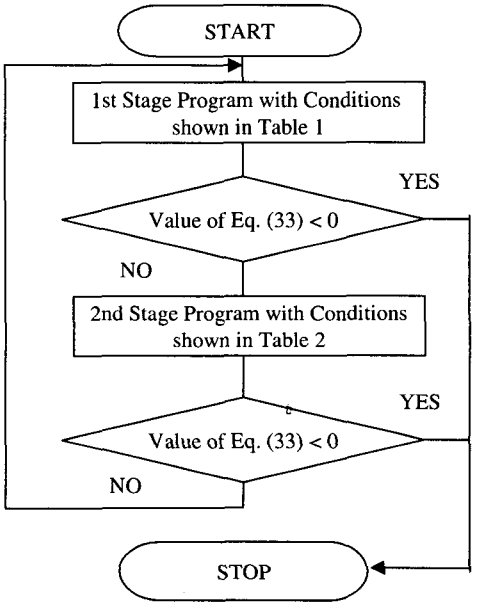

Fig. 1 Flow chart for numerical procedures

연계하여 수행토록 한다. 프로그램의 수행 단계를 표현하면 Fig. 1과 같다. 이러한 두 종류의 프로그램은 같은 논리적 구성으로써 제한조건이 있는 최소화 기법(Constrained- Minimization)[9]과 제한 조건이 없는 최소화 프로그램(Unconstrained Minimization)[10]이어야 한다. 본 논문에서는 이러한 두 종류의 수치해석적 절차 수립에서 기존의 Subroutine프로그램을 사용하였다.

3.3 프로그램 적용 및 분석

앞 절에서 소개된 수치해석절차를 참고자료[6,7]에 제시된 주기시스템을 예제로 프로그램의 효용성을 검토하기로 한다. 이 예제는 선형미분방정식의 절대적 해를 구해낼 수 있으므로 프로그램 절차의 실제적 검증이 가능할 것으로 판단된다.

(예제1) 시스템 방정식이

$$\dot{x} = A(t)x = \begin{bmatrix} -1+a\cos^2 t & 1-a\sin t\cos t \\ -1-a\sin t\cos t & -1+a\sin^2 t \end{bmatrix} x \quad (40)$$
$$(\ where \quad a>0\ )$$

의 경우 안정성에 대하여 2.1절과 2.2절에서 소개된 기존의 Floquet 이론을 적용하면 먼저 식(19)에 의하여

$$\frac{1}{T}\int_0^t TrA(\sigma)d\sigma = a-2 \qquad (41)$$
$$\rho_1+\rho_2 = a-2\ ,\ \lambda_1\cdot\lambda_2 = \exp(a-2)T$$

가 된다. 이 시스템의 안정성은 a의 값에 의존하고 있으며 만일 a>2이면 시스템은 불안정함을 알 수 있다. 또한 평형상태를 분석하기 위하여 t=0 주변에서 시간의 작은 변화부분에 대하여 선형화 한다면 여유로운 시스템행렬식은

$$\begin{bmatrix} -1+a & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (42)$$

와 같고 위의 주기시스템은 안정성 조건을 적용하면 행렬식계산에 의한 고유값의 계산은

$$|\lambda I - A| = 0$$
$$\lambda^2+(2-a)\lambda+(2-a)=0 \qquad (43)$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{a-2\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$$

의 관계식이 얻어지고 이를 분석하면 a<2의 조건에서 음의 실수부를 갖게됨을 알 수 있으며 이러한 범위에서 안정한 시스템을 의미한다. 그러나 이러한 기존의 안정성분석은 옳지 않다. 이에 대하여 살펴보면 먼저 이 경우의 상태변이 행렬은

$$\Phi(t,0) = \begin{bmatrix} e^{(a-1)t}\cos t & e^{-t}\sin t \\ -e^{(a-1)t}\sin t & e^{-t}\cos t \end{bmatrix} \qquad (44)$$
$$= P(t,0)\ e^{Rt}$$

이 되며 이를 이용한 절대 해는

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{(a-1)t}\cos t & e^{-t}\sin t \\ -e^{(a-1)t}\sin t & e^{-t}\cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \qquad (45)$$

가 된다. 이는 a<1의 결과를 만족해야 만이 점근적 안정성을 갖게됨을 알 수 있다. 만일 a=1.5의 값을 갖는 경우 실제 이 주기시스템은 불안정하게 되나 기존의 안정성 판정이론 등의 적용으로는 그것을 판단할 수 없게 된다. 이에 식(40)을 식(20)의 형태로 변환하면

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} [\ a\cos t \quad -a\sin t\ ]\, x \qquad (46)$$

이 되고 이는 폐루프 선형 주기시스템으로 'a'값에 의한 상태변수제어가 됨을 알 수 있다. 이에 3.1절과 3.2절의 안정기준과 제어기 설계절차를 Fig. 1과 같이 적용한다.

<1단계 프로그램> Table 1과 같은 조건에서 적용하되 상수입력값은 'a=1.5'인 경우를 선택하여 입력하여 수행하고 그 결과로는 리아프노프행렬의 요소를 얻게 된다.

<2단계 프로그램> 위의 1단계 프로그램 수행 결과로 2단계의 프로그램을 수행하고 Fig. 1의 절차로 반복 수행한 결과 안정성기준식(33)의 값이 Table 3과 같이 -0.999814로 -1에 수렴하게 되었다. 이 결과는 Floquet 이론 결과와 비교해볼 때 새로운 프로그램의 실효성을 알 수 있다. 또한 위의

예제에서 'a=2,5'의 입력값에 대한 결과 Table 3과 같이 식(33)의 값이 -1에 수렴되고 있다. -1이라는 값의 의미는 시스템이 a값에 의해 제어되고 있는 상태변수제어방식으로 선형화된 시스템 특성방정식의 해의 값이 -1에 수렴함을 결론적으로 제시하고 있다.

Table 3 Results of example 1

Input Initial Value of a	Results of Eq. (33)
1.5	-0.999814
2.0	-0.999193
5.0	-0.999388

(예제2) 한편 위의 예제1.에서 상태변수 귀환 제어방식에 의하여 불안정한 시스템의 안정화를 위한 제어기의 설계로써 위의 시스템에서 $a=2$인 불안정한 경우를 선택하여 시스템을 표현하면

$$\dot{x}=[A(t)+B(t)G(t)]x$$

$$A(t)=\begin{bmatrix} -1+a\cos^2 t & 1-a\sin t\cos t \\ -1-a\sin t\cos t & -1+a\sin^2 t \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$B(t)=[\sin t \ -\sin t]^T, \quad G(t)=[k_1(t) \ k_2(t)]$$

이고 제어기는 식(34)와 같은 Fourier 급수형태로 5항까지의 계수를 취하면

$$k_i=k_i(0)+\sum_{n=1}^{5}[Ak_i(n)\sin\frac{2n\pi t}{T} + Bk_i(n)\cos\frac{2n\pi t}{T}], \quad i=1,2 \quad (48)$$

로 표현된다. 이에 대한 수치해석적인 프로그램을 Fig.1의 절차로 수행한다. 단계별 수행내용과 결과를 살펴보기로 한다.

<1단계 프로그램> Table 1의 조건으로 식(33)을 최소화하며 이때 초기에 입력하는 Fourier 급수의 계수값은 모두 '0'으로 한다. 첫 번째 수행 결과는 Table 4와 같으며 이 결과 안정기준값은 점근적 안정기준을 만족하지 못하므로 2단계 프로그램을 수행한다.

Table 4 Output data of 1st stage program for example 2

Result Items of Program	Value of Program
식(33)	1.99999
리아프노프 함수 식(40)	$s_{11}=$ 0.100079E+01 $s_{12}=s_{21}=$ -0.255176E-03 $s_{22}=$ 0.100000E+01

<2단계 프로그램> Table 2의 조건으로 1단계프로그램의 결과중 리아프노프 함수행렬요소를 초기입력값으로 하여 식(33)을 최소화하는 Fourier 급수의 계수를 찾는다. 수행결과 제어기의 계수값은 Table 5와 같으며 안정기준값이 안정성을 만족치 않으므로 Fig 1.의 절차로 반복 수행한다.

Table 5 Output data of 2nd stage program for example 2

i	1	2
$k_i(0)$	-0.321213E+00	0.183917E+00
$Ak_i(1)$	-0.166406E+01	0.245883E+01
$Bk_i(1)$	0.110235E+01	0.611417E+00
$Ak_i(2)$	-0.265479E+00	0.254192E+00
$Bk_i(2)$	-0.175788E+00	-0.120876E+00
$Ak_i(3)$	-0.114041E+01	-0.445016E+00
$Bk_i(3)$	0.331306E+01	-0.154903E+01
$Ak_i(4)$	-0.538811E-01	0.531121E-01
$Bk_i(4)$	0.487481E-01	-0.336157E+00
$Ak_i(5)$	0.216079E-01	0.578170E+00
$Bk_i(5)$	0.698928E-01	0.212561E+00
식(33)	0.397955	

최종 3회에 걸친 1,2단계 프로그램을 수행한 결과 Table 6과 같은 제어기의 계수값인 경우 점근적 안정조건에 만족하는 -0.16236의 결과를 얻게 되었다.

4. 결론

선형 주기시스템의 안정성을 파악하는 기준을 리

Table 6 Final output data for example 2

i	1	2
$k_i(0)$	-0.204940E+03	0.260454E+03
$Ak_i(1)$	-0.220928E+03	0.309155E+03
$Bk_i(1)$	0.285275E+03	0.101014E+02
$Ak_i(2)$	-0.242439E+03	-0.159427E+03
$Bk_i(2)$	-0.320365E+03	0.381090E+03
$Ak_i(3)$	-0.230947E+02	-0.330649E+01
$Bk_i(3)$	-0.222860E+02	-0.392666E+02
$Ak_i(4)$	-0.872298E+02	0.218341E+03
$Bk_i(4)$	-0.616864E+02	0.439134E+02
$Ak_i(5)$	0.845282E+02	-0.895662E+02
$Bk_i(5)$	-0.423497E+02	0.696779E+02
식(33)	-0.16236	

아프노프 직접방법을 기초로 대수학적인 관계로부터 새로이 도입하고 이로부터 점근적 안정성과 안정화에 필요한 제어기의 설계방법에 대하여 수치해석적 절차를 수립하였고 그 적용가능성을 살펴보았다. 상태변수벡터로 표현된 다항식 형태의 리아프노프함수를 계산하여 얻어진 행렬의 고유값이 바로 시스템의 안정 기준으로써 이를 최소화하는 수치해석 프로그램이 수립되었으며 예제를 통한 적용 결과, 개발된 논리적인 절차로써 불안정한 선형 주기 시스템의 점근적 안정화에 효과적으로 접근할 수 있는 안정화 제어기의 설계가 가능하게 되었다.

참고문헌

1. Calico, R. A., and Wiesel, W. E., "Control of Time-periodic Systems," Journal of Guidance and Control, Vol. 7 No. 6 NOV-DEC, pp. 671-676, 1984.
2. Wiesel,W.E., and Shelton, W., "Modal Control of an Unstable Periodic Orbit," The journal of the Astronautical Sciences, Vol. XXXi, No.1, pp. 63-76, 1983.
3. Breakwell, J. V., Kamel, A. A., and Ratner, M. J., "Station-Keeping for a Translunar Communication Station," Celestial Mechanics, Vol. 10, pp. 357-373, 1974.
4. Radziszewski, B., and Zaleski, A., "Asymptotic Stability of Solutions of the Motion Equations with Varying Coefficients," Reports of the Institute of Fundamental Technological Research, 1980.
5. Davison, E. J., and Kurak, E. M., "A Computational Method for Determining Quadratic Lyapunov Functions for Nonlinear Systems," Automatica Vol.7, pp. 627-636, 1971.
6. Mohler, R. R., "Nonlinear systems and control," Prentice Hall, 1990.
7. Vidyasagar, M., "Nonlinear systems analysis," Prentice Hall, 1978.
8. Ibrahim, R. A., "Parametric Random Vibration," Research Studies Press, 1978.
9. Box, M. J., "A New Method of Constrained Optimization and a Comparison with Other Methods," Computer Journal, Vol. 8, pp.42-52, 1965
10. Nelder, J.A. and Mead, R., "Simplex Method for Function Minimization," Computer Journal, Vol. 7, pp. 308-313, 1978.