

〈논문〉 SAE NO. 2000-03-0069

## 고차스펙트럼과 기계적 시스템의 응용 연구 (2) - 기관 배기관내의 조화파 상호작용 해석 -

**Higher Order Spectra and Their Application to Mechanical Systems (II)  
- Analysis on the Interactions of Harmonics in Exhaust Pipe of Engines -**

이준서\*, 차경옥\*\*  
Joon Seo Lee, Kyung Ok Cha

### ABSTRACT

The pulsating pressure waves are composed of fundamental frequency and higher order harmonics in exhaust pipe of engines. The nonlinearity in exhaust pipe is caused by their interactions. The error which is between prediction and measurement is induced by the nonlinearity. We can not explain this phenomenon using linear acoustic theory which is existing theory. So power spectrum which was used in linear theory is not useful. Bispectrum and bicoherence functions which are a higher order spectrum are applicable to explain this phenomenon. This paper proposes a nonlinear effect of pulsating pressure waves. The phenomenon proposed here is identified by using of higher order spectrum density functions.

주요기술용어 : Pulsating pressure waves(맥동 압력파), Bicoherence(바이코헤런스), Higher order harmonic waves(고차 조화파), Bispectrum(바이스펙트럼)

### 1. 서론

내연기관 배기 시스템 내부의 맥동 압력은 기본주파수와 기본주파수의 고차조화파(higher order harmonics)들로 구성된다. 이러한 맥동 압력은 배기 시스템 개방으로 전달되는 동안 주파수 성분간의 상호작용으로 인하여 비선형성을 유발한다.<sup>1)</sup> 선형음향이론에 입각한 기존의 연구는 이

러한 배기 시스템을 완전하게 설명할 수 없고 선형이론에 사용된 파워스펙트럼으로는 이러한 비선형성을 설명할 수 없다. 이와 같이 내연기관 배기 시스템의 맥동 압력은 기본주파수와 그의 정수배에 해당하는 조화파 사이의 상호작용으로 인한 비선형성으로 인하여 이론적으로 예측한 데이터와 실제로 측정된 데이터 사이에 차이가 생긴다. 기존의 기관 배기 시스템에 대한 연구는 이러한 비선형성을 고려하지 않고 수행되어 왔으며, 고차스펙트럼을 적용하여 맥동 압력을 해석한 사례는 현재까지는 거의 없는 실정이다. 기존의 시스템 해석 분야에서 가장 기본적으로 사용되어온 방법

\* 회원, 충청대학 메카트로닉스학부

\*\* 회원, 명지대학교 기계공학과

가운데 하나가 파워스펙트럼(power spectrum)<sup>2)</sup>이며, 신호의 스펙트럼을 평가할 때 고려되는 것은 각 신호의 주파수 성분의 에너지 밀도를 해석하는 것이다. 파워스펙트럼에 나타나 있는 정보는 자기상관함수(autocorrelation function)로 표현되며, 가우스성 신호를 완전하게 설명하는 것이다. 그렇지만 파워스펙트럼만으로는 모든 정보를 제공할 수 없는 실제적인 상황들이 많이 발생하기 때문에 가우스성으로부터 이탈된 정보를 추정하기 위해서는 파워스펙트럼 이상의 것을 고찰해야 한다. 본 연구에서는 고차스펙트럼의 정확한 이해와 함께 유용성을 이론적으로 설명하였으며 내연기관 배기 시스템에서 맥동 압력의 비선형 거동특성을 파악하고자 이러한 고차스펙트럼<sup>3)</sup>의 적용을 제시하였다.

## 2. 바이코헤런스함수를 이용한 2차 위상결합

바이코헤런스<sup>4)</sup>의 크기(magnitude)는 주파수  $f_1$  과  $f_2$  에서 주파수 성분의 위상들 사이의 상관을 나타낼 수 있다. 여기서, 주파수  $f_2$  는 주파수  $f_1$  의 두 배에 해당하는  $2f_1$  의 주파수 성분을 갖는다. 2차 위상결합은 2차 비선형 성분을 갖는 신호에서 발생하는 것이다.<sup>5)</sup>

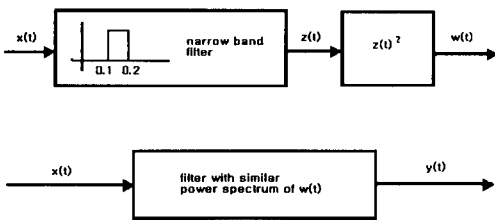


Fig. 1 The diagram of the generation of signal with QPC

이러한 바이코헤런스의 유용성을 알아보기 위하여 Fig.1과 같이 가우스성 백색잡음  $x(t)$ 를 주파수 0.1과 0.2사이의 협대역 필터(narrow band filter)로 필터링 하여 신호  $z(t)$ 를 구하고, 비선

형 형태의 2차의  $z(t)^2$ 으로 통과시켜  $w(t)$ 를 구한다.  $w(t)$ 와 유사한 스펙트럼을 갖는 신호  $y(t)$ 를 발생시키기 위하여 두 번째 필터는  $w(t)$ 의 스펙트럼과 같은 특성을 갖도록 한다. 그러나 이 신호는 어떠한 비선형 성분도 포함하고 있지 않다. Fig.2에  $w(t)$ 의 파워스펙트럼을 Fig.3에는  $y(t)$ 의 파워스펙트럼을 각각 나타내었다.

그림과 같이 두 신호의 파워스펙트럼에는 크기 차이만이 나타나고 어떠한 정보도 나타내지 못한다. 하지만  $w(t)$ 는 2승 연산에 의하여 발생된 2

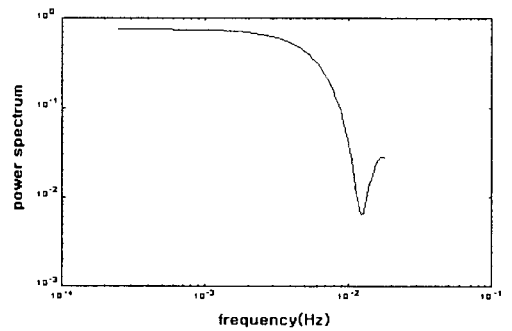


Fig. 2 Power spectrum of signal with QPC

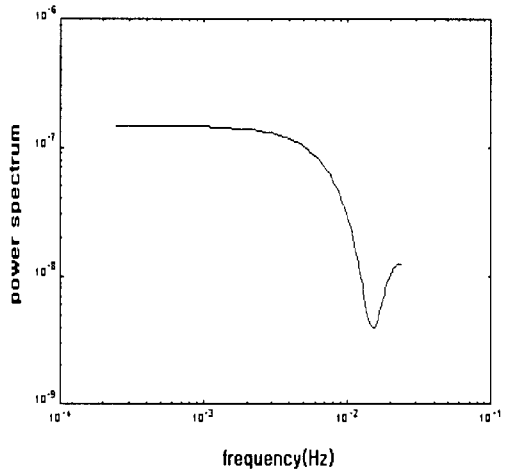


Fig. 3 Power spectrum of signal with no QPC

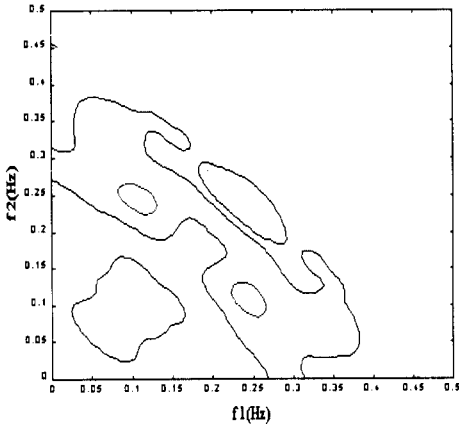


Fig. 4 Bicoherence of signal with QPC

차 위상결합(QPC: Quadratic Phase Coupling) 성분들을 포함하고 있으므로 신호  $w(t)$ 의 바이코헤런스 함수를 구할 경우 Fig.4에서와 같이 주파수영역 0.1과 0.4에 걸쳐서 피크를 나타내고 있다. 그러나 신호  $y(t)$ 는 어떠한 위상결합도 없는 가우시성 잡음을 포함하고 있기 때문에 신호  $y(t)$ 의 바이코헤런스는 영(zero)이 될 것이다. 이와 같이 바이코헤런스 함수를 이용하면 기존의 파워스펙트럼으로는 찾아낼 수 없었던 2차 비선형 신호를 갖는 시스템의 2차 위상결합 정보를 찾아낼 수 있다.

### 3. 실험장치 및 방법

Fig.5는 실험장치의 개략도로서, 실험에 사용했던 엔진은 현재 국내에서 상용되고 있는 가솔린 엔진(4기통, 1496cc)이다. 회전수는 디지털 타코미터로 측정하였다. 실험에 사용된 시험부의 개략도를 Fig.6에 나타내었다. 시험부는 다양한 실험 조건을 위하여 여섯 부분으로 나누어 제작하였다. 실험용 배기계의 ①~⑧은 압력변환기를 설치한 위치이며, 압력변환기는 배기가스의 온도를 고려

하여 스트레인게이지형 수냉식 압력변환기를 사용하였다.

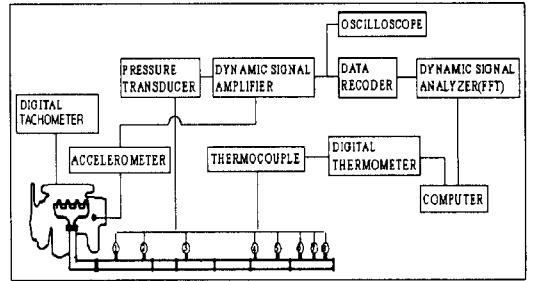


Fig. 5 Schematic diagram of experimental apparatus for the harmonics of pulsating waves in exhaust system

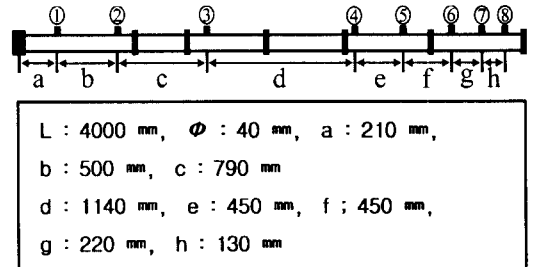


Fig. 6 The test section for pulsating pressure waves

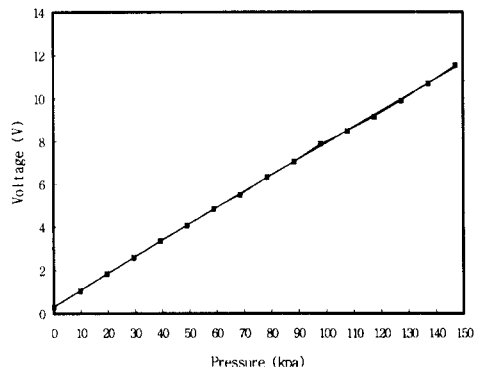


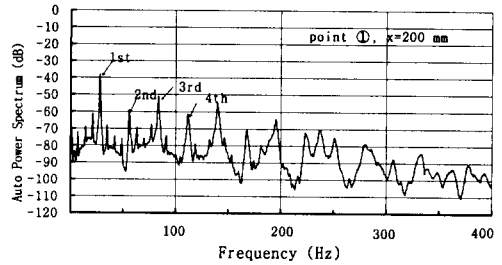
Fig. 7 Pressure transducer calibration chart

압력변환기는 물펌프에 의하여 순환되는 냉각수에 의하여 일정 온도로 냉각하였다. 엔진의 폭발시 엔진몸체(engine body)에서 발생하는 가진(excitation)을 측정하기 위하여 가속도계(accelerometer)를 배기 대기관 측면의 엔진몸체에 설치하였다. Fig.7은 실험에 사용된 압력변환기의 보정 결과이다. 실험에 해당하는 전체 압력영역에 대하여 센서특성이 선형적임을 알 수 있다. 시험부의 전체 길이는 상용 배기계가 차량의 하체 구조에 따라 밴딩(bending)되기 전인 직관 4000mm이다. 이때 엔진회전수는 기본주파수가 약 25Hz가 되게 하여 맥동 압력의 2차 조화파(second order harmonics)가 약 50Hz의 주파수 영역에서 발생하도록 800rpm으로 고정하였다. 각각의 압력변환기를 통하여 출력된 신호와 가속도계를 통하여 출력된 신호는 증폭기를 통해서 멀티채널 데이터 기록기(data recorder)에 저장되도록 하였다. 또한 증폭조건은 압력변환기의 감도(sensitivity)와 노이즈의 영향을 고려하여 가진전압(excitation volt.)은 10, 게인(gain)은  $2 \times 10^3$ 으로 조정하였다. 샘플링 주파수를 500Hz로 하여 각 신호의 파워 스펙트럼을 구하였고, ③위치의 신호를 입력신호로 하고 ⑧위치의 신호를 출력신호로 하여 두 신호사이의 기여도함수(coherence function)를 구하였다. 1차 기본주파수 성분과 2차 주파수 성분의 위상결합 현상이 명확하게 나타날 것으로 예상되는 ⑥위치의 4096개의 데이터에서 FFT 크기를 64로 하고 64개 구간에 걸쳐 바이스펙트럼(bispectrum)을 구하였다. 또한 바이코헤런스(bicoherence) 해석을 수행하여 주파수 성분 상호작용을 확인하였다.

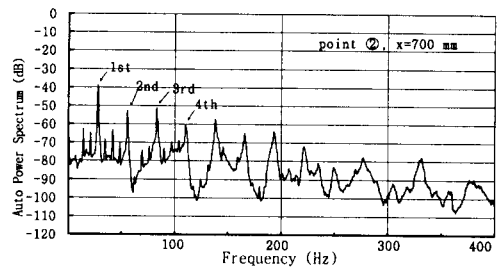
#### 4. 실험결과 및 고찰

##### 4.1 고차스펙트럼을 이용한 주파수 성분상호작용에 대한 고찰

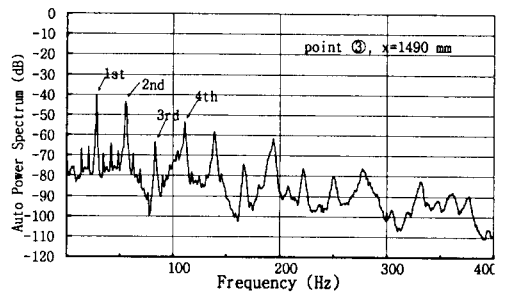
Fig.8에 배기 시스템의 압력 맥동 측정위치 ①~④에서의 파워스펙트럼을 나타내었다. 압력 맥동은 약 4차의 조화파(harmonics)로 구성되어 있음을 확인할 수 있다.



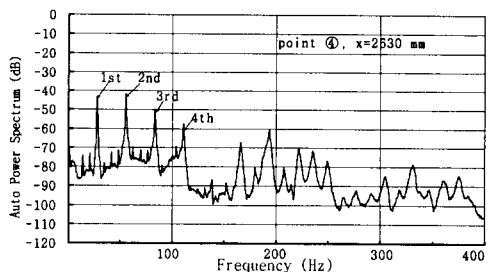
(a) Point ①



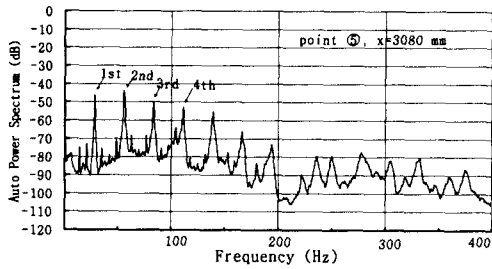
(b) Point ②



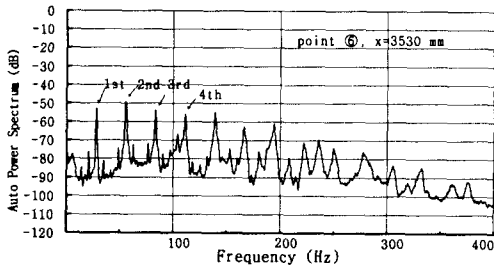
(c) Point ③



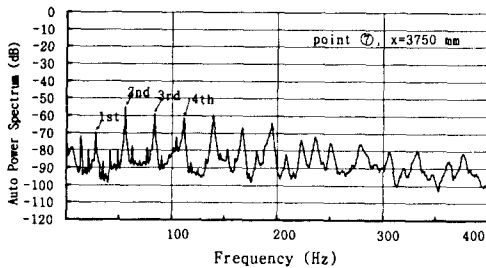
(d) Point ④



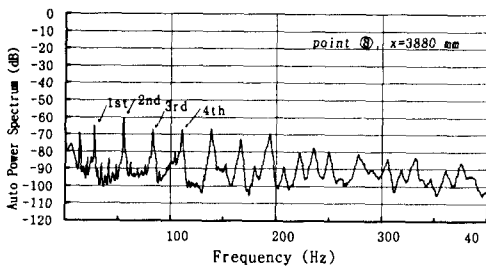
(e) Point ⑤



(f) Point ⑥



(g) Point ⑦



(h) Point ⑧

Fig. 8 Power spectrum at each point in exhaust system

배기 시스템에서 압력변환기의 위치①에서는 회전수 800rpm의 점화주파수( $f_F : f_F = \frac{\text{회전수}}{60}$

$\times \frac{\text{기통수}}{2}$ )에 해당하는 약 25Hz 부근의 영역이

가장 큰 크기를 나타내고 있다. 1차 조화파는 위치④를 기점으로 급격히 감소 된다. 반면에 2차 조화파의 성분인 50Hz 영역의 주파수 성분은 위치①에서는 1차 성분보다 20dB이상 작은 크기를 나타내고 있으나 점진적으로 성장하여 위치⑥에서는 1차 성분보다 더 큰 크기(magnitude)를 나타내고 있다. 전체 배기계의 각 위치에서 압력 맥동의 전달특성을 확인하기 위하여 각 조화파의 피크에 상당하는 값을 사용해서 각 조화파의 감소특성을 Fig.9에 나타내었다. 해석 결과에서 알 수 있듯이 맥동 압력파의 주파수 성분들은 배기계 전체에 걸쳐 전반적으로 감소 하지만 기본 점화주파수의 2차 조화파는 특정한 위치에서 비선형적으로 성장하고 있음을 알 수 있다. 이러한 특성을 확인하고자 위치③의 신호를 입력신호로 하고 위치⑧의 신호를 출력신호로 하는 전통적인 방법인 두 신호사이의 기여도함수(coherence function)를 Fig.10에 나타내었다. 기여도함수를 통하여 알 수 있듯이 50Hz 영역 이하의 저주파 성분들이 서로 상관도가 적음을 확인 할 수 있다. 즉, 50Hz의 주파수 영역에서는 다른 신호가 결합되어 졌다는 가정을 할 수 있다. 이러한 현상은 엔진 몸체가 점화주파수에 해당하는 약25Hz의 일정한 주파수로 배기 시스템을 가진하여 배기 시스템 내부의 조화파에 영향을 미치는 것이다. Fig.11은 엔진폭발에 의하여 가진 된 엔진 몸체의 진동신호에 대한 파워스펙트럼이다. 관심 있는 저주파 영역의 스펙트럼을 보다 명확하게 관찰하기 위하여 주파수를 나타내는 가로축을 상용로그 스케일로 나타내었다. Fig.11에서 알 수 있듯이 엔진 점화주파수인 약 25Hz 영역의 주파수 성분이 가장 큰 크기를 나타내고 있다. 두 주파수 성분사이의 이러한 상호작용<sup>6)</sup>에 대한 현상을 더 명확하게 확인하기 위하여 고차스펙트럼 해석을 수행하여 Fig.12에

바이코헤런스(bicoherence)를 나타내었다.

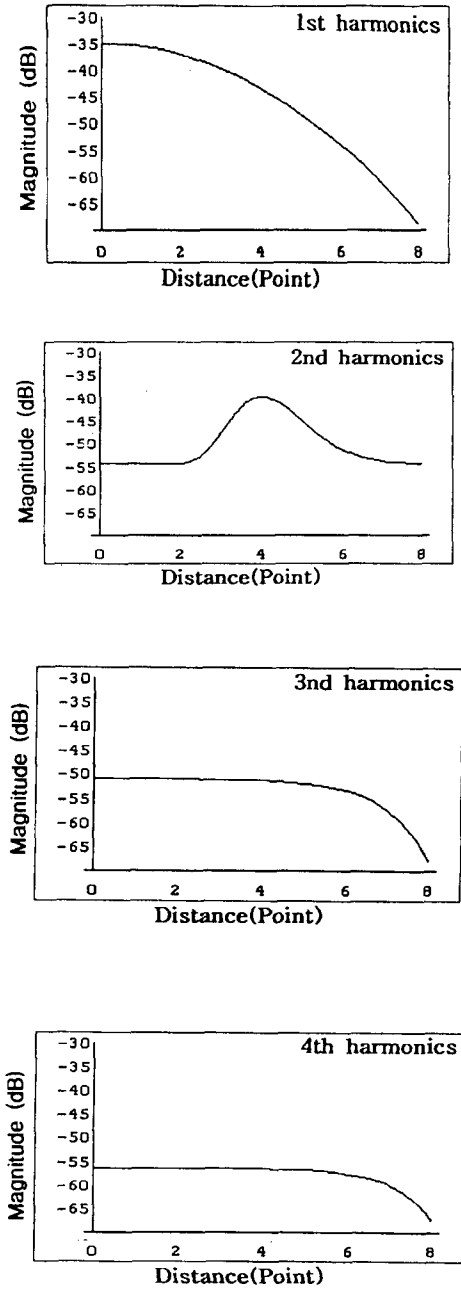


Fig. 9 Attenuation trend of pulsating pressure waves

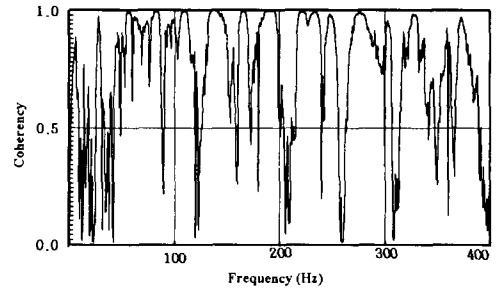


Fig. 10 Coherence function (between point③ and⑧)

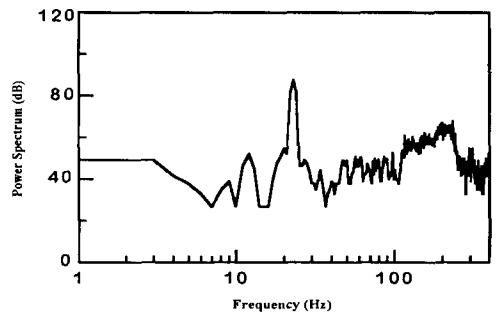


Fig. 11 Power spectrum of engine excitation

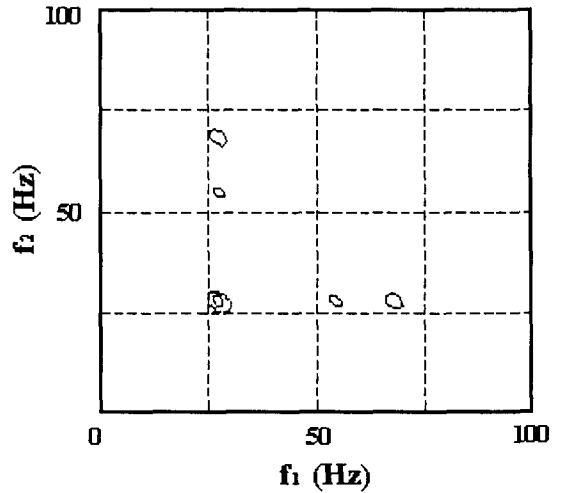


Fig. 12 Bicoherence function

두 주파수 성분  $f_1$  과  $f_1$  의 두 배의 주파수 성분을 갖는  $f_2$  의 약 25Hz 영역의 교차 지점에서 바이코헤런스의 피크(peak)가 나타나고 있다. 이러한 결과는 본 논문 제1보인 ‘바이스펙트럼과 2차 위상결합 해석’<sup>7)</sup>에서 설명하였듯이 약 25Hz의 주파수 성분과 두 배에 해당하는 약 50Hz 주파수 성분이 상호작용한 결과이다.

#### 4.2 단순 사인파를 이용한 주파수 성분 상호작용에 대한 고찰

단순 사인파를 이용한 두 주파수 성분사이의 상호작용에 대한 현상을 시간영역에 대하여 압력-시간함수로 다시 한번 고찰하였다. 이때 사용한 두 개의 사인파를 각각  $y_1$  와  $y_2$  라고 한다면, 시간에 대하여  $y_1$  와  $y_2$  는 각각 다음 식과 같은 관계를 갖도록 설정하였다.

$$y_1 = 0.5 \sin 2\omega t \tag{1}$$

$$y_2 = \sin \omega t \tag{2}$$

식(1)과 식(2)의 관계에서 알 수 있듯이  $y_1$  는  $y_2$  과 비교하여 진폭은 반으로 하였고, 주파수는 두 배로 하였다. 이것은 배기시스템 맥동압력의 25Hz 성분과 50Hz 성분의 상호작용을 시간영역에 대하여 단순화하기 위한 것이다. 시간에 대한 함수인 두 개의 사인파가 상호작용하였을 때, 위상 이동(phase shift)에 따른 진폭의 변화를 알아보기 위하여 위상차를 5° 씩 증가시켜 위상차가 360° 가 될 때까지를 계산하였다. 이러한 현상을 엔진의 배기계에 적용했을 때, 엔진을 일정 회전속도로 운전할 경우 시간에 따라 위상이동이 연속적으로 일어나므로 이러한 현상은 시간경과에 따라 연속적으로 중첩된 결과로 나타날 것이다. 일정한 시간동안(5sec) 동안에 식(1)과 식(2)의 두 신호가 연속적으로 중첩된다면, 두 신호 사이의 최종적인 형태는 Fig.13와 같이 나타나게 된다. 시간에 따른 연속적인 상호작용 결과에서 알 수

있듯이 기본주파수와 2차 조화파가 중첩되면 마치 2차 조화파의 주파수를 나타내고, 진폭은 두 성분의 최대 진폭을 합한 것과 같은 파형이 나타나게 된다. 이와 같은 결과로부터 앞 절의 실험결과에서 보여지는 25Hz의 기본주파수와 50Hz의 2차 조화파의 상호작용 결과 발생하는 50Hz의 2차 조화파가 성장하는 현상을 보다 쉽게 이해할 수 있다.

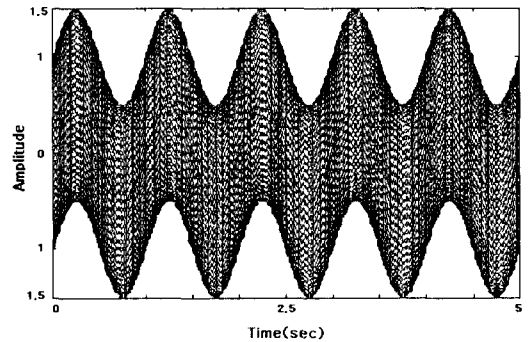


Fig. 13 The continuous change of amplitude according to phase shift (0° ~360° )

#### 5. 결론

본 논문 제1보 ‘바이스펙트럼과 2차 위상결합 해석’<sup>7)</sup>에서 알 수 있듯이 바이코헤런스 함수는 두 주파수 성분이 혼합된 신호의 2차 위상결합(QPC : Quadratic Phase Coupling)을 해석하는 데에 사용할 수 있다. 이러한 바이코헤런스 함수를 이용하여 배기 시스템 내부의 주파수 성분 상호작용으로 인한 2차 조화파의 생성을 확인할 수 있었다. 배기 시스템 내부의 두 조화파의 상호작용 현상은 주파수 영역에서 에너지 밀도만을 분리해 내는 기존의 파워스펙트럼 해석법으로는 확인할 수 없으며 고차스펙트럼 해석법의 하나인 바이코헤런스 함수를 이용하여 보다 정확하게 해석될 수 있다. 특히 기본주파수와 두 배의 주파수를 갖는 2차 조화파가 시간지연(위상차)에 따라 결합하는 상호작용 현상이 시간에 따라 연속적으로 발생하는 엔진 운전상태 하의 배기관 내에서는 2차 조화

파의 주파수를 갖고 1차, 2차 두 성분의 진폭이 합쳐진 새로운 조화파가 생성된다.

### 참 고 문 헌

- 1) 高木茂, 中林任男, 入江良彦, 江崎殖, 'Study on Analysis of Muffler Performance under High Pressure Pulsation Flow' 三麥重工技報 Vol.22 No.1 pp.63-68, 1985.
- 2) J. S. Bendat, A. G. Piersol, 'Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis', 2nd Edition, John Wiley & Sons, Inc. 1993.
- 3) C. L. Nikias, J. M. Mendel, 'Signal Processing with Higher-Order Spectra', IEEE Signal Processing Magazine, pp 11~37, July, 1993.
- 4) C. L. Nikias, A. P. Petropula, 'Higher order spectra analysis. A nonlinear signal processing framework', Prentice Hall, 1993.
- 5) Kim Y. C. and Powers E. J., 'Bispectral Wave Analysis of Nonlinear Wave-Wave Interactions in Plasmas', IEEE International Conference on Plasma Science, Texas Austine, May 1976.
- 6) Kim Y. C. and Powers E. J., 'Digital Bispectral Analysis and its Applications to Nonlinear Wave Interactions', IEEE Trans. Plasma Sci. Vol.PS-7, No.2, pp.120~131, June 1979.
- 7) 이준서, 차경옥, '고차스펙트럼의 기계적 시스템 적용연구,(1)' - 마이스펙트럼과 2차 위상결합 해석 -, 한국자동차공학회 논문집, 제7권, 제7호, pp.278~285, 1999.