

〈논 문〉

주파수 응답함수를 이용한 구조물 고유진동수 극대화를 위한 최적 지지점 선정

Selection of Optimal Supporting Position to Maximize Natural Frequency of
the Structure Using Frequency Response Function

박 용 화* · 정 완 섭* · 박 윤 식**

Yong-Hwa Park, Wan-Sup Cheung and Youn-Sik Park

(1999년 3월 22일 접수 : 2000년 6월 16일 심사완료)

Key Words : Optimal Supporting Position(최적 지지점), Frequency Response Function(주파수 응답 함수), Eigenvalue Sensitivity Analysis(고유치 민감도 해석), Structural Optimization(구조 최적화).

ABSTRACT

A procedure to determine the realizable optimal positions of rigid supports is suggested to get a maximum fundamental natural frequency. A measured frequency response function based substructure-coupling technique is used to model the supported structure. The optimization procedure carries out the eigenvalue sensitivity analysis with respect to the stiffness of supports. As a result of such stiffness optimization, the optimal rigid-support positions are shown to be determined by choosing the position of the largest stiffness. The optimally determined support conditions are verified to satisfy the eigenvalue limit theorem. To demonstrate the effectiveness of the proposed method, the optimal support positions of a plate model are investigated. Experimental results indicate that the proposed method can effectively find out the optimal support conditions of the structure just based on the measured frequency response functions without any use of numerical model of the structure.

1. 서 론

구조물의 지지는 구조물의 고유진동수 및 모드 형상 등의 동특성을 변화 시키므로 만족할 만한 동특성을 얻기 위해서는 적합한 지지점의 위치를 선정해야 한다. 예를 들어 콤팩트 디스크 드라이브의 지지점의 위치는 안정적인 동작에 큰 영향을 주므로 중요한 설계 변수 중의 하나이다. 본 논문에서는 구조물의 주요 동특성의 하나인 고유진동수를 개선하기 위한 지지점의 위치 선정 문제를 다룬다.

최적 지지점 선정에 관한 초기 연구로써, 두 구조물간의

연결 및 분리 문제⁽¹⁻³⁾와 평판의 지지점 선정 문제⁽⁴⁻⁵⁾ 등이 이론적인 관점에서 많이 다루어져 왔다. 수치적 방법을 통한 최적 지지점 선정으로써, 지지점의 강성을 설계 변수로 두고 최적화 과정을 거쳐 고유진동수 개선을 얻는 방법이 연구 되었으며^(6,7) 이를 이용하여 컴퓨터에 장착되는 기관의 지지점을 선정 문제에 적용하였다.^(8,9) 한편 원광민은 지지점의 위치에 대한 고유진동수 민감도 해석을 통하여 최적 지지점의 위치를 결정 하였다.⁽¹⁰⁾

대다수의 기존 연구는 구조물의 해석적 모델을 주로 이용한다. 그러나 구조물이 복잡한 외형을 가지거나 수치 모델이 어려운 불확정성을 가진 경우에는 수치 모델링에 많은 노력이 필요하게 된다. 이러한 제한점을 극복하기 위해서 본 연구에서는 실험으로 측정 가능한 주파수 응답 함수를 사용하여 복잡한 구조물의 지지의 경우에도 수치 모델

* 정회원, 한국표준과학연구원 음향진동 연구실

** 정회원, 한국과학기술원 기계공학과

필요 없이 최적의 지지점을 선정할 수 있는 방법을 제시하고자 한다. 또한 기존의 연구에서는 지지 되는 구조물의 동특성만을 고려하였으나 본 방법에서는 지지면의 동특성도 함께 고려하여 더욱 정확한 결과를 얻도록 한다.

이를 위해 구조 합성법의 일종인 모드-힘 방법⁽¹¹⁻¹⁶⁾ (modal force method)을 사용한다. 측정된 구조물과 지지면의 주파수 응답함수를 사용하여 선강성 지지 후의 구조물의 자유 진동 방정식을 수립하고 이를 토대로 선강성 변화에 대한 고유치 해석 및 고유치 민감도 해석을 수행한다. 민감도 해석 결과를 이용하여 최적 강성을 계산한 후에 최대 강성의 위치를 최적의 지지점으로 결정한다. 제안된 방법을 평판 구조물의 기본 고유진동수 향상을 위한 최적 지지점 위치 선정에 실험 및 적용하고 효용성을 살펴본다. 이때 고유치 상한 정리(eigenvalue limit theorem)를 사용하여 구한 지지점이 최적의 지지점임을 확인한다.

2. 선강성 지지 구조물의 자유 진동 방정식

구조물을 Fig.1과 같이 N 개의 선강성을 사용하여 지지면과 연결하고 전체구조물의 자유진동상태를 고려하면 구조물, 선강성, 및 지지면 각각의 운동 방정식은 다음과 같이 각 부분 구조의 주파수응답함수를 사용하여 나타낼 수 있다.

$$H_p(\omega, k)f_p = x_p \quad (1)$$

여기서,

$$H_p(\omega, k) = \begin{bmatrix} H^b(\omega)_{N \times N} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & H^s(\omega)_{N \times N} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \text{diag}\left(\frac{1}{k_1}, \dots, \frac{1}{k_N}\right) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$f_p = [f^{b^T}, f^{g^T}, f^{s^T}]^T \quad (3)$$

$$x_p = [x^{b^T}, x^{g^T}, x^{s^T}]^T \quad (4)$$

$$k = [k_1, k_2, \dots, k_N]^T \quad (5)$$

식 (2)의 $\text{diag}(\bullet)$ 는 대각 행렬을 나타내며 상첨자 b, g 그리고 s 는 각각 구조물, 지지면, 선강성을 나타낸다. 식 (3)의 f^b 와 f^g 는 각각 선강성 부착 위치에서의 구조물과 지지면에 작용하는 내력 벡터이고 f^s 는 선강성 양단에 작용하는 내력 벡터이며 다음과 같은 관계식을 갖는다.

$$f^s = f^b, f^s = f^g \quad (6)$$

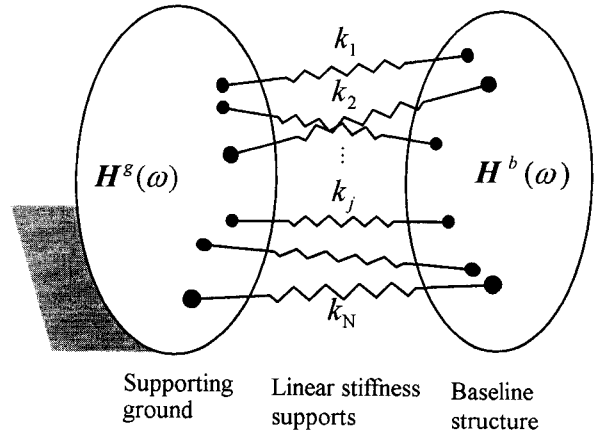


Fig. 1 N supporting candidate positions and linear stiffness supports

식 (4)의 x^b 와 x^g 는 각각 선강성 부착위치에서의 구조물과 지지면의 변위 벡터이고 x^s 는 선강성 양단의 변위 차이이며 다음과 같은 관계식을 갖는다.

$$x^s = x^b - x^g \quad (7)$$

식 (6)과 식 (7)을 식 (1)에 대입하고 f^s 에 대해서 정리하면 다음과 같이 전체 구조물의 자유 진동 방정식을 얻는다.

$$H(\omega, k)f = \left[H^b(\omega) + H^s(\omega) + \text{diag}\left(\frac{1}{k_1}, \dots, \frac{1}{k_N}\right) \right] f = \mathbf{0} \quad (8)$$

여기서 $H(\omega, k)$ 는 모드-힘 행렬이며 f 는 모드-힘 벡터로서 선강성 양단에 작용하는 내력 벡터, f^s 이다.^(13, 14) 이때 설계변수를 식 (5)에서 표시된 N 개의 후보 지지점의 강성으로 정의하고, 전체 구조물의 고유진동수를 극대화하는 강성을 최적화 과정을 통하여 구한다.

3. 고유치 해석

식 (8)의 자유 진동 방정식에서 모드-힘 벡터가 영벡터 f 가 아닌 조건으로부터 다음과 같이 고유진동수에 대한 특성 방정식을 얻는다.

$$\det[H(\omega, k)] = 0 \quad (9)$$

선강성 지지 후의 구조물의 고유진동수는 주파수 축상에서 식 (9)를 만족하는 주파수를 찾아서 얻는다. 행렬식 탐색으로 얻어진 고유진동수 ω_n 를 식 (8)에 대입하면 식 (9)에 의해서 모드-힘 행렬 $H(\omega_n, k)$ 는 차수(rank)가 부족하게 된다. 모드-힘 벡터, f 는 구해진 고유진동수

ω_n 를 식 (8)에 대입하고 차수가 부족한 선형대수식을 풀어서 구한다.

4. 고유치 민감도 해석

선강성 변화에 대한 고유진동수의 민감도는 다음과 같이 식 (8)의 자유 진동 방정식을 강성에 대하여 직접 미분하여 구한다. 식 (8)을 j 번째 강성, k_j 에 대해서 직접 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk_j}(H(\omega_n, k)f) &= \frac{dH(\omega_n, k)}{dk_j}f + H(\omega_n, k)\frac{df}{dk_j} \\ &= \frac{\partial H(\omega_n, k)}{\partial \omega_n} \frac{d\omega_n}{dk_j}f + \frac{\partial H(\omega_n, k)}{\partial k_j}f + H(\omega_n, k)\frac{df}{dk_j} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

f^T 를 식 (10)에 곱한 후 식 (8)을 대입하고 모드-힘 벡터를 다음과 같이 정규화 하면,

$$f^T \frac{\partial H(\omega_n, k)}{\partial \omega_n} f = 1 \quad (11)$$

결과적으로 다음과 같은 고유치의 민감도 정식을 얻는다.

$$\frac{d\omega_n}{dk_j} = -f^T \frac{\partial H(\omega_n, k)}{\partial k_j} f = \left(\frac{f_j}{k_j} \right)^2 \quad (12)$$

여기서 f_j 는 j 번째 선강성의 양단에 작용하는 내력이다. N 개의 강성 변경을 고려한 고유치 민감도 벡터는 다음과 같이 정의된다.

$$s \equiv \left[\frac{d\omega_n}{dk_1}, \frac{d\omega_n}{dk_2}, \dots, \frac{d\omega_n}{dk_N} \right]^T \quad (13)$$

식 (12)의 고유치 민감도는 현재의 강성과 3절의 고유치 해석 결과를 이용하여 구할 수 있으며 모든 과정에서 구조물의 수치 모델 필요 없이 실험으로 측정 가능한 주파수 응답 함수가 사용된다. 고유 진동수 향상을 위한 선강성 최적화는 3절의 고유치 해석과 식 (13)에서 주어진 고유치 민감도 벡터를 사용하여 반복계산을 통한 최적화 문제를 풀어서 구한다.

5. 평판 구조물의 최적 지지점 선정

5.1 실험장치

제안된 방법을 Fig.2와 같은 평판에 실험을 통하여 적용하였다. 평판의 두께는 3 mm이고 모서리 부분이 단순

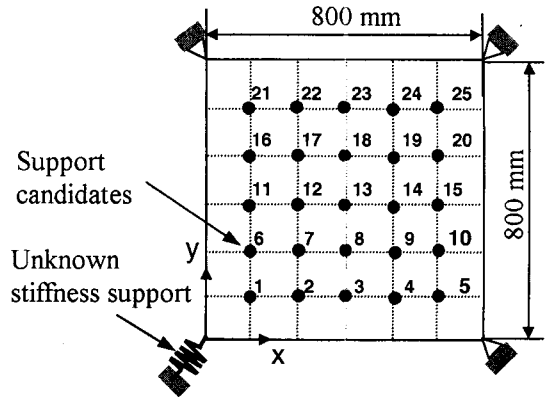


Fig. 2 Example plate and 25 optimal support candidates of the plate

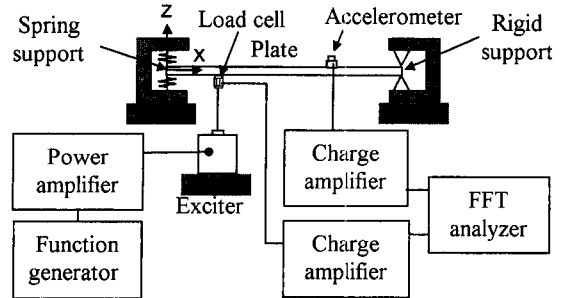


Fig. 3 Schematic diagram of experimental setup for FRF measurements (side view of the plate at $y = 0$)

지지 되어있고 불확실한 경계조건을 구현하기 위해서 $x=0, y=0$ 의 모서리는 단순지지 대신 규명되지 않은 강성으로 지지하였다. 이 경우 정확한 수치 모델을 세우기 위해서는 이 모서리의 강성 규명이 반드시 필요하다. 평판의 기본 고유진동수는 7.8 Hz이다. Fig.2에 표시된 평판상의 25개의 위치를 지지점 후보위치로 선정하였다. ($N=25$) 3절의 고유치 해석 및 4절의 고유치 민감도 해석을 위해서 Fig.3에서 볼 수 있는 장치를 통하여 25 지점에서의 z 축 방향의 주파수응답함수를 측정하였다. 이때 지지면은 강체로 가정하였다. ($H^g(\omega)=0$) Fig.4는 측정된 주파수응답함수 중의 하나이다.

5.2 최적 지지점 선정

평판의 기본 고유진동수를 극대화 하는 최적 지지점을 선정하기 위해서 다음과 같이 Fig.2에 표시된 25개 지점의 선강성을 설계변수로 두고 최적화 과정을 수행하였다.

$$k = [k_1, k_2, k_{25}]^T \quad (14)$$

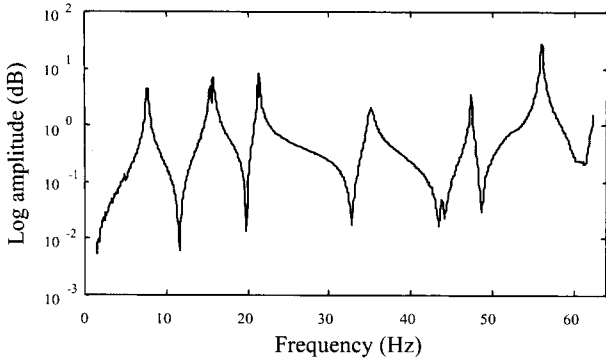


Fig. 4 A measured point FRF of baseline plate

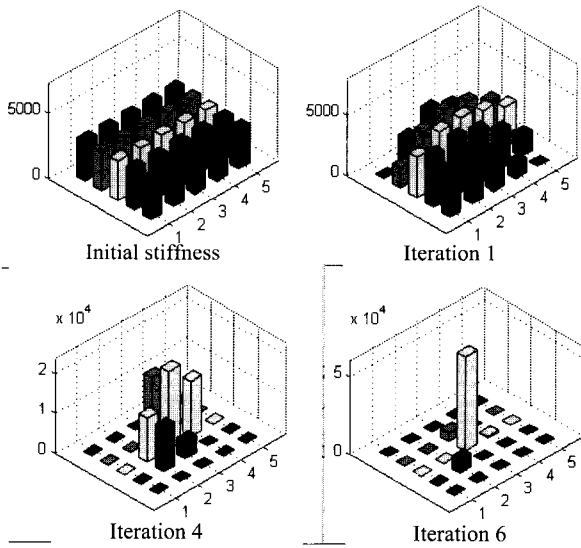


Fig. 5 Variations of support stiffnesses versus iteration

이 경우의 최적화는 다음과 같은 고유치 극대화 문제로 나타낼 수 있다.

$$\text{Maximize } \omega_1(k) \quad (15)$$

$$\text{Subject to } \sum_{j=0}^{25} k_j \leq K_{\max} \quad (16)$$

$$\text{and } 0 \leq k_j \text{ for } j = 1, 2, \dots, 25 \quad (17)$$

식 (16)은 전체 강성의 제한 조건이다. 최적화 과정의 초기에 평판상에 분포된 강성의 크기를 각각 3 kN/m 로 균일하게 주고 25개 강성의 합인 75 kN/m 을 K_{\max} 로 선정하였다. 즉 위의 최적화 문제는 초기에 균일하게 분포된 강성을 고유진동수 극대화를 위해서 어떻게 배치시키느냐 하는 문제이다. 반복계산 과정 중에 식 (8)과 식 (9)를 이용하여 고유치 해석을 수행하고 그 결과로 식 (12)와 식 (13)의 고유치 민감도 해석을 수행한다. 그리고 식 (13)의 고유치 민감도 벡터를 사용하여 강성 변경

을 구한다. 위의 비선형 최적화 문제를 풀기위해서 Gradient Projection Method of Rosen⁽¹⁷⁾을 사용하였으며 Karush-Kuhn-Tucker 조건을 최적치 평가 기준으로 사용하였다. Fig. 5는 25개 선강성의 최적화 과정을 나타낸다. 최종적으로 평판중앙의 최대의 강성을 갖는 절점 13번이 기본 고유진동수를 극대화 하는 최적의 지지점으로 선정되었다.

5.3 고유치 상한 정리를 이용한 최적 지지점의 검증

절점 13을 지지한 후의 평판의 고유진동수는 15.7 Hz 로 측정되었다. 구한 지지점이 최적의 지지점임을 검증하기 위해서 본 논문에서는 다음과 같은 Courant와 Fisher가 제안한 고유치 상한 정리⁽¹⁸⁾(eigenvalue limit theorem)를 고려한다.

$$\bar{\omega}_i \leq \omega_{n(i+N_i)} \quad (18)$$

여기서 ω_i 와 $\bar{\omega}_i$ 는 각각 지지 전과 후의 구조물의 i 번째 고유진동수이고 n 는 지지점의 개수이다. 5.2절의 최적화 문제의 경우, 기본 고유진동수를 고려하므로 i 는 1이고 구한 지지점이 한 개이므로 N 는 1이다. 따라서 고유

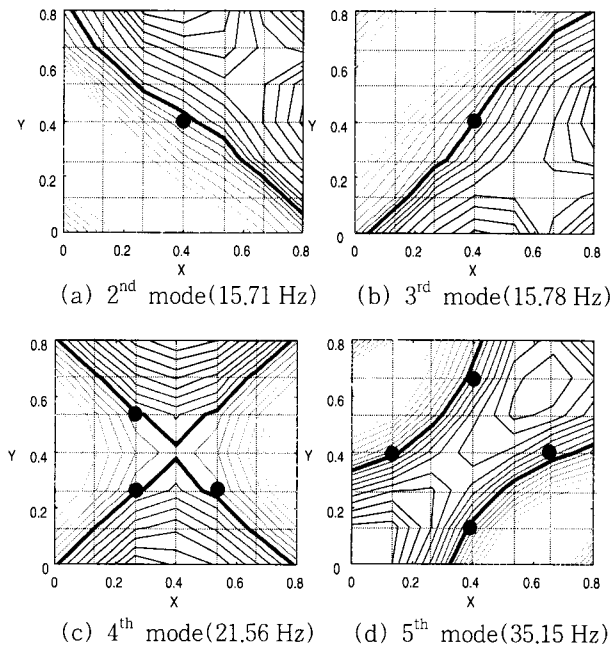


Fig. 6 Optimal support locations and nodal lines of baseline modes. ●calculated optimal support location for (a) $k_0=3.5\text{K N/m}$:(b) $k_0=3.5\text{K N/m}$:(c) $k_0=8\text{K N/m}$:(d) $k_0=20\text{K N/m}$; — nodal lines of modes of unsupported plate.

치 상한 정리에 의해 한 개의 지지점으로 얻을 수 있는 최대 기본 고유진동수는 지지전의 두번째 모드의 고유진동수가 된다. 절점 13을 지지한 후의 기본 고유 진동수 ω_{n1} 와 지지 전의 두번째 고유 진동수 ω_{n2} 는 각각 15.7 Hz로서 일치한다. 따라서 절점 13은 고유치 개선의 최대값을 얻을 수 있는 최적의 지지점임을 알 수 있다. 한편 고유치 개선의 최대값을 얻을 수 있는 최적 지지점은 일반적으로 지지전의 고차 모드 형상의 절선(nodal line) 위에 위치한다고 알려져 있다.⁽¹⁰⁾ 구한 최적 지지점인 절점 13은 Fig. 6(a)과 6(b)에서 볼 수 있듯이 지지 전의 두번째와 세번째 모드 형상의 절선위에 위치함을 확인 할 수 있다. 이 문제의 경우 두번째와 세번째 모드는 중첩된 모드이다.

5.4 고유치 상한정리를 이용한 최적 지지점의 선정

식 (15)와 식 (16)에서 정의된 최적화 문제는 비선형 최적화 문제이므로 5.2절에서 설명한 선강성 최적화 결과는 초기 강성에 따라 민감하게 변하며 항상 최적의 지지점을 얻을 수 있다는 보장을 할 수 없다. 따라서 정확한 지지점 선정 결과를 얻기 위해서는 초기 강성이 지지점 선정에 미치는 영향을 파악할 필요가 있다. 본 절에서는 초기 강성에 대한 Parametric Study를 통해서 최적 지지점을 선정하는 방법을 설명한다. Fig. 7은 초기 강성 k_0 의 변화에 대한 선강성 최적화 결과를 나타내고 Fig. 8은 선강성 최적화로 얻어진 기본 고유진동수를 나타낸다. Fig. 8에서 초기 강성이 증가함에 따라 선강성 최적화로 얻어지는 기본 고유진동수가 증가함을 알 수 있다. 또한 Fig. 7에서 볼 수 있는 바와 같이 초기 강성이 증가하면 최적 지지점의 개수가 증가하며 서로 다른 여러 위치로 수렴됨을 알 수 있다. 지지점의 개수는 3.5 KN/m, 8 KN/m 그리고 17 KN/m의 특정 초기 강성을 전후로 해서 급격히 변함을 관찰 할 수 있었다. Table 1은 Parametric study를 통해서 구한 여러 최적 지지점을 지지한 후의 평판의 기본 고유진동수 그리고 지지 전 평판의 고차 고유진동수를 비교하고 있다. Table 1에서 볼 수 있듯이 지지후 평판의 기본 고유진동수는 식 (18)의 고유치 상한 정리에서 알 수 있는 고유치 최대값인 지지 전 고차 고유진동수에 근접해 있음을 알 수 있다. 따라서 Table 1에서 정리된 세가지 개수 (1개, 3개, 4개)의 지지점은 고유진동수 개선의 상한값을 얻을 수 있는 최적 지지점임을 알 수 있다. 한편 Figs. 6(c)와 6(d)에서 볼 수 있듯이 구한 세가지 개수의 최적 지지점은 지지전 평판의 고차 모드의 절선상에 있음을 알 수 있으며 이것은 고유치 상한 정리와 일치하는 결과를 보여준다.

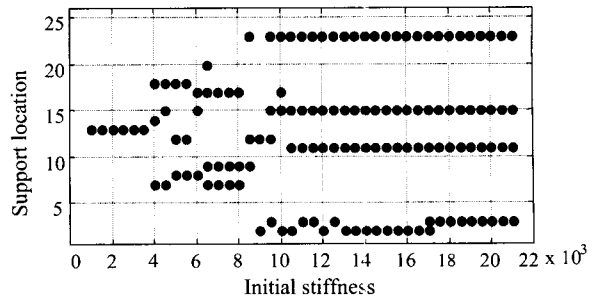


Fig. 7 Optimized support locations versus initial stiffness k_0

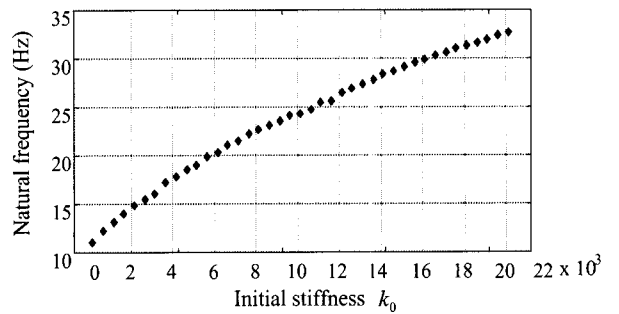


Fig. 8 Natural frequency obtained from the stiffness optimization versus initial stiffness, k_0

Table 1 Comparisons of natural frequencies of unsupported and supported plate for different number of optimized support locations

Number of supports(Ns)	Optimized supporting nodes	Natural frequency of supported plate	Natural frequency of unsupported plate
1	13	15.7 Fz	15.7Hz($2^{nd}/3^{rd}$) modes
3	7, 9, 17	21.5 Fz	21.6 Hz (4^{th} mode)
4	3, 11, 15, 18	34.4 Fz	35.2 Hz (5^{th} mode)

결론적으로 초기 강성을 변화시키면서 선강성 최적화를 수행하고 그 결과를 고유치 상한 정리와 비교하여 최적의 지지점임을 확인함으로써 정확한 최적 지지점을 얻을 수 있다. 이때 여러가지 개수의 최적 지지점을 얻게 되며 적용상의 제한점을 고려하여 적합한 개수의 최적 지지점을 선택하여 구조물에 적용하도록 한다. 한편 최적 지지점의 계산 과정 중에 $x=0, y=0$ 에서의 불확실한 경계조건을 별도로 고려할 필요가 없으며 이 효과는 측정된 주파수 응답 함수를 통하여 고려가 되었다. 따라서 본 방법은 구조물의 정확한 수치모델을 확립하기 위한 별도의 설계 변수

구명 과정이 필요 없이 실험치를 적절히 이용하여 정확한 최적 지지점을 선정할 수 있는 장점이 있음을 알 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 구조물의 고유진동수를 극대화 하기 위한 지지점 선정 방법을 제안하고 간단한 평판 구조물에 실험 및 적용하여 그 효용성을 살펴 보았다. 이를 위해 측정된 주파수응답함수를 이용하여 선강성 지지후의 고유치 해석과 선강성 변화에 대한 고유치 민감도 해석을 수행하였다. 구조물의 수치 모델 필요 없이 실험으로 측정된 주파수응답함수만을 사용하므로 수치 모델 수립이 어려운 복잡한 구조물에 적용할 경우에도 정확한 결과를 얻을 수 있다는 장점이 있으며 실험을 통하여 그 효용성을 규명하였다.

최적화 과정에서 초기 강성을 증가시킬수록 기본 고유진동수가 증가하며 많은 개수의 최적 지지점에 수렴함을 관찰할 수 있었다. 선강성 최적화 결과와 고유치 상한 정리를 비교하여 구한 지지점이 최적의 지지점임을 재확인하였다. 이때, 주어진 조건에 따라 적절한 개수의 지지점을 선정하도록 하였다. 구해진 최적 지지점은 구조물 모드 형상의 절선에 위치하였으며 고유치 상한 정리와 일치하는 결과를 나타내었다.

본 방법을 실제 구조물에 적용시, 최적지지점의 선정 결과는 주파수응답함수의 측정오차에 민감하므로 주파수응답함수를 정확히 측정할 필요가 있으며 측정오차가 최적지지점의 위치에 미치는 오차해석을 별도로 수행할 필요가 있다. 또한 계산되는 최적 지지점은 측정이 가능한 위치에 제한되는데, 실제 구조물은 구조물의 기하학적인 형태 등에 의해 센서의 장착 가능 위치가 제한 될 수 있으므로 수치모델을 사용하는 경우와 비교하여 적용상의 제한점을 가질 수 있다.

참 고 문 헌

(1) Dowell, E. H., 1979, "On Some General Properties of Combined Dynamical Systems", ASME Trans. Journal of Applied Mechanics, pp. 206~209.
 (2) Dowell, E. H., 1987, "Theory of Application of Dynamic Decoupling in Structural Analysis: Another View", Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 3, pp. 119~125.
 (3) Dowell, E. H., 1971, "Free Vibrations of An Linear Structure with Arbitrary Support Conditions", ASME Trans. Journal of Applied Mechanics, pp. 595~

600.

(4) Narita, Y., 1985, "The Effect of Point Constraints on Transverse Vibration of Cantilever Plates", Journal of Sound and Vibration, Vol. 102, pp. 305~313.

(5) Liew, K. M. and Lam, K. Y., 1994, "Effects of Arbitrarily Distributed Elastic Point Constraints on Vibration Behavior of Rectangular Plates", Journal of Sound and Vibration, Vol. 174, pp. 23~36.

(6) Szelag, D. and Mroz, M., 1979, "Optimal Design of Vibrating Beams with Unspecified Support Reactions", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 19, pp. 333~349.

(7) Akesson, B and Olhoff, N., 1988, "Minimum Stiffness of Optimally Located Supports for Maximum Value of Beam Eigenfrequencies", Journal of Sound and Vibration, Vol. 120, pp. 457~463.

(8) Pitattesi, J. M. and Kunz, R. J., 1992, "A Simple Technique for the Rapid Estimation of the Optimal Support Locations for a Vibrating Plate", ASME Trans. Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 114, pp. 112~118.

(9) Pitattesi, J. M. and Di Edwardo, A. V., 1993, "A Design Approach for the Systematic Improvement for Support Locations for Vibrating Circuit Card", Electric Packaging, Vol. 115, pp. 118~123.

(10) Won, K. -M. and Park, Y. -s., 1998, "Optimal Support Positions for a Structure to Maximize Its Fundamental Natural Frequency", Journal of Sound and Vibration, Vol. 213, No. 5, pp. 801~812.

(11) Simpson, A., 1980, 1993, "The Kron's Methodology and Practical Algorithms for Eigenvalue, Sensitivity and Response Analysis of Large Scale Structural Systems", Aeronautical Journal, Vol. 84, pp. 417~433.

(12) Liao, J. -Y. and Tse, C. -C., 1993, "An Algebraic Approach for the Modal Analysis Synthesized Substructure", Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 7, No. 1, pp. 89~104.

(13) Yee, E. K. and Tsuei, Y. G., 1989, "Direct Component Modal Synthesis Technique for System Dynamic Analysis", American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, Vol. 27, No. 8, pp. 1083~1088.

(14) Tsuei, Y. G., Yee, E. K. L., and Lin, A. C. Y., 1991, "Physical Interpretation and Application of Modal Force Technique", The International Journal of

Analytical and Experimental Modal Analysis, Vol. 6, No. 4, pp. 237~250.

(15) Yee, E. K. L., and Tsuei, Y. G., 1989, "A Method for Modifying Dynamic Properties of Undamped Mechanical Systems", ASME Trans. Journal of Dynamic Systems Measurement and Control, Vol., pp. 403~408.

(16) Yee, E. K. and Tsuei, Y. G., 1991, "Methods for Shifting Natural Frequencies of Damped Mechanical

Systems", American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, Vol. 27, No. 8, pp. 1973~1977.

(17) Bazara, M. S., Sherali, H. D. and Shetty, C. M., 1993, Nonlinear Programming : Theory and Algorithms. Singapore : John Wiley and Sons, Inc. Second Edition, See pp. 448~451.

(18) Lancaster, P. and Tismenetsky, M., 1985, The Theory of Matrices, Second Edition, Academic Press, Orlando.