

〈논 문〉

## 최소 분산 캡스트럼을 이용한 노이즈속에 묻힌 임펄스 검출방법-이 론

Detection of Impulse Signal in Noise Using a Minimum Variance Cepstrum  
-Theory

최 영 철\* · 김 양 한\*\*

Young-Chul Choi and Yang-Hann Kim

(2000년 3월 13일 접수 ; 2000년 5월 29일 심사완료)

**Key Words** : Minimum Variance Cepstrum(최소분산 캡스트럼), Impulse Signal(임펄스 신호), Bandpass Lifter(대역 통과 리프터), Sinusoidal Function(조화함수)

### ABSTRACT

Conventional cepstrum has been widely used to detect echo and fault signals embedded in noise. One of the problems of finding impulse signals using the conventional cepstrum is that it is normally very sensitive to signal to noise ratio (SNR). This paper proposes a signal processing method to detect impulse signal in noisy environment. Because the proposed method minimizes the variance of signal power at a cepstrum domain, it is suggested to be called as 'minimum variance cepstrum (MV cepstrum)'. Computer simulations have been performed to understand the characteristics of the MV cepstrum. Both mathematical approach and computer simulations confirmed that the MV cepstrum is a useful technique to detect impulse in noisy environment.

### 1. 서 론

우리들은 일상생활에서 많은 신호들을 접하게 된다. 산에서 들려오는 메아리나, 회전기계 등의 결합에 의한 주기적인 진동, 소음 현상은 흔히 접할 수 있는 신호의 형태들이다.

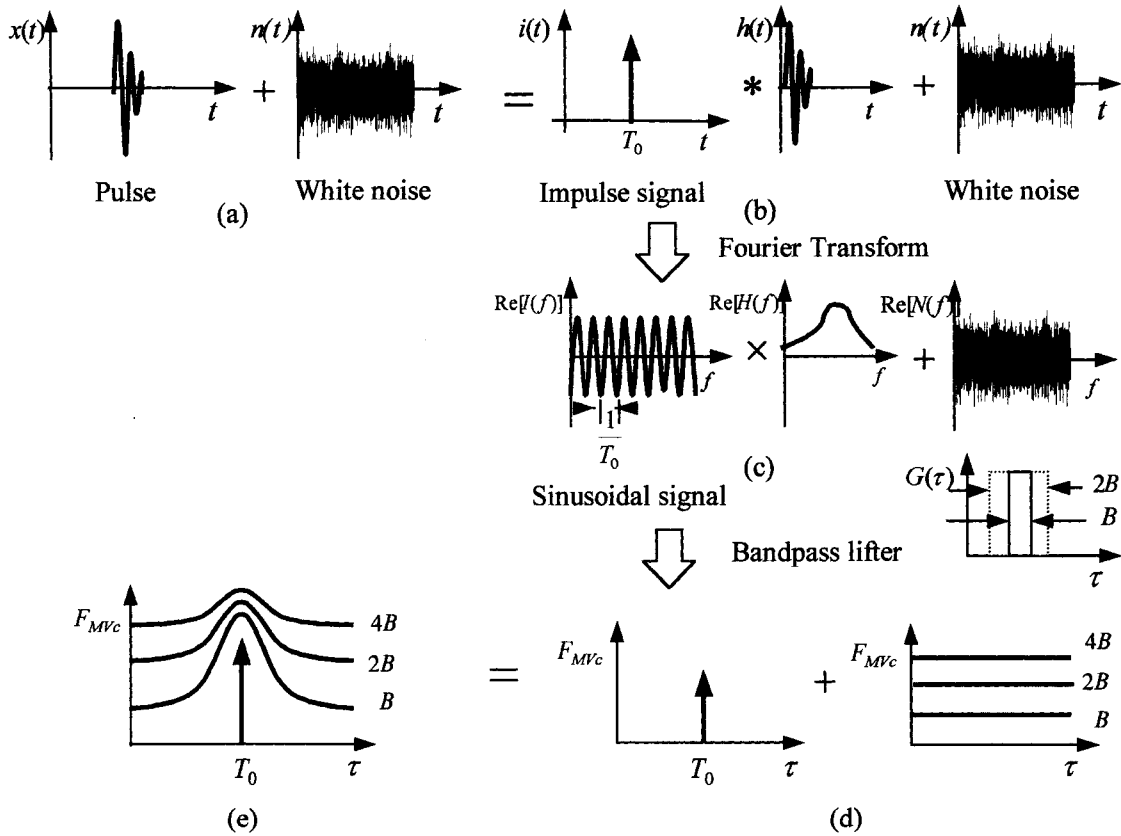
앞의 예제의 경우 신호들의 공통적인 특징을 살펴 보면 많은 경우 임펄스 신호(impulse signal)와 각각 독특한 형태로 관계되어 있음을 알 수 있다. 산에서 반사되어 일정한 시간 지연이 있는 후 들리게 되는 메아리는 원래 소리와 임펄스의 컨볼루션(convolution)으로 표현할 수 있다.

그리고 회전기계 결합일 경우 결합신호는 충격에 의한 신호가 주기적으로 나타나는 형태이므로 임펄스 열(impulse train)과 충격에 의한 신호의 컨볼루션으로 나타낼 수 있다.

임펄스와 관계된 시간지연 및 회전기계 결합 검출과 관련된 신호처리 방법으로 캡스트럼(cepstrum)<sup>(1)</sup>이 널리 사용되어져 왔다. 기존의 캡스트럼은 스펙트럼 신호의 로그값의 역 푸리에 변환(inverse Fourier transform)을 의미하며 신호의 시간 영역에 대응하는 영역으로의 변환을 의미한다. 이 변환은 신호의 주기성에 관한 정보를 쉽게 표현하는 장점이 있어서 일정한 시간간격으로 반복되는 주기를 추정하는데 널리 사용되고 있다. 하지만 기존의 파워 캡스트럼(power cepstrum)이나 복소 캡스트럼(complex cepstrum)은 일반적으로 노이즈에 매우 민감하기 때문에

\* 한국과학기술원 대학원 기계공학과

\*\* 정회원, 한국과학기술원 기계공학과



**Fig. 1** The simplest example of minimum variance cepstrum (a) Pulse signal in white noise. (b) The pulse can be separated into impulse and signal. (c) The Fourier transform of impulse, which has time delay, leads to sinusoidal signal. (d) Since the sinusoidal signal has line spectrum and white noise has continuous spectrum, the signal power of sinusoidal function does not changed, but white noise power drop in proportion to the decrease of lifter bandwidth ( $B$ ) at cepstrum domain. (e) Minimum variance cepstrum.

신호 대 잡음비가 좋지 않은 환경에서는 적용하기가 어렵다는 단점이 있다.

본 연구의 목적은 신호들이 노이즈 속에 묻혀 관찰 할 수 없을 때 시간지연이나 기계결합 정보와 관계된 임펄스 신호를 검출하고자 하는 것이다. 이를 위하여 본 논문에서는 최소 분산 캡스트럼(minimum variance cepstrum, MV cepstrum)을 제안하고자 한다.

## 2. 기본 이론

### 2.1 최소 분산 캡스트럼의 기본 이해

제안된 방법의 기본생각은 시간지연을 가진 임펄스 신호를 푸리에 변환(Fourier transform) 하면 조화함수(sinusoidal function)로 나타난다는 것이다. 따라서 주파수 영역에서 조화함수와 노이즈로 표현되는 신호를 대역 통과 리프터(bandpass lifter)의 대역폭을 줄여가면서 캡스트럼

(cepstrum)을 구해보면 노이즈의 파워만 줄어들게 되어 임펄스 신호의 검출이 가능 할 것이다.

Fig. 1은 제안된 방법의 가장 간단한 예를 보여주고 있다. Fig. 1(a)의 펄스(pulse)는 시간지연을 가진 임펄스와 신호의 컨볼루션(convolution)으로 나타낼 수 있다.(Fig. 1(b)) 이 신호를 푸리에 변환을 하면 Fig. 1(c)처럼 시간지연을 가진 임펄스는 조화함수로 나타나지만 노이즈는 여전히 분산(variance)을 갖는 노이즈처럼 나타나게 된다. 즉 노이즈 속에서 임펄스 검출문제가 푸리에 변환을 함으로써 노이즈 속에서 조화함수 검출문제로 바뀌게 된다. 조화함수와 노이즈를 분리시키기 위해 대역통과 리프터의 대역폭을 줄이면서 이 리프터를 통과시킨 신호의 파워를 구해보면, 조화함수는 선 스펙트럼(line spectrum)을 가지기 때문에 신호파워가 변화지 않으나, 노이즈 일 경우에는 연속 스펙트럼(continuous spectrum)을 가지기 때문에 대역폭이 줄어들수록 노이즈의 파워가 점차 감소하게 되고 따라

서 노이즈 속에 묻힌 임펄스를 검출할 수 있게 된다.[Fig. 1(d)]

이렇게 제안된 방법은 캡스트럼 영역에서 신호 파워의 분산을 최소화하는 특성이 있다. 이러한 특성을 잘 나타내기 위해 본 연구에서는 제안하는 방법을 최소 분산 캡스트럼(minimum variance cepstrum, MV cepstrum)이라 부르기로 한다.

### 2.2 최소 분산 캡스트럼의 일반식

앞에서 설명한 기본개념을 가지고 최소 분산 캡스트럼에 대한 일반식을 유도해 보자.

우선  $x(t)$ 를 신호라 하고 이것의 이산 푸리에 변환(discrete Fourier transform)을 구해 보면 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{k-1} x(n)e^{j\omega n} = \mathbf{w}^H \mathbf{x} \quad (1)$$

여기서  $k$  : 데이터 개수

$$\mathbf{w}_0 = [1, e^{j\omega_0}, e^{j2\omega_0}, \dots, e^{j(k-1)\omega_0}]^T$$

$$\mathbf{x} = [x[0], x[1], x[2], \dots, x[k-1]]^T$$

주파수 영역에서 선 스펙트럼을 가진 조화함수와 연속 스펙트럼을 가진 노이즈를 구별하기 위해 대역폭을 바꿀 수 있는 대역통과 리프터(bandpass lifter)를 정의할 필요가 있다.

대역 폭  $\Delta$ 와 중심 파주수(center quefreny)  $\tau_i$ 를 갖는 이상적인 대역 통과 리프터(ideal band pass lifter)는

$$|G_i(e^{j\tau})| = \begin{cases} 1 & ; |\tau - \tau_i| < \Delta/2 \\ 0 & ; otherwise \end{cases} \quad (2)$$

와 같이 나타낼 수 있다.  $\tau_i$ 에서 입력의 파워가 리프터에 의해 변화 하지 않기 위해서  $G_i(e^{j\tau})$ 는  $\tau = \tau_i$ 에서 1의 이득(gain)을 가져야 하기 때문에 다음식을 만족하여야 한다.

$$G_i(e^{j\tau_i}) = \sum_{n=0}^p g_i(n)e^{jn\tau_i} = 1$$

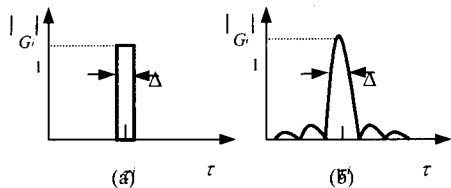


Fig. 2 (a) Ideal bandpass lifter. (b) Actual bandpass lifter

$$= \mathbf{g}_i^H \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i^H \mathbf{g}_i = 1 \quad (3)$$

여기서  $g_i(n)$  : 리프터 계수 (lifter coefficient)

$$\mathbf{g}_i = [g_i(0), g_i(1), \dots, g_i(p)]^T$$

$$\mathbf{e}_i = [1, e^{j\tau_i}, \dots, e^{jp\tau_i}]^T$$

만약 푸리에 변환된 신호를  $X(n)$ 이라 하고,  $g_i(n)$ 으로 리프터 된 신호(liftered signal)를  $Y_i(n)$ 이라고 한다면

$$F_{MVC} = E[|Y_i(n)|^2] = \mathbf{g}_i^H \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w} \mathbf{g}_i \quad (5)$$

여기서  $F_{MVC}$ 는 캡스트럼 영역에서  $\tau_i$ 에 해당하는 신호파워를 의미하고,  $\mathbf{R}_x$ 는 신호  $x(n)$ 의 자기 상관 행렬(auto-correlation matrix)을 나타낸다.

실제로 사용되는 대역통과 리프터는 Fig. 2 (b)에서 보듯이 중심 파주수(center quefreny) 주위로 작은 로브(lobe)들이 존재하여 파워의 손실이 발생하게 된다. 이러한 리프터들을 통과시켜 구한 신호 파워는 중심 파주수에 해당하는 값 뿐만 아니라 다른 부위에 해당하는 값까지 포함하게 되므로 신호 파워의 분산이 커지게 된다. 만약 리프터를 통과 시킨 신호의 파워를 최소화 시킨다면, Fig. 2 (b)에서 볼 수 있듯이 대역폭은 리프터의 계수에 의해 결정되어 있고 높이는 1로 고정되어 있기 때문에 단지 작은 로브들만이 감소하게 되므로 신호파워의 분산을 줄일 수 있게 된다. 따라서 신호파워를 최소화하기 위해 라그랑지안(Lagrangian)에

$$L = \mathbf{g}_i^H \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w} \mathbf{g}_i - \mu(1 - \mathbf{e}_i^H \mathbf{g}_i) + \mu^*(1 - \mathbf{g}_i^H \mathbf{e}_i) \quad (6)$$

여기서  $\mu$  : 라그랑지 승수(Lagrange multiplier)

복소 구배(complex gradient)를 취한 후 0으로 놓고, 리프터의 제한 조건식인 식 (3)을 이용하면 신호 파워의 분산을 최소화하는 대역 통과 리프터의 계수(coeffcient)를 얻을 수 있다.

$$\mathbf{g}_i = \frac{(\mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w})^{-1} \mathbf{e}_i}{\mathbf{e}_i^H (\mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w})^{-1} \mathbf{e}_i} \quad (7)$$

최종적으로 식 (7)을 식 (5)에 대입하면 최소 분산 캡스트럼식을 얻을 수 있는데, 모든 파주수에 대해서도 성립하므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F_{MVC} = \frac{1}{\mathbf{e}^H (\mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w})^{-1} \mathbf{e}} \quad (8)$$

여기서  $\mathbf{e} = [1, e^{j\tau}, \dots, e^{jN\tau}]^T$

유도 과정에서 확인할 수 있듯이 제안된 방법은 캡스트럼 영역에서 신호파위의 분산을 최소화하고 있다. 이러한 특성을 잘 표현하기 위해서 본 논문에서는 제안하는 방법을 최소 분산 캡스트럼(minimum variance cepstrum, MVcestrum)이라 부르기로 한다.

### 2.3 최소 분산 캡스트럼식의 적용

임펄스를 포함한 일반적인 신호에 최소 분산 캡스트럼식을 적용하면 수학적으로 어떤 결과가 나오는지 알아 보기로 하자.

임펄스 신호가 존재하는 많은 경우 다음과 같은 일반식으로 표현할 수 있다.

$$x(t) = h(t) * \sum_{m=1}^N A_m \delta(t - T_m) + n(t) \quad (9)$$

여기서  $h(t)$ 는 신호,  $n(t)$ 는 백색 잡음(white noise)을 나타내며, \*은 컨볼루션(convolution),  $\delta(t)$ 는 디락 델타 함수(Dirac delta function)를 뜻한다. 또한  $A_m$ 은  $m$ 번째 임펄스 신호의 크기를,  $T_m$ 은  $m$ 번째 임펄스까지의 시간지연을 의미한다.

임펄스 신호를 조화함수로 만들기 위해 식 (9)를  $t$ 에 대해 푸리에 변환을 하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$X(\omega) = H(\omega) \sum_{m=1}^N A_m e^{jT_m \omega} + N(\omega) \quad (10)$$

주파수 영역에서  $H(\omega)$ 는 많은 경우  $e^{jT_m \omega}$ 에 비해 변화율이 작아  $H$ 로 일정하다고 가정할 수 있기 때문에 (10)식에 대한 자기 상관 함수(auto-correlation function)의 역 행렬을 다음과 같이 구할 수 있다.<sup>(5)</sup>

$$\mathbf{R}_x^{-1} = \frac{1}{\xi^2} \left[ \mathbf{I} - \sum_{m=1}^N \frac{H^2 A_m^2}{\xi^2} \frac{1}{1 + (p+1) \frac{H^2 A_m^2}{\xi^2}} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_m^H \right] \quad (11)$$

여기서  $\xi^2$ 은 노이즈  $n(t)$ 를 푸리에 변환을 한  $N(\omega)$ 의 분산을 나타낸다. 신호  $x(t)$ 의 자기 상관 행렬  $\mathbf{R}_x$ 와  $x(t)$ 를 푸리에 변환을 한  $X(\omega)$ 의 자기 상관 행렬  $\mathbf{R}_x$ 는 다음과 같은 관계를 가지기 때문에

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w} \quad (12)$$

식 (11), (12)를 식 (8)에 대입하면 식 (9)에 대한 최소

분산 캡스트럼식을 얻을 수 있다.

$$F_{MVC} = \frac{\xi^2}{(1+p) - \sum_{m=1}^N \frac{\xi^2}{1 + (p+1) \frac{H^2 A_m^2}{\xi^2}} |e^H \mathbf{e}_m|^2} \quad (13)$$

여기서  $\mathbf{e}^H \mathbf{e}_m$ 는 사각 윈도우(rectangular window)를 이산 푸리에 변환(discrete Fourier transform)을 한 형태이기 때문에 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{e}^H \mathbf{e}_m = \sum_{k=0}^p e^{jk(\tau - T_m)} \quad (14)$$

따라서  $\tau$ 가  $T_m$ 와 같을 때와 다를 경우로 나누어 보면 식 (13)은 다음과 같이 간략하게 나타낼 수 있다.

$$F_{MVC} \cong \begin{cases} \frac{\xi^2}{1+p} + H^2 A_m^2 & ; \tau = T_m \\ \frac{\xi^2}{1+p} & ; \tau \neq T_m \end{cases} \quad (15)$$

$\tau$ 가  $T_m$ 와 같은 곳, 즉  $m$ 번째 임펄스 위치에서는 리프터의 차수( $p$ )를 증가 시킴에 따라 값은 노이즈를 푸리에 변환한  $F_{MVC}$ 의 분산( $\xi^2$ )만이 줄어 들기 때문에 임펄스의 신호파위와 관계된  $H^2 A_m^2$ 으로 수렴함을 알 수 있다. 하지만  $\tau$ 가  $T_m$ 와 다른 곳에서는 리프터의 차수가 증가함에 따라  $F_{MVC}$ 값은 계속해서 줄어 들게 되어 Fig. 1(e)와 같이 노이즈 속에 묻혀 있는 임펄스 신호를 검출할 수 있게 된다.

### 3. 컴퓨터 모의실험

제안된 방법이 얼마나 현실에 잘 적용할 수 있는지, 그리고 어떠한 특성을 가지고 있는지를 시각적으로 확인하기 위하여 컴퓨터 모의 실험 방법을 수행하였다. 모의실험을 위하여는 적용대상이 되는 경우를 가장 대표적으로 표현하는 신호가 필요하다. 이러한 목적을 위하여 적절한 잡음 성분과 임펄스 열(impulse train)이 조화함수에 의하여 변조된 신호를 선택하는 것이 필요할 것이다.

$$x(t) = e^{-0.5t} \cos 2\pi t * \nabla \delta(t - 3.1m) + n(t) \quad (16)$$

즉 식 (16)을 최소분산 캡스트럼 식에 대입하여 정리하면 다음과 같은 결과 식을 얻을 수 있다.

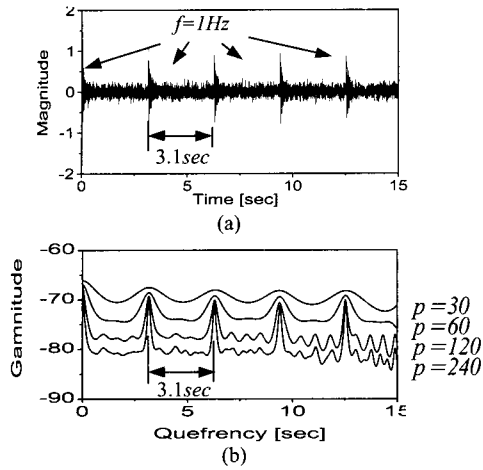


Fig. 3 Computer simulation of MV cepstrum (a) Pulses in noise ( $f=1$  Hz, pulse period=3.1sec, signal to noise ratio=1). (b) Application of MV cepstrum on the (a) signal : MV cepstrum converge into the location of impulse as lifter order  $P \rightarrow \infty$ .

$$F_{MVC} = \frac{\xi^2}{(l+p) - \frac{H^2}{\xi^2 + H^2(p+l)} \sum_{m=0}^4 e^{H^2} e^{3.1lm}} \quad (17)$$

여기서

$$H = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} 0.5 \left\{ \frac{1}{0.5^2 + (2\pi + \omega)^2} - \frac{1}{0.5^2 + (2\pi - \omega)^2} \right\} d\omega$$

식 (17)에서  $r$ 가 0, 3.1, 6.3, 9.4 sec 그리고 12.5 sec 되는 임펄스 위치지점에서는  $F_{MVC}$ 의 함수 값이  $\frac{\xi^2}{1+p} + H^2$ 로 되므로 리프터의 차수를 증가 시킴에 따라  $H^2$ 으로 수렴하지만 그 외 부분에서는 점차 감소함을 알 수 있다. 이러한 현상은 Fig. 3 (b)의 모의실험 결과에서 시각적인 확인이 가능하다. 그리고 Fig. 4에서 보여주듯이 제안된 방법은 노이즈 속에 펄스들이 묻혀 시간 영역에서 관찰할 수 없는 경우에서도 펄스들을 검출할 수 있음을 확인할 수 있었다.

제안된 최소 분산 캡스트럼에 추가적으로 스펙트럼 평균을 적용하면 임펄스 검출능력이 더욱 향상될 수 있을 것이다. 이것은 일반적으로 신호대 잡음비가 대상신호를 평균함으로써 향상된다는 사실과 동일한 맥락이다. 펄스 신호가 주기적으로 나타나는 경우에는 다음식과 같이 모델링할 수 있다.

$$x(t) = h(t) * \sum_{m=0}^{N-1} \delta(t - T_d - mT_0) + n(t) \quad (18)$$

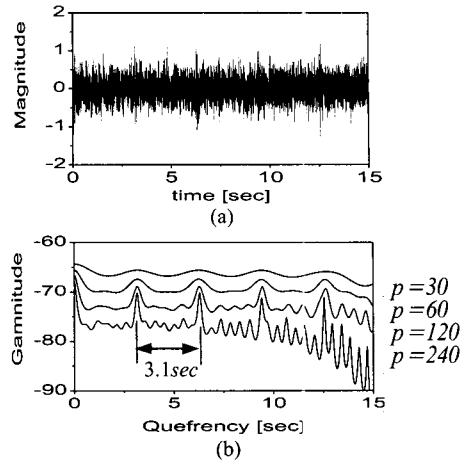


Fig. 4 Computer simulation of MV cepstrum (a) Pulses in noise ( $f=1$  Hz, pulse period=3.1sec, signal to noise ratio=0.1). (b) Application of MV cepstrum on the (a) signal : MV cepstrum converge into the location of impulse as lifter order  $P \rightarrow \infty$ .

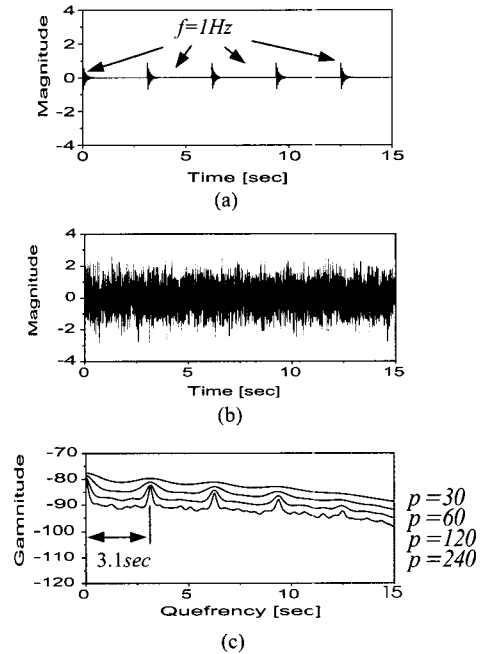


Fig. 5 Computer simulation (a) Pulses ( $f=1$  Hz, pulse period=3.1sec) (b) Pulses in noise (signal to noise ratio=0.0085). (c) Averaged MV cepstrum of 100 signals : MV cepstrum converge into the location of impulse as lifter order  $p \rightarrow \infty$ .

여기서  $h(t)$ 는 펄스신호,  $T_d$ 는 첫번째 펄스까지의 시간 지연을 의미하고,  $T_0$ 는 펄스들의 주기를 나타내고 있다.

평균을 취하기 위해 윈도우를 사용하여 데이터를 자르면 첫번째 펄스까지의 시간 지연인  $T_d$  값이 모두 다르기 때문에 시간영역에서 평균은 펄스의 주기에 대한 데이터를 잃어 버리게 한다. 하지만 식 (18)을 푸리에 변환을 한 다음, 크기의 제곱을 취한다면 식 (19)와 같이  $T_d$  값이 사라지게 되므로 스펙트럼 평균을 취함으로써  $|N(\omega)|^2$ 의 분산인  $\xi^2$ 을 줄여 임펄스 검출능력을 향상 시킬 수 있다.

$$|X(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2 \frac{1 - \cos N\omega T_0}{1 - \cos \omega T_0} + |N(\omega)|^2 \quad (19)$$

Fig. 5는 스펙트럼 평균을 통한 최소 분산 캡스트럼의 결과를 보여 주고 있는데, 신호대 잡음비가 0.0085인 노이즈가 비교적 많은 경우에도 임펄스를 검출할 수 있었고, 평균을 많이 취할수록 더 좋은 결과를 얻을 수 있었다. 이와 같이 스펙트럼 평균을 통해 임펄스 검출능력을 향상시키는 방법은 펄스 신호가 주기적으로 나타나는 경우에 더욱 좋은 결과를 얻을 수 있다.

#### 4. 결론 및 토의

본 연구에서는 신호에 비해 노이즈가 상대적으로 많은 경우 임펄스 신호를 검출할 수 있는 신호처리에 대해 알아보았다. 캡스트럼 영역에서 신호 파워의 분산을 최소화하기 때문에 이 방법을 최소 분산 캡스트럼(minimum variance cepstrum)이라고 부르기로 하고 연구를 수행하였는데, 컴퓨터 모의실험을 통해 비교적 신호 대 잡음비가 낮은 경우에서도 임펄스 신호를 검출할 수 있음을 확인하였다.

그리고 최소 분산 캡스트럼에서 임펄스 검출능력을 향상

시키는 방법으로 스펙트럼 평균을 통해 노이즈의 분산을 줄이는 방법을 제시하였다. 이 방법은 특히 회전기계처럼 결합에 의한 신호가 주기적으로 나타날 경우에 적합한 방법이다.

수학적 접근과 컴퓨터 모의 실험을 통해 최소 분산 캡스트럼이 노이즈 속에 묻힌 임펄스를 검출할 수 있었으므로 베어링, 기어 등과 같이 회전기계의 결합 검출 등 많은 분야에 제안된 방법을 적용할 수 있을 것이다.

#### 참 고 문 헌

- (1) Randall R. B., and Thch., B., 1987, Frequency analysis, B. A., B&K, pp. 271~304,
- (2) Ronald N. Bracewell, 1986, Fourier transform and Its Applications, R. R. Donnelley & Sons Company, pp. 214~215,
- (3) Charles W. Therrien, 1992, Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing, Prantice-Hall, Inc. pp. 609~612,
- (4) Peter J. Sherman, 1991, "On the Family of ML Spectral Estimates for Mixed Spectrum Identification," IEEE Transactions on Signal Processing, Vol.39, No.3, pp. 644~655.
- (5) 최영철, 2000, "최소 분산 캡스트럼을 이용한 노이즈 속에 묻힌 임펄스 검출 방법", 한국과학기술원 기계공학과 석사학위논문.
- (6) 최영철, 김양한, 1999, "MV Cepstrum을 이용한 노이즈 속에 묻힌 임펄스 신호 검출방법", 한국소음진동공학회 추계학술대회, pp. 765~770,