

〈논 문〉

# Stick-Slip 마찰이 있는 비선형 진동 시스템의 규명에 관한 연구

## A Study on the Identification of Nonlinear Vibration System with Stick Slip Friction

허인호\* · 이병림\*\* · 이재응\*\*\*

In Ho Hur, Byung Rim Lee and Jae Eung Lee

(2000년 1월 17일 접수 ; 2000년 4월 24일 심사완료)

**Key Words** : Discrete Time (이산시간), System Identification(시스템 규명), Stick Slip, Canudas Friction Model (카누다스 마찰 모델), NARMAX(Nonlinear Auto-Regressive Moving Average with eXogenous)

### ABSTRACT

In this paper, a discrete time model for the identification of nonlinear vibration system with stick-slip friction is proposed. The proposed model can handle the highly nonlinear behavior of the friction, such as stick-slip phenomenon and Stribeck effect. The basic idea of the proposed model is as follows : If the nonlinearity of the system can be predicted as a simple function, then this nonlinear function term can be directly used in the discrete time model. By doing this, the number of nonlinear terms in the model can be much less than those of NARMAX model which is widely used nonlinear discrete model. The simulation result shows that the proposed model can estimate the response of the nonlinear vibration system with stick-slip friction very well with less computational effort.

### 1. 서 론

기계 작동시 발생하는 마찰 현상은 기계의 동작을 예측하거나 제어를 하는데 고려해야 하는 매우 중요한 요소 중의 하나이다. 마찰 현상을 설명하고 그 특징을 표현해 주는 많은 모델들이 발표되었는데 그 중에서 정지 마찰 계수만을 고려하는 쿨롱 모델을 적용하는 방법이 가장 일반적으로 쓰이고 있다. 하지만 마찰 현상은 stick-slip 현상, Stribeck효과 등과 같은 쿨롱마찰만으로는 표현할 수 없는 고도의 비선형성을 갖고 있다. 그래서 쿨롱 모델의 단점을 보완한 새로운 모델들이 계속 발표되고 있다. 대표적인 모

델로는 Dahl 모델, Karnopp 모델, Armstrong 모델, Bristle 모델, Reset integrator 모델, Canudas 모델 등이 있다.<sup>(1)</sup>

한편, 비선형 시스템의 특성을 실험 데이터로부터 규명하려는 연구가 활발히 진행되고 있다. 시스템 규명에 대한 연구는 선형시스템의 규명으로부터 발전되어 왔는데, 현재는 비선형 시스템의 규명에 쓰이는 대표적인 모델링 기법인 NARMAX 모델(Nonlinear Auto-Regressive Moving Average with eXogenous input model)<sup>(2)</sup> 등 많은 모델링 기법이 제안되고 있다. 비선형 시스템 중에서 마찰이 있는 비선형 진동시스템의 규명에 대한 연구가 최근에 시도되었으나<sup>(3)</sup>, 그 논문에서는 마찰 현상을 쿨롱 마찰로만 모델링한 연구이었다. 본 연구에서는 stick-slip 현상, Stribeck효과 등을 고려하여 최근에 소개된 마찰 모델인 카누다스(Canudas) 모델<sup>(4)</sup>을 이용하여 마찰이 있는 비선형 진동 시스템의 특성을 규명하는 이산시간 모델링 방법을 제안한

\* 중앙대학교 대학원 기계공학과

\*\* 현대자동차(주) 남양연구소

\*\*\* 정희원, 중앙대학교 공과대학 기계공학과

다. 제안된 방법의 타당성은 모의 실험을 통해 Runge-Kutta 방법 및 NARMAX 모델에 의해 구한 응답과 비교하여 검증하고자 한다.

## 2. 마찰 모델

본 연구에서는 마찰의 비선형 거동을 잘 표현할 수 있는 카누다스 마찰 모델을 사용하였는데, 이 모델은 고체의 접촉은 고체에 붙어 있는 강모(bristle)에 의하여 이루어지는 것으로 가정하고 그들의 평균적인 탄성 거동을 기초로 한 모델이다. 이 모델은 Stribeck 효과, stick-slip 현상 등의 특성을 표현할 수 있으며 이를 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$F_f(\dot{y}) = F_c \operatorname{sgn}(\dot{y}) + (F_s - F_c) e^{-\left(\frac{\dot{y}}{v_s}\right)^2} \operatorname{sgn}(\dot{y}) \quad (1)$$

마찰력의 형태가 식 (1)과 같다는 것은 물체가 움직일 때 마찰력은 정지 마찰력( $F_s$ )이 극복된 후에 지수 함수적으로 운동마찰력( $F_c$ )까지 감소함을 의미한다. 여기서  $F_c$ 는 쿨롱 마찰력,  $F_s$ 는 정지마찰력,  $v_s$ 는 Stribeck 속도이다.

## 3. NARMAX 모델

현재의 출력은 과거의 입력 및 출력의 조합에 의해서 표현할 수 있다는 가정 하에 제시된 NARMAX 모델은 비선형 진동 시스템의 동특성을 잘 표현할 수 있음을 보였다.<sup>(5)</sup> 이 모델은 비선형 차분 방정식이지만 매개변수에 관해서는 선형으로 표현할 수 있다는 장점이 있다. 이 모델에서는 1차 다항 비선형 함수를 다음 식으로 표현한다.

$$y(t) = \sum_{m=0}^M \theta_m a_m(t) + \varepsilon(t) \quad (2)$$

여기서,

$$a_0(t) = 1,$$

$$a_m(t) = \prod_{i=1}^p y^{n_i}(t-i) \prod_{j=1}^q u^{n_j}(t-d-j) \prod_{k=1}^r \varepsilon^{n_k}(t-k) \quad (3)$$

이며,  $\theta_m$ 은 모델 계수이고,  $a_m(t)$ 은 모델의 변수로써 입력  $u(t)$ , 출력신호  $y(t)$  및 잡음  $\varepsilon(t)$ 의 조합으로 표현된다.

또한,  $n_i$ ,  $n_j$ ,  $n_k$ 는  $y(t-i)$ ,  $u(t-d-j)$ ,  $\varepsilon(t-k)$ 의 비선형 차수를 나타내며, 다음과 같은 관계가 있다.

$$\sum_{i,j,k} (n_i + n_j + n_k) = 1, \dots, n, \\ m = m(p, q, r, n_i, n_j, n_k) \quad (4)$$

또한, 모델 항의 수는 다음과 같이 주어진다.

$$M = \sum_{a=0}^n n_a; \quad (5) \\ n_0 = 1, \quad n_a = \frac{n_{a-1} \times (p+q+r+a)}{a}$$

윗 식에서 볼 수 있는 바와 같이 NARMAX 모델은 그 모델 결정을 위한 초기항의 수가 많아 계산상 부담이 많으며, 또한 각 항에 물리적 의미를 부여하기에는 어려움이 있다.

## 4. 이산시간 모델의 구성

본 연구에서 제안하는 이산시간 모델링 방법은 시스템의 특성을 가장 잘 표현할 수 있는 형태의 함수로 모델을 구성한다고 전제한다. 비선형 진동방정식에 대한 이산시간 모델을 구성하기 위하여 다음과 같은 가정을 한다.

가정 I : 시스템은 선형부분과 비선형 부분으로 나누어질 수 있다.

가정 II : 선형 부분은 ARX(Auto- Regressive with eXogenous) 또는 ARMAX(Auto-Regressive Moving Average with eXogenous) 모델의 형태로 표현될 수 있다.<sup>(5)</sup>

가정 III : 비선형 부분은 시스템에서 비선형 특성을 나타내는 항으로써 표현될 수 있으며, 응답에 영향이 현저한 항이라 한다.

가정으로부터 범위응답  $y(t)$ 는 다음과 같은 이산시간 모델로 다시 표현할 수 있다.

$$y(t) = \sum_i \theta_{Li} p_{Li}(t) + \sum_i \theta_{Ni} p_{Ni}(t) + \varepsilon(t) \quad (6)$$

여기서,  $\theta_{Li}$ 와  $\theta_{Ni}$ 는 선형 항과 비선형 항의 모델 계수이고,  $p_{Li}(t)$ 와  $p_{Ni}(t)$ 는 선형과 비선형 항의 변수를 나타내며,  $p_{L0}(t) = 1$ 이다. 비선형항  $p_{Ni}(t)$ 는 응답에 영향이 현저한 형태의 함수들으로써 표현될 수 있다. 이런 형태의 이산시간 모델 표현은 비선형 강성과 감쇠를 갖는 진동 시스템에 적용할 수 있음이 발표된 바 있다.<sup>(6)</sup>

본 연구에서는 응답에 영향을 주는 시스템의 비선형 특성으로 마찰력을 고려하였다. 마찰력을 고려한 진동 시스템의 운동방정식은 다음과 같다.

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + F_f(\dot{y}) = f(t) \quad (7)$$

여기서 마찰력  $F_f(\dot{y})$ 의 형태는 카누다스 마찰 모델의 형태를 취하였고 다시 한번 운동방정식을 정리하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + F_c \operatorname{sgn}(\dot{y}) + (F_s - F_c) e^{-\left(\frac{v}{v_s}\right)^2} \operatorname{sgn}(\dot{y}) = f(t) \quad (8)$$

마찰이 있는 비선형 시스템의 규명을 위한 제안 모델은 선형부와 비선형부의 두 부분으로 나누어진다. 이것을 각각 이산시간 모델로 표현하면 다음과 같다.

#### (1) 선형부

선형 항은 입력과 출력의 이산시간에 의한 조합과 예측 오차로써 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$y_{\text{linear}}(t) = \text{const} + \sum_{i=1}^{n_1} a(i)y(t-i) + \sum_{j=1}^{n_2} b(j)u(t-d-j) + \sum_{k=1}^{n_3} d(k)\varepsilon(t-k) \quad (9)$$

여기서,  $a(i)$ ,  $b(j)$ ,  $d(k)$ 는 각각 모델 계수를 나타낸다.

#### (2) 비선형부

식 (7)의 응답에 현저한 영향을 미치는 비선형항은 마찰 항으로써  $F_c \operatorname{sgn}(\dot{y})$ 와  $(F_s - F_c) e^{-\left(\frac{v}{v_s}\right)^2} \operatorname{sgn}(\dot{y})$ 이고, 이 항의 이산시간 모델은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$y_{\text{nonlinear}}(t) = c_1(t-1)\operatorname{sgn}(\dot{y}(t-1)) + c_2(t-1)e^{-\gamma(t-1)^2}\operatorname{sgn}(\dot{y}(t-1)) \quad (10)$$

여기서  $c_1(i)$ 와  $c_2(i)$ 는 각각 모델 계수를 나타낸다. 따라서, 선형과 마찰력 항으로 구성된 이산시간 모델을 정리하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} y(t) &= y_{\text{linear}}(t) + y_{\text{nonlinear}}(t) \\ &= \text{const} + \sum_{i=1}^{n_1} a(i)y(t-i) + \sum_{j=1}^{n_2} b(j)u(t-d-j) \\ &\quad + c_1(t-1)\operatorname{sgn}(\dot{y}(t-1)) \\ &\quad + c_2(t-1)e^{-\gamma(t-1)^2}\operatorname{sgn}(\dot{y}(t-1)) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n_3} d(k)\varepsilon(t-k) \end{aligned} \quad (11)$$

식 (11)은 매개변수의 조합으로 구성되는 선형형태로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$y(t) = \sum_{i=1}^M \theta_i \phi_i(t) + \varepsilon(t), \quad t=1, \dots, N \quad (12)$$

## 5. 모델 계수 결정

모델 계수는 최소 자승 방법의 확장형태인 직교 매개변

수 추정 방법(7)을 사용하여 결정하였다. 그리고, 모델의 항은 각 항이 예측 에러를 줄이는 비율을 나타내는 ERR(error reduction ratio) 값의 크기를 기준으로 선정하였다. 여기서 ERR값은 어떤 항이 추가되었을 때 에러를 줄이는 정도를 의미하며, 이 값이 작다는 것은 그 항을 추가하여도 모델의 정확도를 높이지는 데 별 도움이 안 된다는 것을 의미한다. 그 표현식은 다음과 같다.

$$[ERR]_i = \frac{\hat{g}_i^2 \sum_{t=1}^N w_i^2(t)}{\sum_{t=1}^N z_c^2(t)} \times 100\% \quad (13)$$

여기서,  $\hat{g}_i$ 는 직교모델의 매개변수 벡터의 추정 값이고  $w_i(t)$ 는 orthogonal polynomial set의 요소이다.<sup>(7)</sup>

추정된 모델은 1단계 전방예측오차의 크기(식(14))와 상관함수(식(15))를 이용하여 그 타당성을 검증할 수 있다.<sup>(8)</sup>

$$RPEL = \sqrt{\frac{\sum_t \varepsilon^2(t)}{\sum_t z_c^2(t)}} \times 100\%. \quad (14)$$

$$\phi_{\varepsilon\varepsilon}(k) = \frac{E[\varepsilon(t, \hat{\theta})\varepsilon(t-k, \hat{\theta})]}{E[\varepsilon^2(t, \hat{\theta})]} = 0, \quad k \neq 0$$

$$\begin{aligned} \phi_{u^2\varepsilon}(k) &= \frac{E[(u^2(t) - \overline{u^2})\varepsilon(t-k, \hat{\theta})]}{\sqrt{E[(u^2(t) - \overline{u^2})^2]}E[\varepsilon^2(t, \hat{\theta})]} \\ &= 0, \quad \forall k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{u\varepsilon}(k) &= \frac{E[u(t)\varepsilon(t-k, \hat{\theta})]}{\sqrt{E[u^2(t)]}E[\varepsilon^2(t, \hat{\theta})]} \\ &= 0, \quad \forall k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{\varepsilon(u)}(k) &= \frac{E[\varepsilon(t, \hat{\theta})\varepsilon(t-1-k, \hat{\theta})u(t-1-k)]}{\sqrt{E[\varepsilon^2(t, \hat{\theta})]}E[\varepsilon^2(t, \hat{\theta})u^2(t)]} \\ &= 0, \quad \forall k \end{aligned} \quad (15)$$

이 때 상관함수의 값이  $\pm 1.96/\sqrt{N}$ 의 범위에 있으면 예측오차는 95% 신뢰성을 갖고 백색 잡음이라 할 수 있으며, 따라서 추정모델은 신뢰성이 있다고 할 수 있다.

지금까지의 과정으로 적정 모델을 추정하지 못할 경우에는 이산 시간 모델의 time lag를 증가시켜 가면서 적정 모델이 추정될 때까지 반복 계산하여 모델을 결정하게 된다.

## 6. 모의 실험결과 및 검토

제안하는 모델링 방법의 타당성을 확인하기 위해 마찰력이 작용하는 시스템의 물리적 성질을 다음과 같이 적용하여 모의 실험을 실시하였다.

$$m = 1\text{kg}, \quad c = 30\text{Ns/m}, \quad k = 5 \times 10^3\text{N/m},$$

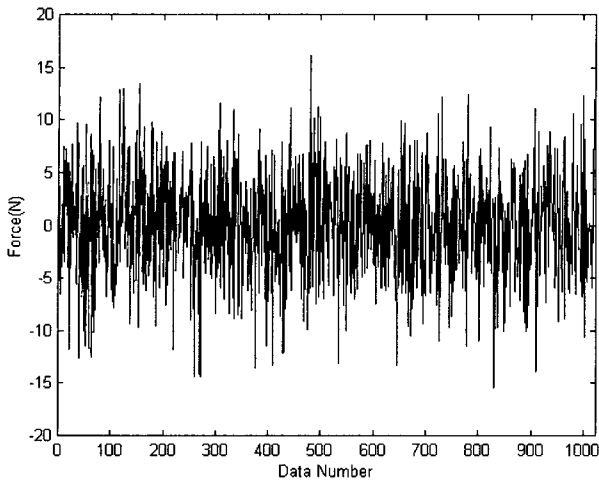


Fig. 1 Input force

$$F_c = 3 \text{ N}, F_s = 4.5 \text{ N}, v_s = 0.001 \text{ m/s}$$

여기서  $m$ 은 질량,  $c$ 는 감쇠계수,  $k$ 는 스프링계수  $F_c$ 는 클롱 마찰력,  $F_s$ 는 정지마찰력,  $v_s$ 는 Stribeck velocity 이다. 또 입력신호  $f(t)$ 는 추정해야할 모델계수의 수가 많을 경우를 고려하여 충분히 높은 차수의 persistent excitation 조건<sup>(9)</sup>을 만족하는 가우시안 백색잡음(Gaussian white noise)으로 하였으며, 이때 입력신호의 표준편차는 5N으로 하였고(Fig. 1), 샘플링 간격은  $\Delta t = 0.005 \text{ sec}$  이다.

제안 모델은 4th order Runge-Kutta 방법에 의한 결과 및 동일 조건에서 NARMAX 모델에 의해 모델링한 결과와 비교하였다.

### 6.1 제안모델

추정결과 제안모델에서 선정된 항들과 항들의 계수, 각 항의 ERR값 등은 Table 1에 나타내었다. 또한 제안모델에서 선정된 계수들로 추정한 시스템의 응답과 Runge-Kutta 방법으로 구한 응답을 비교한 결과는 Fig. 2에 나타내었고 추정한 결과의 상관관계가 신뢰성 구간 내에 있는지를 점검하는 결과는 Fig. 3에 나타내었다.

제안된 방법은 초기항의 수 8개로 시작하여 추정결과 7개의 항이 결정되었고 ERR의 합이 99.86387%였고, 1단계 전방 예측 에러(one step ahead prediction error)의 RPEL(Relative prediction error level)은 3.713958%이었다. 제안 모델의 경우 Table 1에서 볼 수 있듯이 선형항들과 초기에 설정했던 마찰항들만이 선정되어 마찰이 시스템의 응답에 얼마나 영향을 미치는지를 알 수 있다.

Fig. 2을 보면 제안모델을 이용하여 추정한 응답의 1단계 전방 예측값과 모의실험에서 구한 응답값을 비교한 결과

Table 1. Results of estimation (Proposed model)

	Term	Estimate	ERR
1	$y(t-1)$	0.12944E+01	0.92394E+02
2	$y(t-2)$	-0.37182E+00	0.37287E+01
3	$u(t)$	0.32307E-02	0.25513E+01
4	$u(t-1)$	0.19691E-02	0.88049E+00
5	$sgn(\dot{y})e^{-y^2}$	0.30021E+02	0.17914E+00
6	$sgn(\dot{y})$	-0.30012E+02	0.12122E+00
7	$\epsilon(t-1)$	0.26855E+00	0.92836E-02

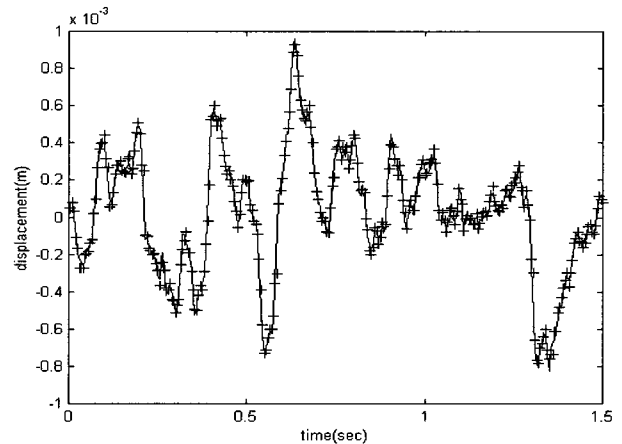


Fig. 2 Validation of the estimated model : one-step ahead prediction of the response signals (+ : proposed model, - : Runge-Kutta)

서로 잘 일치함을 볼 수 있으며 따라서 시간영역에서 제안 모델이 시스템을 잘 추정하고 있음을 알 수 있다.

또한, Fig. 3을 보면 입력과 잡음 신호와의 상관관계가 95% 신뢰성 구간 내에 있어 제안모델이 만족해야하는 조건을 잘 만족함을 볼 수 있으며 따라서 제안 모델이 시스템을 잘 추정함을 볼 수 있다.

### 6.2 NARMAX 모델

시스템의 특성을 NARMAX모델을 이용하여 추정한 결과 선정된 항들과 항들의 계수, 그리고 각항의 ERR값등을 Table 2에 나타내었다.

여기서 초기항의 수를 59개로 시작하였으며, 추정결과 15개의 항이 결정되었고 ERR의 합이 99.79221%였고, 1단계 전방 예측 에러의 RPEL은 4.559953%였다. Table 2에서 볼 수 있듯이 NARMAX 모델의 경우 term 5부터 9까지와 10부터 14까지의 항들이 생성되었는데 이 항들은 지수 함수인 마찰력을 근사적으로 표현하기 위해 생성된 것으로 생각된다. 그러나, 이 항들의 물리적인 의미를 설명하기에

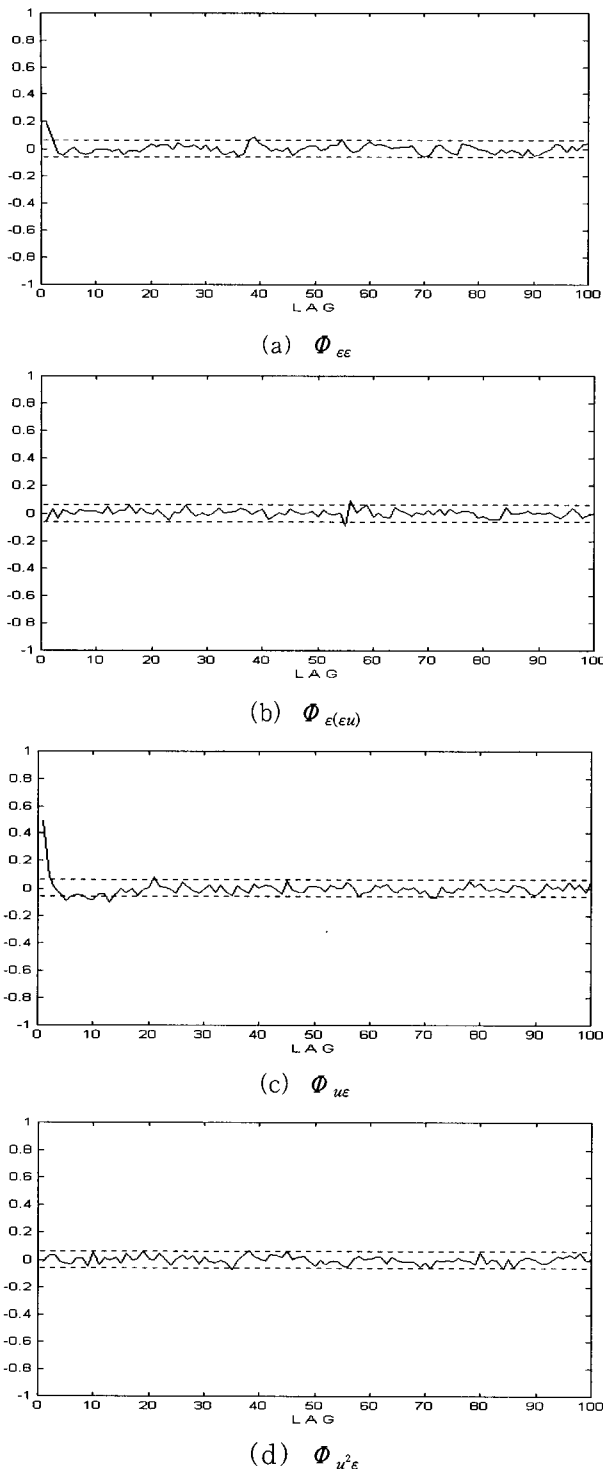


Fig. 3 Validation of the estimated model : The normalized auto and cross-correlation

는 매우 어려운 점이 있으며, 또한 초기항의 수가 많아 계산 과정이 매우 복잡하였다.

Table. 2 Results of estimation (NARMAX model)

	Term	Estimate	ERR
1	$y(t-1)$	0.13976E+01	0.92394E+02
2	$y(t-2)$	-0.45985E+00	0.37287E+01
3	$u(t)$	0.32468E-02	0.25513E+01
4	$u(t-1)$	0.12213E-02	0.88049E+00
5	$u^3(t-1)$	0.94888E-06	0.85079E-01
6	$y(t-2)u^2(t-1)$	-0.12724E-03	0.30677E-01
7	$u(t-1)u^2(t-2)$	-0.95124E-07	0.24802E-01
8	$y(t-1)u^2(t-1)$	0.80431E-04	0.19750E-01
9	$y(t-2)u(t-1)u(t-2)$	-0.34605E-03	0.12417E-01
10	$u(t-2)$	-0.64362E-03	0.97214E-02
11	$y(t-1)u(t-1)u(t-2)$	0.32850E-03	0.20517E-01
12	$u^3(t-2)$	0.52350E-06	0.87331E-02
13	$y(t-2)u^2(t-2)$	-0.34164E-04	0.99894E-02
14	$u^2(t)u(t-1)$	0.56194E-06	0.55195E-02
15	$\epsilon(t-1)$	0.24462E+00	0.10737E-01

## 7. 결론

본 연구에서는 stick slip 마찰이 있는 비선형 진동 시스템의 특성을 규명하기 위한 이산시간 모델의 모델링 방법을 제안하고, 수치해석적 방법인 Runge-Kutta계산법에 의한 결과와 기존에 널리 이용되는 모델링 방법인 NARMAX모델에 의한 결과와 비교하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) NARMAX 모델과 제안 모델 모두 허용할 수 있을 정도로 정확하게 응답을 예측하고 있었으나 ERR test, RPEL등에서 제안모델이 우수한 성능을 보였다.

(2) 비선형 함수의 형태를 미리 예측할 수 있으면 이에 상응하는 항을 미리 정하여 추정을 하므로 모델의 초기 항을 현저하게 줄일 수 있어서 기존의 방법보다 계산적 부담이 줄어든다.

(3) NARMAX 방법에서는 물리적 의미를 갖기 어려운 항들이 많이 생성되며 이런 경향은 가진력에 대한 마찰력의 비가 커져 비선형성이 강해질 경우에 더욱 심하게 나타날 것으로 예상되나 제안한 모델은 이러한 경향은 발생하지 않을 것이라 사료된다.

## 참고 문헌

- (1) 장홍석, 1998, "마찰보상기를 사용한 다축 서보 메카니즘의 정밀 추적제어기 설계", 중앙대학교 박사학위논문.
- (2) Harber, R., Unbehauen, H., 1990, "Structure

Identification of Nonlinear Dynamic Systems-A Survey on Input/Output Approaches", *Automatica*, Vol. 26, No. 4, pp. 651~677.

(3) Chen, Q., Tomlinson, G. R., 1996, "Parametric Identification of System With Dry Friction and Nonlinear Stiffness Using a Time Series Model", *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 118, pp. 252~263.

(4) C. Canudas de Wit, Olsson, H., Astrom, K.J., Lischinsky, P., 1995, "A New Model for Control of Systems with Friction", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 40, No. 3, pp. 419~425.

(5) Billings, S. A., and Voon, W. S. F., 1984, "Least Square Parameter Estimation Algorithms for Nonlinear systems", *Int. J. systems Sci.*, Vol. 15, No. 6, pp. 601~615.

(6) 이병립, 이재응, 2000, "비선형 강성 및 감쇠특성을 갖는 진동 시스템의 규명", *한국소음진동공학회지*, 제 10 권, 제 1 호, pp.144~152.

(7) Korenberg, M. J., Billings, S. A., Liu Y. P., and McIlroy, 1988, "Orthogonal Parameter Estimation Algorithm for Nonlinear Stochastic Systems", *Int. J. Control*, Vol. 48, No. 1, pp.193~210.

(8) Billings S. A., and Voon, W. S. F., 1986, "Correlation Based Model Validity Test for Nonlinear Models", *Int. J. Control*, Vol. 44, No.1, 235~244.

(9) Johansson, R., 1993, *System Modeling and Identification*, Prentice-Hall