

새로운 슬라이딩 평면을 이용한 강인한 최적 제어기 설계-다입력 계통인 경우

Robust Optimal Controller Design with Sliding Surfaces-Multi Input Case

박 승 규, 진 미 정, 곽 군 평
(Sung-Kyu Park, Mi-Jung Jin, and Gun-Pyong Kwak)

Abstract : In this paper, the novel sliding surfaces are proposed by defining the virtual states. These sliding surfaces have the nominal dynamics of the original system and make it possible that the Sliding Mode Control(SMC) technique is used with various types of controllers. Its design is based on the augmented system which has additional dynamics as many as input numbers. The reaching phase is eliminated by using the initial virtual states which make the initial sliding functions equal to zero.

Keywords : virtual states, sliding mode control, multi input

I. 서론

슬라이딩모드제어(Sliding Mode Control: SMC)는 파라미터 변동이나 모델링의 오차, 외란에 둔감한 강인제어기법으로서 이제까지 많은 연구결과와 실제 적용 예를 가지고 있지만[1] 근본적으로 도달기간(Reaching Phase)문제와 입력 떨림(Input Chattering)현상을 가지고 있다[2][3]. SMC의 특성중에 하나는 SMC계통의 동특성이 상태들의 선형결합 형태인 슬라이딩 평면에 의해서 좌우되기 때문에 슬라이딩 평면의 개수 즉 입력의 개수만큼 동특성의 차수가 줄어든다는 것이다. 이것은 SMC가 여러가지 모델기반 제어이론과 결합되어 사용되는 것을 어렵게 하며 성능 면에서 외란이 불확실성이 없는 경우의 다른 제어기법을 적용시킨 경우에 비해서 뒤질 수밖에 없다는 것을 나타낸다. 이것은 SMC의 보수성(conservatism)이라고 지적된 바 있다[5]. 이에 단일 입력 계통에 대해서 SMC의 이러한 보수성을 없애고 도달기간 문제를 해결하기 위한 논문이 발표되었으며[6], 본 논문에서는 다중입력인 경우에 대해서 이러한 문제들을 다루기로 한다. 우선 입력의 개수만큼 새로운 가상상태가 정의된다. 이 가상상태들은 다른 제어기법에 의해 제어되는 공칭계통의 가제어표준형을 기초로 구성되며, 얻어진 가상상태들을 비공칭계통에 포함시켜 차수가 증가된 계통을 구성하게 된다. 이 확장된 계통에 대한 새로운 슬라이딩 평면들이 구성되고, 새로운 슬라이딩 평면은 공칭제어기에 의해서 제어되는 원래 계통의 차수를 가진 공칭계통과 같은 동특성을 가짐이 증명된다. 이때 공칭제어기는 다양한 여러제어기법을 적용시킬 수 있게 됨으로써 SMC가 다른제어기법과 결합되어 사용될 수 있게 되는 것이다. 본 연구에서는 다중입력 계통에 대해서 공칭제어기를 최적제어기로 구성하여 최적제어기와

SMC가 결합된 형태를 갖도록 함으로써 불확실성이 존재하는 경우에도 불확실성이 존재하지 않는 최적제어 공칭계통과 같은 성능을 갖도록 하는 것을 가능하게 하였다. 이제까지 SMC에 최적제어 기법을 적용시킨 연구가 있지만[7] 근본적으로 원래 계통에 대한 최적제어를 행한 형태가 아니므로 본 연구의 결과와는 전혀 다르다는 것을 밝혀 둔다. 도달기간을 제거하는 문제는 가상상태의 초기치를 슬라이딩 평면의 초기값이 영으로 되도록 결정하여 줌으로써 간단히 해결된다.

II. 문제설정

다음과 같은 불확실성을 포함하는 다중입력을 갖는 n 차 계통을 고려한다.

$$\dot{\bar{x}}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t) + Df(t) \quad (1)$$

여기서 $x \in \mathbf{R}^n$ 은 상태, $u \in \mathbf{R}^m$ 은 입력, $f \in \mathbf{R}^1$ 은 노음유계를 가지는 외란이고, $\Delta A, \Delta B$ 와 외란행렬 D 는 다음의 정합조건(Matching Condition)을 만족한다.

$$\text{rank}([\mathbf{B} : \Delta \mathbf{A} : \Delta \mathbf{B} : \mathbf{D}]) = \text{rank} \mathbf{B} \quad (2)$$

정합조건을 만족시킨다는 것은 불확실성이 다음과 같이 표현될 수 있음을 의미한다.

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A}x(t) &= \mathbf{B} \Delta \mathbf{A}_1 x(t) \\ \Delta \mathbf{B}u(t) &= \mathbf{B} \Delta \mathbf{B}_1 u(t) \\ \mathbf{D}f(t) &= \mathbf{B} \mathbf{D}_1 f(t) \end{aligned} \quad (3)$$

(1)은 위의 정합조건에 의하여 다음과 같이 표현될 수 있다

$$\dot{\bar{x}}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}(u(t) + h(x, t)) \quad (4)$$

여기서 $h(x, t) = \Delta \mathbf{A}_1 x(t) + \Delta \mathbf{B}_1 u(t) + \mathbf{D}_1 f(t)$ 는 그 크기가 다음과 같이 제한되어 있다.

접수일자 : 1999. 8. 5., 수정완료 : 2000. 4. 4

박승규, 곽군평 · 창원대학교 전기공학과

진미정 : 창원대학교 산업공학과

※ 본 연구는 한국과학재단 지정 창원대학교 공작기계기술연구센터의 지원에 의한 것입니다.

$$\|h(x, t)\| \leq \rho(x, t) \quad (5)$$

기존의 슬라이딩 평면은 다음과 같이 정의된다[2].

$$S_i = \{x \mid S_i = C_i x(t) = 0\}, \quad (i = 0, \dots, m) \quad (6)$$

여기서 $C_i = [c_{i1}, \dots, c_{im}]$ 이고 c_{i1}, \dots, c_{im} 는 슬라이딩 모드의 동특성이 안정하도록 선택된다.

전체적인 슬라이딩 평면은 각각의 슬라이딩 평면의 교차평면으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$S_e = \{x \mid S = Cx(t) = 0\} = S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_m \quad (7)$$

n-차의 원래계통에 대해 위의 슬라이딩 평면은 (n-m)차의 동특성을 가진다. 도달평면 문제는 $x(t)$ 의 초기치가 슬라이딩 평면 위에 있지 않으면, 즉 $S(x)$ 의 초기치가 영이 아닌 경우에 생기는 문제이다. 슬라이딩 모드를 보장하는 조건은 다음과 같다[1].

$$S^T(x) \dot{S}(x) < 0 \quad (8)$$

\dot{S} 는 다음과 같이 계산된다.

$$\dot{S} = C \dot{x}(t) = CAx(t) + CBu(t) + CBh(t) \quad (9)$$

여기서 슬라이딩 모드 입력이 다음과 같이 구성된다고 하자.

$$u(t) = u_{eq} + u_n \quad (10)$$

여기서 u_{eq} 는 등가입력을 다음과 같이 결정한다

$$u_{eq} = -(CB)^{-1} CAx \quad (11)$$

등가입력을 대입하면 (9)은 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$\dot{S} = CBu_n(t) + CBh(t) \quad (12)$$

$S^T(x) \dot{S}(x)$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$S^T(x) \dot{S}(x) = S^T CBu_n(t) + S^T CBh(t) \quad (13)$$

여기서 비선형입력을 다음과 같이 결정한다.

$$u_n = -\frac{(CB)^{-1}S}{\|S\|} \gamma \rho(x, t) \quad (14)$$

여기서 CB 은 정칙행렬이며 γ 는 CB 의 최대 특이치를 나타낸다.

위의 입력을 대입하면 다음 식이 성립됨으로써 (8)의 조건이 성립함을 알 수 있다.

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{S^T S}{\|S\|} \gamma \rho(x, t) + S^T CBh(t) < 0 \quad (15)$$

그러므로 SMC입력 (10)은 슬라이딩모드를 보장한다.

본 논문에서 해결하고자 하는 문제는 다음과 같다.

- 다입력 계통에 대해서 불확실성이 존재하는 경우에도 공칭제어기에 의해서 제어되는 공칭시스템의 동특성을 갖도록 한다. 이것이 가능하려면 슬라이딩 평면의 동특성이 공칭제어기에 의해서 제어되는 공칭시스템과 같아야 된다

- 도달기간 문제를 해결한다.

III. 새로운 슬라이딩 평면을 가지는 SMC

새로운 슬라이딩 평면은 가상상태들을 가지는 차수가 증가된 계통을 기초로 하여 정의된다 가상상태들은 공칭 계통의 가제어 표준형으로부터 정의된다.

다음은 상태변환 $z = Px$ 에 의해 (1)으로부터 구해진 가제어 표준형이다. 여기서 P 는 가제어 표준형으로의 변환행렬이다.

$$\dot{z}(t) = A_c z(t) + B_c u(t) + B_c h(t) \quad (16)$$

여기서

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\alpha_{11} & -\alpha_{12} & \dots & \dots & \dots & -\alpha_{1(n-1)} & -\alpha_{1n} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\alpha_{21} & -\alpha_{22} & \dots & \dots & \dots & -\alpha_{2(n-1)} & -\alpha_{2n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\alpha_{m1} & -\alpha_{m2} & \dots & \dots & \dots & -\alpha_{m(n-1)} & -\alpha_{mn} & \dots \end{bmatrix} \begin{matrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{matrix}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{matrix}$$

새로이 정의될 가상상태는 공칭계통을 기초로 하여 정의되기 때문에 위의 계통에 대한 공칭계통을 살펴보면 다음과 같다.

$$\dot{z}_0(t) = A_c z_0(t) + B_c u_0(z_0, t) \quad (17)$$

여기서 $u_0(z_0, t)$ 는 공칭 제어입력으로 시간에 대한 미분이 가능하다고 가정한다.

가상의 상태를 정의하기 위한 예비단계로서 공칭가상상태를 다음과 같이 정의한다.

공칭가상상태 $\mathbf{z}_{ov} = \begin{bmatrix} z_{ov1} \\ z_{ov2} \\ \vdots \\ z_{ovm} \end{bmatrix}$ 는 (17)에서 입력 항이 존재

하는 상태방정식의 상태 $\begin{bmatrix} z_{\mu_1} \\ z_{\mu_2} \\ \vdots \\ z_{\mu_m} \end{bmatrix}$ 들의 미분으로 정의하

며 동특성은 다음과 같다.

$$\dot{\mathbf{z}}_{ov}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_3\mathbf{P} & \mathbf{A}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z}_{ov} \end{bmatrix} + \mathbf{g}(\mathbf{x}_o, t) \quad (18)$$

여기서

$\dot{\mathbf{u}}_o(\mathbf{x}_o, t)$ 는 다음과 같이 $\mathbf{g}(\mathbf{x}_o, t)$ 로 정의한다.

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_o, t) = \dot{\mathbf{u}}_o(\mathbf{x}_o, t) \quad (19)$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_{11} & -\alpha_{12} & \dots & -\alpha_{1(\mu-1)} & 0 & -\alpha_{1(\mu-1)} & \dots & -\alpha_{1(n-1)} \\ 0 & -\alpha_{21} & -\alpha_{22} & \dots & -\alpha_{2(\mu-1)} & 0 & -\alpha_{2(\mu+1)} & \dots & -\alpha_{2(n-1)} \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & -\alpha_{i1} & -\alpha_{i2} & \dots & -\alpha_{i(\mu-1)} & 0 & -\alpha_{i(\mu+1)} & \dots & -\alpha_{i(n-1)} \\ 0 & -\alpha_{m1} & -\alpha_{m2} & \dots & -\alpha_{m(\mu-1)} & 0 & -\alpha_{m(\mu+1)} & \dots & -\alpha_{m(n-1)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} -\alpha_{1\mu_1} & -\alpha_{1\mu_2} & \dots & -\alpha_{1\mu_{m-1}} & -\alpha_{1\mu_m} \\ -\alpha_{2\mu_1} & -\alpha_{2\mu_2} & \dots & -\alpha_{2\mu_{m-1}} & -\alpha_{2\mu_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -\alpha_{m\mu_1} & -\alpha_{m\mu_2} & \dots & -\alpha_{m\mu_{m-1}} & -\alpha_{m\mu_m} \\ -\alpha_{m\mu_1} & -\alpha_{m\mu_2} & \dots & -\alpha_{m\mu_{m-1}} & -\alpha_{m\mu_m} \end{bmatrix}$$

(19)과 같이 정의하는 이유는 공칭상태를 실제상태로 대체하여 공칭가상상태로부터 가상상태를 정의하게 되는 데 이 과정에서 불확실성의 개입을 없애기 위함이다.

이제 (18)에서 공칭 상태인 \mathbf{x}_o 를 실제상태 \mathbf{x} 로 대체함으로써 새로운 가상상태 \mathbf{z}_v 를 다음과 같이 정의한다.

$$\dot{\mathbf{z}}_v(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_3\mathbf{P} & \mathbf{A}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z}_v \end{bmatrix} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \quad (20)$$

이렇게 정의하는 이유는 다음에 새롭게 정의하게 되는 슬라이딩 평면을 정의하고 그 슬라이딩 평면이 공칭계통의 동특성을 갖도록 하기 위함이다.

새로운 슬라이딩 평면을 정의하기 위하여 새로운 가상상태를 가지고 차수가 증가된 계통을 다음과 같이 구성하였다.

$$\dot{\mathbf{x}}_c(t) = (\mathbf{A}_c + \Delta\mathbf{A}_c)\mathbf{x}_c(t) + (\mathbf{B}_c + \Delta\mathbf{B}_c)\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_c\mathbf{g}(\mathbf{x}_c, t) + \mathbf{D}_c\mathbf{f}(t) \quad (21)$$

여기서

$$\mathbf{x}_c(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z}_v \end{bmatrix}, \mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_3\mathbf{P} & \mathbf{A}_4 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{D}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\Delta\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \Delta\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

위의 차수가 증가된 계통에 대해 새로운 슬라이딩 평면을 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{S} = [\mathbf{C}_1\mathbf{P} \quad \mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z}_v \end{bmatrix} - \mathbf{u}_o(\mathbf{x}, t) = \mathbf{C}\mathbf{x}_c - \mathbf{u}_o(\mathbf{x}, t) \quad (22)$$

여기서

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1(n-1)} & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2(n-1)} & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{m(n-1)} & \alpha_{mn} \end{bmatrix}.$$

위와 같이 슬라이딩 평면을 정의하는 이유는 위에서도 언급하였듯이 새롭게 정의된 슬라이딩 평면의 동특성이 공칭계통의 동특성을 갖도록 하기 위함이며 이 사실은 정리 1의 증명에서 알 수 있다.

슬라이딩 평면이 위와 같이 정의될 때 다음의 정리를 얻을 수 있다.

정리 1 : 만약 계통(21)의 상태들이 새로운 슬라이딩 평면(22)위에 있다면, 계통(1)의 상태들은 계통(1)에 대한 공칭계통과 같은 동특성을 갖는다.

증명 · 만약 \mathbf{z}_e 가 새로운 슬라이딩 평면 위에 있다면 (22)에 의해 다음 방정식을 만족한다.

$$z_v(t) + \alpha_m z_m(t) + \alpha_{(m-1)} z_{(m-1)}(t) + \dots + \alpha_1 z_1(t) - u_o(\mathbf{x}, t) = 0$$

$$\text{for } i=1, \dots, m \quad (23)$$

(23)를 미분하면 다음 식을 얻어지며

$$\dot{z}_m(t) + \alpha_m \dot{z}_m(t) + \alpha_{(m-1)} \dot{z}_{(m-1)}(t) + \dots + \alpha_{i\mu_1} \dot{z}_{\mu_1}(t) + \dots + \alpha_1 \dot{z}_1(t) - \dot{u}_o(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (24)$$

(16)의 관계들로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\dot{z}_m(t) + \alpha_m \dot{z}_m(t) + \alpha_{(m-1)} z_m(t) + \dots + \alpha_{i\mu_1} \dot{z}_{\mu_1}(t) + \dots + \alpha_1 z_2(t) - \dot{u}_o(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (25)$$

(16)에서 이용되는 관계식은 다음과 같다.

$$z_2 = \dot{z}_1, \dots, z_{\mu_1} = z_{\mu_1-1}, z_{\mu_2} = z_{\mu_2}, \dots, z_{\mu_m} = \dot{z}_{m-1} \quad (26)$$

(20)에서 \mathbf{z}_v 는 다음의 동특성을 갖는다.

$$z_i(t) = -\alpha_1 z_1(t) - \dots - \alpha_{(m-1)} z_{(m-1)}(t) - \alpha_{\mu_1} z_{\mu_1}(t) - \dots - \alpha_{i(\mu-1)} z_{i(\mu-1)}(t) - \alpha_{i\mu_1} z_{\mu_1}(t) - \dots - \alpha_{i\mu_m} z_{\mu_m}(t) - \dots - \alpha_{i(n-1)} z_{i(n-1)}(t) + g_i(\mathbf{x}, t) \quad (27)$$

$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ 는 $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \dot{z}_{\mu_1}, \dot{z}_{\mu_2}, \dots, \dot{z}_{\mu_m}, t)$ 로 표현될 수 있고

$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ 는 $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z}_v, t)$ 로 표현될 수 있다. (24)과 (27)을 비교하면 다음과 같은 m개의 방정식이 얻어진다.

$$\alpha_{i\mu_1} \dot{z}_{\mu_1}(t) + \dots + \alpha_{i\mu_m} \dot{z}_{\mu_m}(t) + \alpha_{i(n-1)} z_{i(n-1)}(t) + g_i(\mathbf{x}, \dot{z}_{\mu_1}, \dot{z}_{\mu_2}, \dots, \dot{z}_{\mu_m}, t) = \alpha_{i\mu_1} z_{\mu_1}(t) + \dots + \alpha_{i\mu_m} z_{\mu_m}(t) + g_i(\mathbf{x}, \mathbf{z}_v, t) \quad (28)$$

위 식으로부터 다음의 관계가 얻어진다.

$$z_{\mu_i} = \dot{z}_{\mu_i} \quad (29)$$

다음 식은 (23)으로부터 얻어진다.

$$\dot{z}_n(t) = -\alpha_n z_n(t) - \alpha_{i(n-1)} z_{(n-1)}(t) - \dots - \alpha_1 z_1(t) + u_{eq}(x, t) \quad (30)$$

(26)과 (28)은 공칭가제어 표준형(16)과 같다.

이것은 상태 변환 \mathbf{P} 에 의해서 (1)의 공칭계통으로 변환될 수 있다. 그러므로 새로운 슬라이딩 평면 (32)에 있는 계통 (1)의 상태들은 공칭계통과 같은 동특성을 갖는다.

그러므로 차수가 증가된 계통의 상태들이 새로운 슬라이딩 평면에 있도록 하는 SMC입력을 구하면 원래계통의 상태들이 공칭계통의 궤적을 따르도록 할 수 있음을 알 수 있다.

본 논문의 연구가 SMC와 다른제어기법과의 결합을 가능하게 한다는 의미는 새로이 정의된 슬라이딩 함수를 살펴보면 알 수 있다. 슬라이딩 평면을 구성하는데 있어서 공칭계통을 기반으로 구성되는 공칭제어기는 여러 가지 제어기법을 이용하여 구성할 수 있으며 결국 슬라이딩 평면이 SMC 이외의 다른 제어기법에 의해서 구성된 공칭제어기에 의해서 제어되는 공칭계통의 동특성을 갖게 한다. SMC입력은 불확실성이 존재함에도 불구하고 슬라이딩 평면에 있게 하며 강인성을 보장하는 역할을 하게됨으로써 다른 제어기의 제어성능과 SMC의 강인성이 결합될 수 있는 것이다.

초기 가상상태를 다음과 같이 결정하면 $S(x, z_v)$ 의 초기값이 영으로 됨으로써 도달기간 문제를 제거하게 된다.

$$z_v(t_0) = -\mathbf{C}x_c(t_0) + \mathbf{u}_o(x(t_0), t_0) \quad (31)$$

이제 남은 문제는 다음조건을 만족시키는 SMC입력을 구하는 것이다.

$$S^T \dot{S} < 0 \quad (32)$$

\dot{S} 는 (22)을 미분함으로써 다음과 같이 계산된다.

$$S = C(A_c x_c(t) + B_c u(t) + B_c h(t) + B_d g(x_r, t)) - \frac{\partial u_o(x, t)}{\partial x_c} x_c - \frac{\partial u_o(x, t)}{\partial t} \\ = (C - \frac{\partial u_o(x, t)}{\partial x_c})(A_c x_c(t) + B_c u(t) + B_c h(t) + B_d g(x_r, t)) - \frac{\partial u_o(x, t)}{\partial t} \quad (33)$$

입력 $u = u_{eq} + u_n$ 의 형태로 결정하고 u_{eq} 는 다음과 같이 결정한다.

$$u_{eq} = ((C - \frac{\partial u_o}{\partial x_c})B_c)^{-1} ((C - \frac{\partial u_o}{\partial x_c})(-A_c x_c - B_c g(x_r, t)) + \frac{\partial u_o(x, t)}{\partial t}) \quad (34)$$

입력 $u = u_{eq} + u_n$ 를 대입하면 $S^T \dot{S}$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$S^T \dot{S} = S^T (C - \frac{\partial u_o(x, t)}{\partial x_c})(B_c u_n(t) + B_c h(t)) \quad (35)$$

u_n 을 다음과 같이 결정한다.

$$u_n = -\frac{((C - \frac{\partial u_o}{\partial x_c})B_c)^{-1} S}{\|S\|} \left\| (C - \frac{\partial u_o}{\partial x_c})B_c \right\|_{\infty} \rho \quad (36)$$

위의 u_n 을 (35)에 대입하면 다음 결과를 얻을 수 있다

$$S^T S = -\frac{S^T S}{\|S\|} \|C - \frac{\partial u_o(x, t)}{\partial x_c} B_c\|_{\infty} \rho + S^T (C - \frac{\partial u_o(x, t)}{\partial x_c}) B_c h(t) < 0 \quad (37)$$

그러므로 입력 $u = u_{eq} + u_n$ 는 슬라이딩 모드가 존재하도록 하는 입력임을 알 수 있다

공칭제어 입력 $u_o(x, t)$ 는 어떤 형태의 제어기든 사용 가능하며 이것은 SMC가 여러 가지 형태의 제어기와 결합되어 구성될 수 있음을 의미한다.

IV. 새로운 슬라이딩 모드 평면을 이용한 강인한 최적 제어

본 장에서는 파라미터 불확실성이 존재하더라도 상태들이 최적궤적을 따라 가도록 하는 강인한 최적 제어를 설계하기로 한다. 이것은 최적제어기와 SMC와의 결합을 의미하는 것이다.

계통 (1)의 공칭계통에 대한 평가함수가 다음과 같이 주어진다.

$$J = \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{2} (x_o^T Q x_o + r u^2) dt \quad (38)$$

공칭계통에 대한 최적제어 입력은 다음과 같다[4].

$$u_o(x_o) = -\frac{1}{r} B^T S x_o(t) = -K x_o(t) \quad (39)$$

여기서 S 는 다음의 대수 리카티방정식의 해이다.

$$-SA - A^T S - Q + \frac{1}{r} S B B^T S = 0 \quad (40)$$

$g(x)$ 는 다음과 같다. 이 과정에서 불확실성은 고려되지 않는다.

$$g(x) = -K(Ax - Bu_o(t)) = -K(Ax - BKx) = Lx \quad (41)$$

여기서 $L = -K(A - BK)$.

(20)에 따라서 가상상태 z_v 는 다음과 같이 정의된다.

$$\dot{z}_v(t) = [A_3 P \ A_4] \begin{bmatrix} x \\ z_v \end{bmatrix} + Lx(t) \quad (42)$$

차수가 증가된 계통은 다음과 같이 구성된다.

$$\dot{x}_o(t) = (A_o + \Delta A_o)x_o(t) + (B_o + \Delta B_o)u(t) + B_d Lx(t) + D_o f(t) \quad (43)$$

위의 계통에 대해 제안된 새로운 슬라이딩 평면은 다음과 같다.

$$S = Cx_c - Kx = (C - K_c)x_c \quad (44)$$

여기서 $K_c = [K \ 0]$.

(34)으로부터 슬라이딩 모드를 보장하는 입력이 다음과 같이 구해진다.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{eq} + \mathbf{u}_n \quad (45)$$

여기서

$$\mathbf{u}_{eq} = ((\mathbf{C} + \mathbf{K}_c)\mathbf{B}_c)^{-1}(\mathbf{C} + \mathbf{K}_c)(-\mathbf{A}_c \mathbf{x}_c - \mathbf{B}_d \mathbf{L} \mathbf{x}) \quad (46)$$

$$\mathbf{u}_n = -\frac{((\mathbf{C} + \mathbf{K}_c)\mathbf{B}_c)^{-1} \mathbf{S}}{\|\mathbf{S}\|} \gamma \rho \quad (47)$$

여기서 γ 는 $(\mathbf{C} + \mathbf{K}_c)\mathbf{B}_c$ 의 최대 특이치이다.

V. 예제 및 시뮬레이션 결과

다음과 같은 4차계통을 고려하자.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \Delta a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta a_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ 0 \\ 0 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

여기서 $|\Delta a_1| < 3, |\Delta a_2| < 3, f_1 < 0.5, f_4 < 0.5$

파라미터 불확실성 $\Delta a_1, \Delta a_2, f_1, f_4$ 는 시뮬레이션 상에서 각각 2.5, 2.5와 0.4, 0.4라고 가정하였다.

평가함수는 다음과 같이 주어진다.

$$J = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} (\mathbf{x}_c^T \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_c + \mathbf{u}_c^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_c) dt$$

최적상태이득은 다음과 같다.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3.29 & 4.9465 & -0.8540 & 0.8406 \\ 0.8406 & 3.1955 & 0.5202 & 2.1671 \end{bmatrix}$$

가제어 표준형으로 변환하는 행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SMC입력을 구성하는데 필요한 계산들은 다음과 같다.

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11.2653 & 9.0902 & -2.3724 & -1.1387 & 0 & 2 \\ 5.7260 & 8.5611 & 0.4095 & 3.2014 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3.2900 & 1.9465 & -0.8540 & -1.1594 & 1.0000 & 0 \\ 2.8406 & 3.1955 & 0.5202 & 2.1671 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_{eq} = \begin{bmatrix} -3.7393 & -5.8423 & 0.4477 & -1.9997 & 0.2225 & -0.4158 \\ 2.7846 & -0.2249 & -0.7758 & -1.7178 & 0.6313 & 0.5451 \end{bmatrix} \mathbf{x}_c$$

$$\mathbf{u}_n = 4.3939 \sqrt{(1.5x_1 + 0.4)^2 + (1.5x_4 + 0.4)^2} \begin{bmatrix} 0.2079 & 0.1112 \\ -0.2725 & 0.3156 \end{bmatrix} \mathbf{S} / \|\mathbf{S}\|$$

시뮬레이션 결과들은 다음과 같다. 그림 1에 나타난 상태궤적은 불확실성이 존재하지 않을 때의 최적궤적을 나타낸다. 그림 2는 불확실성이 존재하는 경우에 최적제어입력을 인가하였을 때의 상태궤적이다. 불확실성의 영향으로 말미암아 더 이상 최적궤적이 아님을 알 수 있다. 그림 3은 본 논문에서 제안한 새로운 SMC입력에 의한 상태궤적으로 불확실성이 존재함에도 불구하고 최적궤적을 나타냄을 알 수 있다. 이것은 본 논문에서의 이론전개가 논리적으로 올바름을 알 수 있게 해준다. 그림 4는 가상상태 \mathbf{z}_c 의 궤적이다. 그림 5-6은 SMC 입력이며 그림 7-8은 슬라이딩 함수 $\mathbf{S}(\mathbf{x}_c, t)$ 의 값이다.

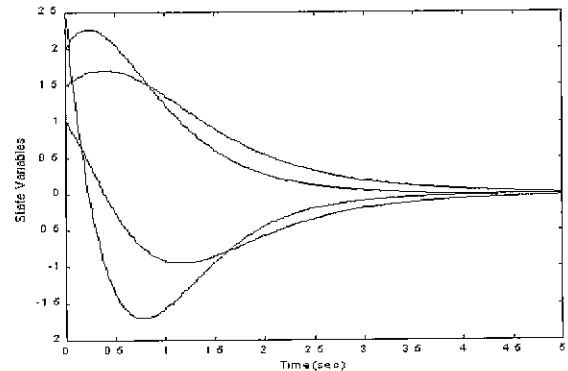


그림 1 불확실성이 존재하지 않는 최적제어기의 상태궤적.
Fig. 1. The state trajectories controlled by the optimal controller without uncertainties.

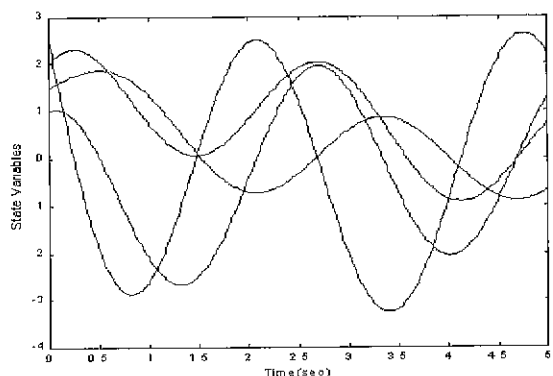


그림 2. 불확실성이 존재하는 최적제어기의 상태궤적.
Fig. 2. The state trajectories controlled by the optimal controller with uncertainties

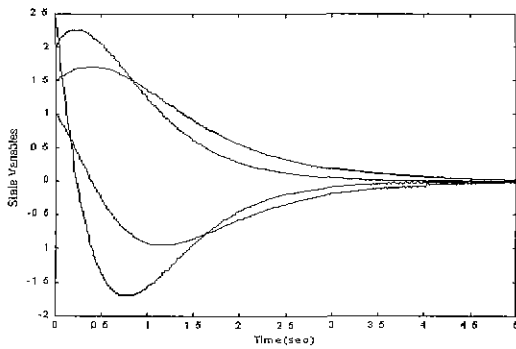


그림 3. 불확실성을 가지는 SMC의 상대궤적
Fig. 3. The state trajectories controlled by the new SMC with uncertainties.

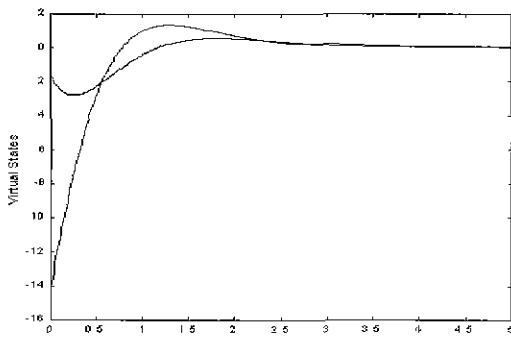


그림 4. 가상상태 z_v 의 궤적.
Fig. 4. The trajectories of virtual state z_v .

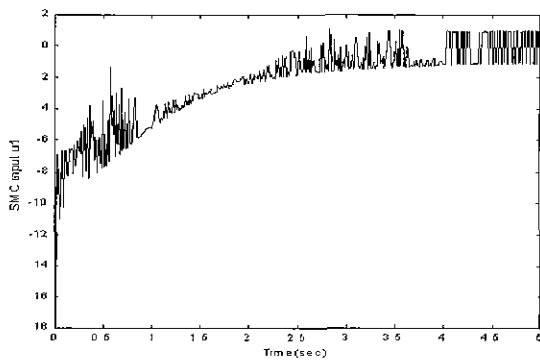


그림 5. SMC 입력 $u_1(t)$.
Fig. 5. The SMC input $u_1(t)$.

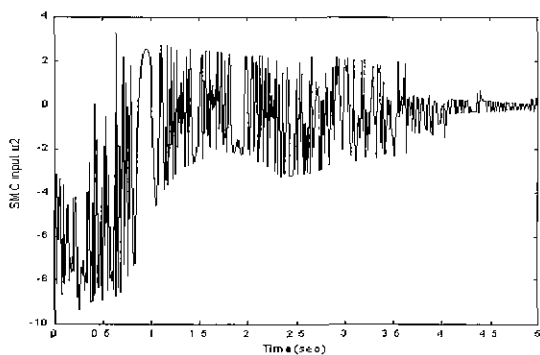


그림 6. SMC 입력 $u_2(t)$.
Fig. 6. The SMC input $u_2(t)$.

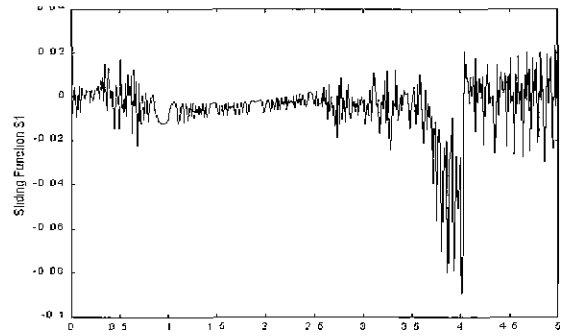


그림 7. 슬라이딩 함수 S_1 의 값.
Fig. 7. The value of sliding function S_1 .

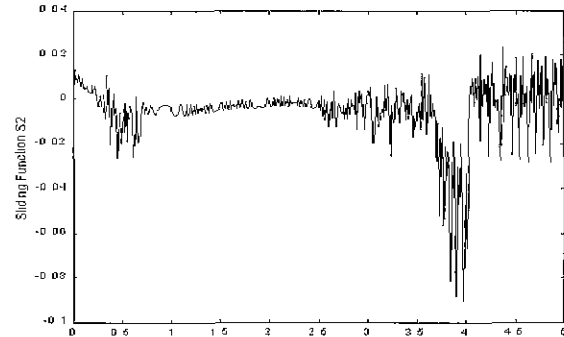


그림 8. 슬라이딩 함수 S_2 의 값.
Fig. 8. The value of sliding function S_2 .

VI. 결론

본 논문에서는 다중입력계통에 대한 새로운 슬라이딩 평면을 설계하는 방법이 제시되었다. 제안된 슬라이딩 평면을 사용한 새로운 SMC는 공칭제어기에 의해서 제어되는 공칭제어기의 성능을 가질 수 있도록 한다. 공칭제어기는 미분이 가능하다면 어떠한 형태의 제어기라도 가능하며 이것은 임의의 제어기법과 SMC의 강한 특성이 결합될 수 있다는 큰 의미를 지닌다. 도달기간 문제는 가상상태의 초기치를 적절히 선택함으로써 제거할 수 있다. 채터링완화는 본 논문의 결과에 기존의 연구결과를 그대로 적용시키면 해결되며 도달기간 문제가 없어짐으로써 상대적으로 기존의 결과보다 채터링 문제가 개선될 수 있다.

참고문헌

- [1] J. Y. Hung, W. Gao, and J. C. Hung, "Variable structure control: A survey", *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, vol. 40, no. 1, pp. 2-22, 1993.
- [2] V. I. Utkin, "Sliding modes and their application in variable structure systems" Moscow, Mir Publishers, 1978.
- [3] U. Itkis, "Control systems of variable structure" JOHNWILLY & SONS, New York, 1976.
- [4] D. E. Kirk, "Optimal control theory" Prentice-Hall, 1970.
- [5] S. K. Park and H. K. Ahn, "Robust controller design with novel sliding surface - linear optimal control case." *IEE Proceedings: Control Theory and*

Applications, vol. 146, no. 3, pp. 242-246, 1999.

- [6] 박승규, 안호균, "새로운 스위칭 평면을 이용한 강인한 최적제어기의 설계," 제어.자동화.시스템공학 논문지, 제5권, 제5호, pp. 505-510, 1999.

- [7] Tzuen-Lin Chern and Yung-Chun Wu, "An optimal variable structure control with integral compensation for electrohydraulic position servo control systems," *IEEE Trans. On Industrial Electronics*, vol. 39, no. 5, 1992.



박 승 규

1984년 고려대 전기공학과 졸업. 동대학원 석사(1986). 동대학원 박사(1990). 1990년~현재 창원대학교 전기공학과 교수. 관심분야는 강인제어, 적응제어.



진 미 정

1995년 창원대 산업공학과 졸업. 동대학원 전기공학석사(1999). 관심분야는 SMC, 견실제어.



곽 군 평

1982년 고려대학교 공대 전기공학과 졸업. 1985년 동대학원 졸업(석사). 1990년 공대 전기공학과(박사). 1990년~1997년 LG산전 제어기기연구소 책임연구원. 현재 창원대 전기공학과 조교수. 관심분야는 CNC제어, SMC.