

The Design of Loop-shaping Two-degree-of-freedom H_∞ Digital Controller for Sampled-data System

李相喆* · 朴鍾愚** · 曹燾鉉*** · 李鍾龍§ · 李相孝§§
 (Sang-Chuel Lee · Jong-Woo Park · Do-Hyun Cho · Jong-Yong Lee · Sang-Hyo Lee)

Abstract - In this paper, we propose a design procedure of loop-shaping two-degree-of-freedom H_∞ digital controller for sampled-data system. We extend the continuous time loop-shaping two-degree-of-freedom H_∞ control problem to sampled-data system. The configuration of generalized plant is modified for sampled-data system. And then, using continuous lifting, we obtain the digital controller. In the final stage of loop-shaping procedure, the problem of absorbing weighting functions is discussed. We summarize this study to the design procedure and illustrate the application for an inverted pendulum on the cart.

Key Words : Loop-shaping, Two-degree-of-freedom, Sampled-data system, Lifting, Inverted pendulum

1. 서 론

기준신호 추종문제에 초점을 맞춘 서보(servo)문제에 있어서는 2 자유도(two-degree-of-freedom, TDF) 제어구조가 적합한 것이 잘 알려져 있으며 [1], 실제 시스템과 수학 모델사이의 필연적인 모델오차에도 불구하고 실제 시스템이 잘 제어되도록 하는 강건 제어(robust control) 문제에서는 H_∞ 제어방법[2,3,4]이 널리 사용되고 있다. 연속시간(continuous time) 시스템에 대해서, 고전적인 루프정형(loop-shaping) 방법[5]에 H_∞ 제어문제를 접목시킨 McFalane과 Glover[6,7]의 방법을 2 자유도로 확장시킨 Limbeer[8]의 논문이 성과를 이루었다. 또한, Walker는 이 문제에 대한 제어기의 구조(structure)에 관한 문제를 언급하였다 [9].

한편, 최근 산업계에서는 마이크로 프로세서의 급격한 발달로 인하여, 제어대상을 제어하기 위한 제어기가 모두 디지털화 되어 있다. 디지털 제어기를 설계하는 방법으로는, 연속시간 제어대상에 대하여 연속시간 제어기를 설계한 후 그 제어기를 디지털 제어기로 변환시키는 방법과 제어대상을 이산화(discretization)하여 이산시간(discrete time) 영역에서 디지털 제어기를 설계하는 방법이 있다. 이러한 두 가지 방법은 연속-이산이 혼합된 시스템을 어느 한쪽 영역에서만 해석함으로써 몇 가지 단점을 가지고 있다. 최근에 들어 이들 단점을 극복하기 위해서, 제어대상은 연

속시스템 모델로 표현하고, 직접적으로 디지털 제어기를 설계하는 방법인 샘플치(sampled-data, SD) 시스템의 방법이 개발되어 활발한 연구가 진행되고 있다 [10-13]. 특히, 연속시간 성능 측도인 H_∞ 노름(norm)을 유지시키는 디지털 제어기를 설계하는 문제가 표준 H_∞ 문제로부터 확장되어 있다 [11,12]. 이 연구들에서, 샘플치 시스템을 표현하는 방법으로는 크게 이산상태와 연속상태를 모두 포함하는 점프(jump)를 갖는 상태 방정식 표현 방법[12]과 올림(lifting) 방법[10,11]이 널리 사용되고 있다. 다만, 루프정형 2 자유도 제어기 설계에 대한 샘플치 시스템의 방법은 아직 개발되어 있지 않다.

따라서, 본 논문에서는 연속시간 시스템의 2 자유도 H_∞ 제어기 설계문제를 샘플치 시스템의 2 자유도 H_∞ 디지털 제어기 설계문제로 확장시킴으로써, 서보문제에서 디지털 제어기를 직접 설계할 수 있는 방법을 제시한다. 설계 절차를 개발하기 위해서, 샘플치 시스템에 대한 H_∞ 제어 문제에 적합하도록 일반화 제어대상(generalized plant)의 구조를 수정하고, 연속 올림 기법을 적용하여 디지털 제어기를 얻는다. 루프정형 마지막 절차에서 제어기에 하중함수(weighting function)를 포함시켜야 최종 제어기를 얻을 수 있으나, 샘플치 시스템에서, 하중함수는 연속시간 시스템이고 제어기는 이산시간 시스템이므로, 하중함수의 이산화 문제를 고려한다. 독립진자 시스템에 대하여, 제시된 설계 절차에 따라 얻어진 제어기를 컴퓨터로 구현하여 식물실험을 통해 그 성능을 확인한다.

2. 루프정형 2 자유도 샘플치 제어 시스템의 강건 안정성과 강건 성능

2.1 루프정형 2 자유도 샘플치 제어 시스템의 구성

연속시간 루프정형 2 자유도 제어 시스템의 구성을 샘플치 시스템에 맞도록 변형하여, 그림 1과 같은 2 자유도 샘플치 제어시

* 正會員 : 才能大 電子通信學科 專任講師 · 工博
 ** 正會員 : 才能大 電子通信學科 教授 · 工博
 *** 正會員 : 仁德大 메카트로닉스學科 兼任講師 · 工博
 § 正會員 : 光云大 電算社會教育院 教授 · 工博
 §§ 正會員 : 光云大 制御計測學科 教授 · 工博
 接受日字 : 2000年 2月 10日
 最終完了 : 2000年 8月 14日

시스템을 제안한다.

그림 1에서, P는 제어대상, K_{1d} 와 K_{2d} 는 설계 해야할 디지털 제어기, W_1 과 W_2 는 루프정형을 위한 하중함수, S는 표본화기(sampler), H는 유지기(zero order hold), F_r , F_y 는 저역통과 여파기(low pass filter), 그리고 T_{ref} 는 모델 정합(model matching)을 위한 기준모델이다. 또한, r은 기준입력, u_s 는 루프 정형된 제어대상에 인가되는 입력, y_F 는 루프 정형된 제어대상에서 측정되는 출력이 저역통과 여파기를 통과한 신호이다. S는 아날로그 신호를 디지털 신호로 변환시키는 A/D 변환기의 수학적 모델로 볼 수 있으며, H는 디지털 신호를 아날로그 신호로 변환하는 D/A 변환기의 수학적 모델로 볼 수 있다. 표본화기 S의 안정도 해석[14]에서 S에 인가되는 신호는 반드시 저역통과 여파기를 거쳐야하므로 샘플치 시스템에서 일반화 제어대상에 F_r 과 F_y 를 포함시키는 것은 당연한 일이며, 실제로 산업계에서 A/D변환 전에 반-에일리어징(anti-aliasing) 여파기로 많이 사용된다. 이러한 구성은 연속 시간 루프정형 2 자유도 제어 시스템의 구성을 샘플치 시스템에 맞도록 변형한 것이다.

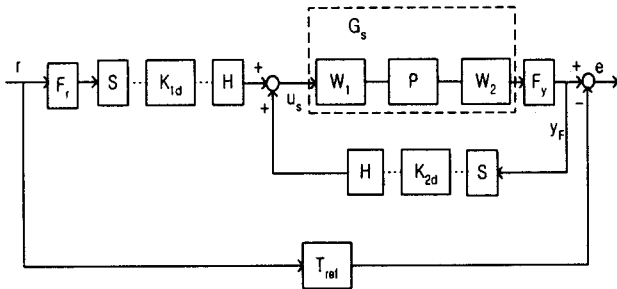


그림 1 샘플치 루프정형 2 자유도 제어 시스템 구성
Fig. 1 Configuration of two-degree-of-freedom loop-shaping Sampled-data control system

그림 1의 구조를 갖는 샘플치 시스템은 시변(time varying) 시스템이 되므로 해석과 설계가 용이하지 않다. 따라서, 기존에는 아날로그 제어기를 구한 후에 그 아날로그 제어기와 SK_dH 가 동가가 되게 하는 디지털 제어기 K_d 로 이산화 시키는 방법을 많이 사용해 왔었다. 이 방법은 표본화 주기(sampling period)가 매우 작다면 연속시간 시스템의 성능과 같게되나, 실제 디지털 제어기의 구현 시, 표본화 주기의 결정에는 많은 제약이 따른다. 따라서, 이러한 근사화 방법은 실제 구현된 제어 시스템이 설계에서 고려된 연속시간 제어 시스템의 성능을 약화시키거나 심지어는 불안정해지는 단점이 있다. 다른 대안으로의 기존 방법으로는, S와 H를 제어대상에 포함시키고, w와 z에 각각 가상의 H와 S를 포함시킴으로써 제어대상을 이산화 하여, 이산시간 영역에서 디지털 제어기를 설계하는 방법이 사용된다. 이 방법은 표본화 순간에는 실제 시스템인 아날로그 성능과 일치하지만, 표본화 순간 이외의 시점에서는 그 성능을 보장 할 수 없게된다. 이러한 기존 방법의 단점을 극복하기 위해서, 최근에, 근사화 방법이 아닌, 제어대상을 연속시간 시스템과 동가의 이산시간 시스템으로 변환시키는 연속 올림(continuous lifting) 기법에 의한 샘플치 시스템 H_∞ 방법이 개발되었다 [11].

본 논문에서는, 그림 1의 구성에 대해, 동가의 연속시간 제어기를 고려하여, 강건 안정성과 모델정합 측면에서의 강건 성능을 만족하는 제어기를 구하는 문제를 H_∞ 문제로 바꾸어 그 해를 구한다. 그 다음으로, 그러한 연속시간 제어기의 성능을 발휘하는

이산시간 제어기를 구하기 위하여, 연속 올림 기법을 이용한다.

2.2 샘플치 시스템 2 자유도 제어 시스템의 강건 안정성과 강건 성능

불확실성(uncertainty)을 모델 식에 적극적으로 반영하는 방법 중에서, 비구조적 불확실성 표현방법에는 가법(additive) 불확실성, 승법(multiplicative) 불확실성, 좌기약(left coprime factor) 불확실성 등으로 표현하는 방법이 있으며, 이 중에서, 좌기약 불확실성 표현을 사용하면 몇 가지 장점이 있다 [7]. 따라서, 그림 1에서 루프 정형된 제어대상 $G_s = W_2PW_1$ 의 불확실성을 식(1)과 같은 좌기약 분해의 형태로 고려한다.

$$G_s = (M - \Delta_M)^{-1}(N + \Delta_N) \quad (1)$$

여기서, (M, N)은 G_s 의 공칭모델(nominal model)에 대한 정규화(normalized) 좌기약 분해이고, $\Delta = [\Delta_N, \Delta_M]$ 는 좌기약 분해로 표현된 시스템의 불확실성이다. 식(1)에 대한 블록 선도는 그림 2와 같다.

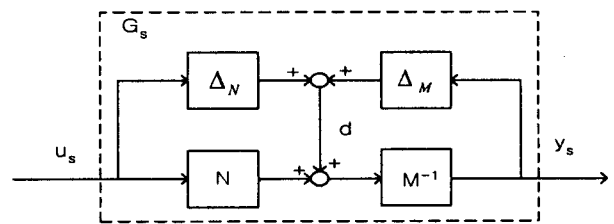


그림 2 루프 정형된 제어대상의 좌기약 불확실성 표현
Fig. 2 Left coprime factor uncertainty of loop shaped plant

그림 2에서 d는 불확실성이 공칭 모델에 영향을 주는 하나의 외란(disturbance)으로 간주한다.

식(1)로 표현되는 불확실성을 갖는 제어대상에 대하여, 그림 1의 제어 시스템을 해석하기 위해서, 먼저 S, H 및 이산화 제어기가 연결된 시스템을 동가 연속시간 제어기로 고려한다. 이렇게 함으로써, 그림 1로 제시된 샘플치 2자유도 제어 시스템에 대하여, 연속시간 시스템의 강건 안정성 및 강건성능 해석방법을 적용할 수 있다. 그림 1로 제시된 샘플치 2 자유도 제어 시스템에 대한 해석은 다음과 같다. 즉, $K_1 = HK_{1d}S$ 및 $K_2 = HK_{2d}S$. 그리고, 식(2)의 강건 모델 정합을 정의한다 [8].

$$\|(I - G_s K_2 F_y)^{-1} G_s K_1 F_r - T_{ref}\|_\infty \leq \gamma \quad (2)$$

여기서, I는 단위행렬(identity matrix)이고, γ 는 양의 실수이다.

식(2)는 식(3)과 같은 선형 분수 변환(linear fractional transformation, LFT)으로 나타낼 수 있다.

$$\|LFT(T, \Delta)\|_\infty < \gamma \quad (3)$$

여기서, $T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$ 이고, $LFT(T, \Delta)$ 는 식(4)와 같다.

$$LFT(T, \Delta) = T_{11} + T_{12} \Delta (I - T_{22} \Delta)^{-1} T_{21} \quad (4)$$

이때, 그림 1과 2로부터, 불확실성 부분 $\Delta = [\Delta_N, \Delta_M]$ 를 분리한 후, 각각의 전달함수를 구하면, T_{11} 은 $d=0$ 일 때, r에서 e까지의 전달함수로서, 식(5)와 같다.

[10,13]을 적용하면, 식(12)에서 표현된 올림 시스템 G 는 식(13)과 같이 표현된다.

$$G = \begin{bmatrix} A_d & B_1 & B_{2d} \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

여기서, $A_d = e^{Ah}$, $B_{2d} = \int_0^h e^{-\tau A} d\tau B_2$ 및 h 는 표본화 주기로서, 일반적인 이산화 과정을 통해 쉽게 얻을 수 있다. 다만, 연속 올림에 의한 밀집 그어진 부분이 문제이다. 특히 D_{11} 은 무한차원 행렬이 된다. 이 시스템은 올림을 하지 않은 연속시간 시스템과 H_∞ 노름(엄밀히 말하면 L_2 유도된(induced) 노름)이 같다. 기존 방법의 제어대상 이산화 방법이나, 제어기 이산화 방법에서는 연속시간 시스템의 근사화 접근법이므로, 연속시간 시스템의 H_∞ 노름을 유지하지 못한다. 이러한 측면에서, 무한차원으로 이산화 시킨 올림 샘플치 시스템은 연속시간의 근사화가 아닌 등가 시스템이라고 볼 수 있다. 연속과 이산이 혼재된 샘플치 시스템은 유한차원의 시변 시스템이지만, 올림의 등가 시스템은 시불변(time invariant)이 된다. 다만, 입출력 공간의 차수가 무한대라는 어려움이 있다. 그러나, 상태공간은 여전히 유한차원이므로, 이 문제는 연속 올림이 노름을 유지한다는 특성을 이용하여 Bamieh와 Pearson [11]에 의해 해결되었고, Chen과 Francis [13]에 의해 개선되었다. 이는, 식(12)와 등가의 시스템 이면서 유한차원을 갖는 시불변 시스템인 식(14)를 얻는다.

따라서, 제어기 설계시 식(12)를 직접 이용하는 대신에 이와 등가인 식(14)의 이산화 시스템 제어대상 G_{eq} 를 제어대상으로 이용한다.

$$G_{eq} = \begin{bmatrix} A_{dd} & B_{1d} & B_{2dd} \\ C_{1d} & 0 & D_{12d} \\ C_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

여기서, A_{dd} , B_{1d} , B_{2dd} , C_{1d} , D_{12d} 를 구하는 구체적인 방법은 참고문헌[13]을 참조한다.

일단 식(14)의 제어대상이 구해지면, 잘 알려진 표준 이산시간 H_∞ 제어방법[16,17]에 따라 디지털 제어기 K_d 를 얻을 수 있다. 다만, 연속시간 루프정형 H_∞ 제어기 설계절차에 따르면, 최종 제어기 구현을 위해서는 루프정형을 위한 하중함수 W_1 과 W_2 를 얻어진 제어기 K_d 에 포함시켜야 한다. 그러나, 본 논문에서 루프정형 2 자유도 H_∞ 제어기 설계에 SD기법을 이용하는데 당면한 문제로서, 샘플치 시스템 구조에서는, 연속시간 루프정형과는 달리 바로 연결할 수 없으므로 다음과 같이 문제를 해결한다.

그림 1로부터 그림 4와 같은 구성을 고려한다.

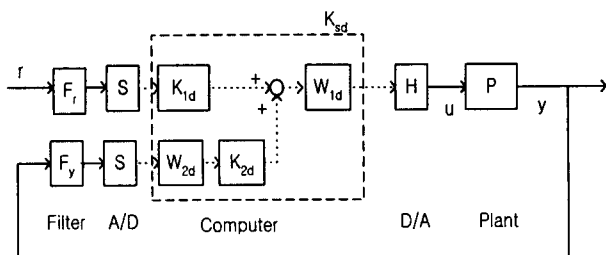


그림 4 루프정형 2 자유도 샘플치 제어기 구현
Fig. 4 Implementation of TDF loop-shaping sampled-data controller

그림 1과 비교해서, 식(15)를 만족하는 W_{1d} 을 구하는 문제를 고려해야 한다.

$$W_1 H = H W_{1d} \quad (15)$$

$HS \neq I$ 이지만, $SH = I$ 이므로 [13], 식(15)의 양변에 S 를 좌측 곱하면, 식(16)과 같다.

$$W_{1d} = S W_1 H \quad (16)$$

식(16)은 연속시간 하중함수 W_1 에 대해 잘 알려진 이산화 방법으로 소위 계단 불변 변환(step-invariant transformation)이라고 불리운다. 따라서, W_{1d} 는 쉽게 구할 수 있다. 그러나, W_{2d} 를 구하는 문제는 그리 쉽지 않다. 다만, 루프정형의 많은 응용에 있어서, 대부분의 주파수 하중을 W_1 에 두고, W_2 는 생략되거나 혹은, 단순히 상수하중을 갖는 경우가 많기 때문에, 본 논문에서는 W_2 를 상수값으로 제한함으로써, 샘플치 시스템에 대한 루프정형 제어기에 루프정형을 위한 하중함수를 포함시키는 문제를 해결하였다.

다음절에서는, 지금까지의 논의를 정리하여 제어기 설계절차를 제시한다.

4. 샘플치 시스템에 대한 루프정형 2 자유도 H_∞ 디지털 제어기 설계절차

본 논문에서 제시하는 설계절차는, 기존의 루프정형을 이용한 제어기 설계에 폭넓게 적용될 수 있다. 제어기 구현을 제외한 모든 분석과 설계는 컴퓨터 상에서 MATLAB 소프트웨어[17]를 이용한다고 가정한다. 설계절차는 다음과 같다.

- 단계 1 : 주어진 제어대상에 대하여 분석하고, 그림1의 제어구조에 따라, 전체 제어시스템의 성능명세를 설정한다.
- 단계 2 : 설정된 성능명세를 만족하도록 루프정형을 수행한다. 이때 루프정형을 위한 하중함수 W_1 과 W_2 를 결정함에 있어서, W_2 는 상수하중으로 제한한다.
- 단계 3 : 또한, 성능명세를 고려하여 기준모델 T_{ref} 를 설정하고, 표본화 주기 h 와 저역 통과 여파기 F_r , F_y 를 설정하여, 본 논문에서 유도된 식(12)의 일반화 제어대상 G 를 구한다.
- 단계 4 : G 와 등가인 이산시간 제어대상 G_{eq} 를 계산한다. 여기서 G_{eq} 를 계산하는 과정이 다소 복잡하며, MATLAB으로 제공되는 ToolBox 명령어는 없다. 따라서, 기본적인 명령어 (예 : matrix exponential 명령어인 expm 등)만을 이용하여 참고문헌 [13]의 알고리즘을 구현하였다.
- 단계 5 : 표준 이산시간 H_∞ 설계 방법에 따라, G_{eq} 에 대해서 디지털 제어기 K_d 를 설계한다. 이때, γ 설정은 γ -반복법을 사용하지 않고, 참고문헌[8]의 방법을 따른다. 다만, SD 구조를 갖는 제어기 설계에서 식(13)의 D_{11} 노름보다 큰지를 검토해 본다. 즉, 다음식이 만족하도록 γ 를 설정하여야 한다. $\gamma > \|D_{11}\|$.

단계 6 : 하중함수 W_1 을 계단불변 이산화하여 그림 4에서의 최종 제어기 K 를 구한다.

단계 7 : 얻어진 제어기에 대해서, 모의실험(simulation)을 통해

설정된 성능명세를 만족하는지 확인한다. 만족하지 못하는 경우는 단계 1로 돌아가서 과정을 반복한다.

단계 8 : 최종적으로 마이크로 프로세서가 포함된 제어 기판(board) 등에 설계된 디지털 제어기를 구현한다.

이상의 내용으로 설계하려면 상당히 많은 계산이 이루어져야 하며, 컴퓨터의 이용은 필수라고 할 수 있다. 현재, 제어분야에서 많이 사용되는 설계도구로는 MATLAB 소프트웨어가 있다. 본 논문에서 제시한 설계절차를 MATLAB으로 이용하면 매우 편리하지만, 그래도 많은 부분은 프로그래밍을 해야 한다. 특히, 샘플치 시스템 H_∞ 제어기 설계 부분에서, Bamieh와 Pearson 방법[11]으로 제공되는 명령어도 있으나, 이는 $D_{12}=0$ 이라고 가정하고 있으므로, 본 논문의 설계절차에 이용할 수 없다. $D_{12} \neq 0$ 인 문제는 Chen과 Francis가 지수행렬을 이용하여 풀이하였다. 그러나, Chen과 Francis의 방법은 아직 MATLAB 명령으로 제공되지 않는다. 따라서, 본 논문의 예제풀이에서는 기본 명령만을 이용하여 연속 올림에 의한 샘플치 H_∞ 제어기를 구하는 MATLAB 명령을 새롭게 작성하였다. 다음절에서는 제시된 설계절차에 따라 독립진자 시스템에 대해서 샘플치 시스템 2 자유도 H_∞ 제어기를 설계하고 모의실험 및 실험실험을 수행하여 그 성능을 확인한다.

5. 독립진자 시스템에 대한 2 자유도 루프정형 H_∞ 샘플치 제어기 설계

다음 식(17)로 표현되는 독립진자 시스템을 고려한다 [18-20].

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3.04 & -15.14 & 0 \\ 0 & 31.58 & 37.22 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3.39 \\ -8.33 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned} \quad (17)$$

여기서, $x = [p \ \theta \ \dot{p} \ \dot{\theta}]^T$ 이고, p 는 수레의 위치, θ 는 진자 각도이다. 또한, u 는 수레를 구동하는 전동기의 단자전압이다.

이 시스템의 독립진자를 안정화 하면서 수레 위치를 원하는 위치로 따라가도록 하는 것이 제어 목적이다. 자세한 명세는 참고문헌 [9]의 예제를 참고로 하여 본 논문의 제어대상에 맞도록 수정하였다. 이러한 명세에 따라, 수레 위치에 대한 기준모델 T_{ref} 는 식(18)과 같이 설정하였다.

$$T_{ref} = \frac{4}{s^2 + 2.36s + 4} \quad (18)$$

하중함수 W_2 의 설정은, 본 논문의 설계절차에서 상수하중으로 제한을 두었으므로, 상수하중으로 설정 한다. 이때, W_2 는 출력신호에 대한 하중으로, 설계명세에서 중요성이 제일 높은 안정성에 관련 하여, 독립진자 각도에 관한 출력이 수레 위치에 비해 2배 정도의 비중을 갖도록 설정하였다. 또한, W_1 의 설정에 있어서, 독립진자 시스템에 이미 적분기가 포함되어 있으므로 W_1 도 역시 상수하중으로 설정할 수 있다 [9]. 다만, 본 논문에서는 제어기의 대역폭을 줄이기 위해서 2 [rad/sec]에 극점을 첨가하였고, 절점 주파수에서의

roll-off가 작게 되기 위해서 10[rad/sec]에 영점을 첨가하였다. W_1 의 직류 이득은 특이치(singular values)의 절점 주파수(crossover frequency)가 22.5 [rad/sec]근방에 오도록 조정하였다. 결과적으로 얻어진 W_1 과 W_2 는 식(19)와 같다.

$$\begin{aligned} W_1 &= \left[\frac{19(s/10+1)}{(s/2+1)} \quad \frac{190(s/10+1)}{(s/2+1)} \right] \\ W_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

식(19)로 주어지는 하중함수에 의해 정형된 루프형태는 그림 5와 같다.

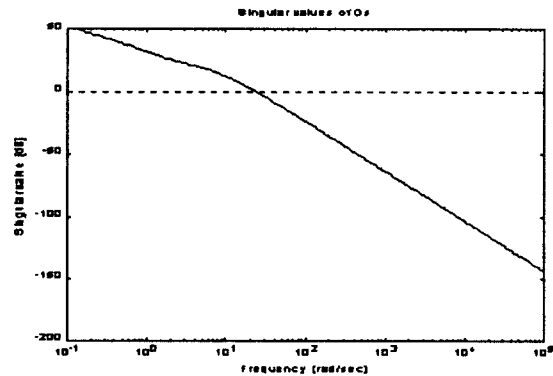


그림 5 정형된 제어대상의 최대 특이치 선도
Fig. 5 Singular value plot of shaped plant

표본화 주기는 $h=0.01$ [sec]로 설정하고, 저역통과 여파기 F_r , F_y 는 식(20)과 같다.

$$F_r = \frac{314.16}{s + 314.16}, \quad F_y = \frac{314.16}{s + 314.16} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

이러한 설정으로, 제시된 설계절차에 의해 얻어진 디지털 제어기는 11차 시스템으로, 그 전달함수는 식(21)과 같다. 이는 10차의 일반화 제어대상에서 10차의 H_∞ 제어기를 얻은 후 1차 지상 여파기 두 개로 이루어진 하중함수 W_{1d} 를 포함시킴으로써, 12차의 제어기를 얻고 최소실험에 의해 1차가 축소된 것이다. 이때, $\|D_{11}\| = 1.12$ 이고, $\gamma = 5.635$ 이다.

$$\begin{aligned} u &= K_{sd} \begin{bmatrix} r \\ p \\ \theta \end{bmatrix} \\ K_{sd} &= [K_{1d} \quad K_{2d}] \\ K_{1d} &= K_{sd1}, \quad K_{2d} = [K_{sd2} \quad K_{sd3}] \end{aligned} \quad (21)$$

여기서,

$$\begin{aligned} K_{sd1} &= \frac{-13.53z^{11} + 87.24z^{10} - 241.7z^9 + 373.4113z^8 - 348.2936z^7 + 197.2712z^6 - 63.8423z^5 + 9.7737z^4 - 0.3248z^3 + 0.0003z^2 + 9.7 \times 10^{-12}z - 1.1 \times 10^{-18}}{z^{11} - 6.25z^{10} + 16.64z^9 - 24.3697z^8 + 21.21z^7 - 10.9834z^6 + 3.1555z^5 - 0.4093z^4 + 0.01z^3 - 7.61 \times 10^{-6}z^2 + 9.7 \times 10^{-12}z - 1.12 \times 10^{-16}} \end{aligned}$$

$$K_{sdc} = \frac{53.94z^{11} - 347.3z^{10} + 960.3z^9 - 1480.9z^8 + 1379.5z^7 - 781.1z^6 + 253.3z^5 - 39.2z^4 + 1.39z^3 - 1.20 \times 10^{-2}z^2 - 2.47 \times 10^{-3}z + 2.16 \times 10^{-15}}{z^{11} - 6.25z^{10} + 16.64z^9 - 24.37z^8 + 21.21z^7 - 10.9834z^6 + 3.16z^5 - 0.41z^4 + 0.01z^3 - 7.61 \times 10^{-6}z^2 + 9.70 \times 10^{-12}z - 1.12 \times 10^{-18}}$$

$$K_{sds} = \frac{255.0z^{11} - 1681.1z^{10} + 4758.8z^9 - 7510.0z^8 + 7154.0z^7 - 4137.6z^6 + 1367.5z^5 - 214.1z^4 + 7.4028z^3 - 6.37 \times 10^{-3}z^2 + 6.51 \times 10^{-9}z + 6.07 \times 10^{-19}}{z^{11} - 6.25z^{10} + 16.63z^9 - 24.37z^8 + 21.21z^7 - 10.98z^6 + 3.16z^5 - 0.41z^4 + 0.01z^3 - 7.61 \times 10^{-6}z^2 + 9.70 \times 10^{-12}z - 1.12 \times 10^{-18}}$$

도립진자를 안정화 하면서, 수레위치를 원하는 위치로 이동시키는 제어목적에 따라, 진자각도 0°에, 수레위치 0[m]를 유지하다가 5초후에 수레위치가 0.2[m] 이동하는 실험상황을 설정하였다. 이러한 실험상황에 대하여, 식(21)로 주어진 제어기에 의한 실험실험 응답은 그림 6과 같다. 비교를 위해, 기존의 연속시간 설계절차를 따라 얻어진 제어기의 쌍선형 변환된 디지털 제어기의 응답을 그림 7에 나타내었다.

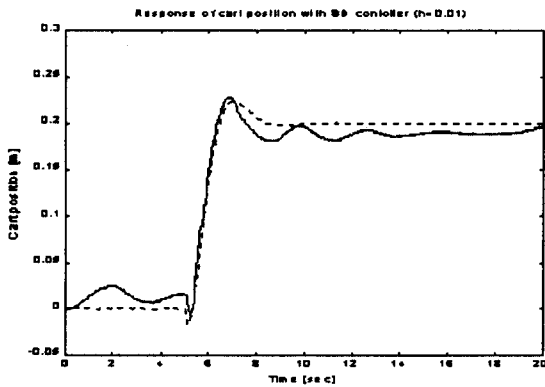


그림 6 샘플치 제어기의 수레 위치 응답 (h=0.01)
Fig. 6 Response of cart position with sampled-data controller (h=0.01)

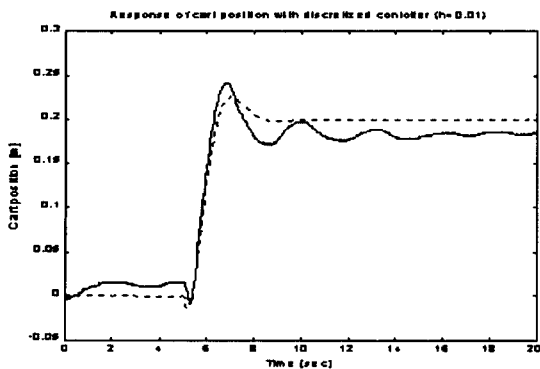


그림 7 이산화 제어기의 수레 위치 응답 (h=0.01)
Fig. 7 Response of cart position with discretized controller (h=0.01)

그림 6과 그림 7에서, 점선은 도립진자 시스템의 비선형 모델

을 이용하여 실제 실험상황에 맞도록 SIMULINK[21] 모델을 개발하고, 이를 통하여 모의실험한 응답이다. 전체적으로 모의실험 결과와 유사한 경향을 보여주고 있다. h=0.01의 경우에 대한 위의 실험결과는 표본화 주기가 비교적 빠른 경우 이므로 샘플치 제어기와 연속 제어기의 이산화 제어기 성능에 별 차이를 발견할 수 없다.

표본화 주기에 따른 샘플치 제어기의 우수성을 확인하기 위해서, 표본화 주기를 h=0.05로 하고 이외의 조건은 앞의 실험상황과 똑같이 설정한 경우의 모의실험 및 실험실험을 수행하였다. h=0.05인 경우에 샘플치 제어기에 대하여 얻어진 실험실험 결과는 그림 8과 같다. 비교를 위해, 이산화 제어기의 응답을 그림 9에 나타내었다.

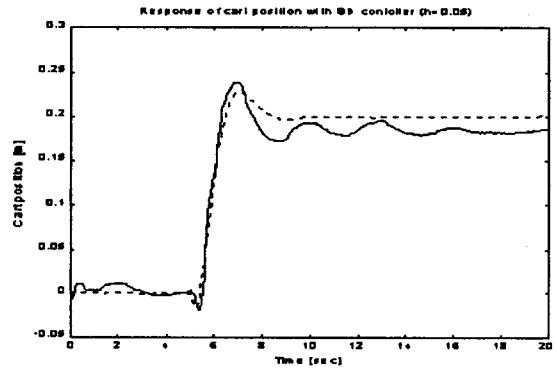


그림 8 샘플치 제어기의 수레 위치 응답(h=0.05)
Fig. 8 Response of cart position with sampled-data controller (h=0.05)

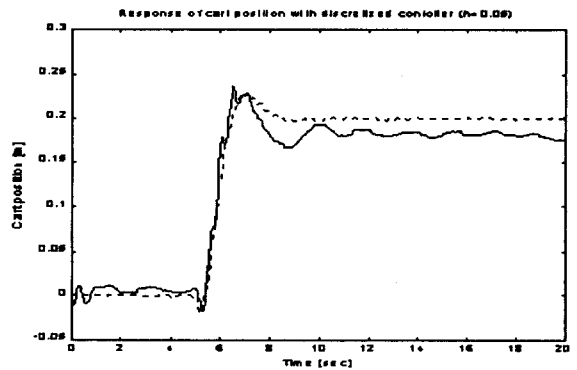


그림 9 이산화 제어기의 수레 위치 응답(h=0.05)
Fig. 9 Response of cart position with discretized controller (h=0.05)

그림 8에서, 다소 느린 표본화 주기에 대해서도, 샘플치 제어기의 성능은 큰 변화가 없음을 보여준다. 반면에, 그림 9의 이산화 제어기는 그 성능악화가 뚜렷이 나타나고 있다. 표본화 주기가 h=0.1인 경우 본 논문에 자료를 제시하지는 않았으나, 모의실험만을 수행하였으며, 이때 이산화 제어기는 불안정해지는 반면에 샘플치 제어기는 계속 안정화 되면서 최소한의 성능을 유지하는 것을 알 수 있었다.

다음으로, 진자 길이/질량 변화를 고려한다. 선행실험에서의 매개변수 값을 갖는 진자를 공칭모델로 하여 진자 #1로 표기한

다. 또한, 진자의 질량이 무거울수록, 진자의 길이가 짧을수록 독립진자 시스템이 불안정해지기 쉽기 때문에, 진자 질량이 0.529 [kg] 이고 진자 길이가 0.273 [m]인 진자를 진자 #2로 표기하여 매개변수 불확실성에 대한 실험상황을 첨가하였다.

진자 #1과 진자 #2의 매개변수 값과 변동비율을 정리하면 표 1과 같다.

표 1 진자의 매개변수 값

Table 1 Parameter value of pendulum

진자종류	진자길이 [m]	진자질량 [kg]	진자길이 변동율 [%]	진자질량 변동율 [%]
진자 #1	0.305	0.210	0	0
진자 #2	0.273	0.529	-10.49 (0.9배)	152 (2.5배)

$h=0.01$ 인 경우의 실험실험을 수행한다. 이 경우의 샘플치 제어기에 대한 응답은 그림 10에 나타나 있다. 비교를 위해서, 이산화 제어기에 대한 실험실험을 실행한다. 결과적으로 얻은 응답은 그림 11와 같다.

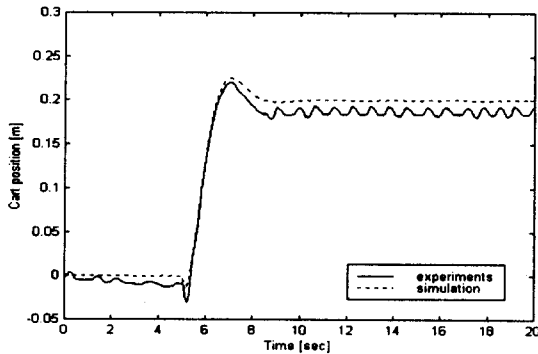


그림 10 샘플치 제어기의 수레 위치 응답 ($h=0.01$)
Fig. 10 Response of cart position with sampled-data controller ($h=0.01$)

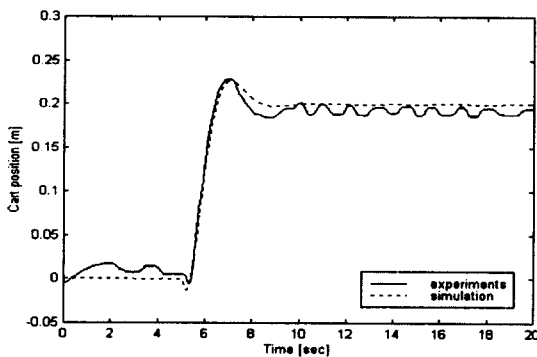


그림 11 이산화 제어기의 수레 위치 응답 ($h=0.01$)
Fig. 11 Response of cart position with discretized controller ($h=0.01$)

모의실험과는 달리 약 8 [rad/sec] 정도의 주파수 성분을 갖는 지속진동이 보여지나, 다소 진동이 발생하는 것을 제외하고는 진자 질량과 진자 길이가 변동된 상황에서도 실험장치가 강건 안정성을 유지하는 것이 관찰된다.

마지막으로, 표본화 주기 $h=0.05$ 인 진자의 경우이다. 샘플치 시스템에 대한 실험실험 결과는 그림 12와 같다.

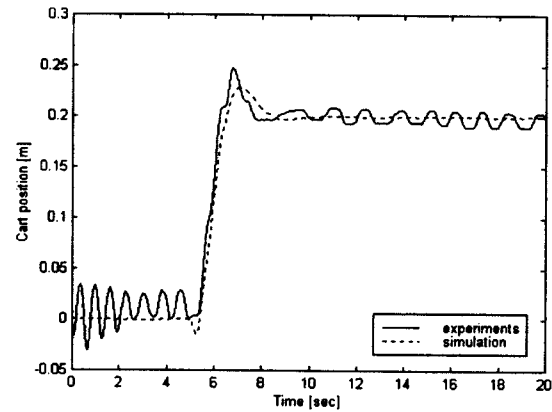


그림 12 샘플치 제어기의 수레 위치 응답 ($h=0.05$)
Fig. 12 Response of cart position with sampled-data controller ($h=0.05$)

그림 12에서, 모의실험에 비해 매우 큰 진동이 발생하고 있기는 하지만, 큰 진자 변동에 대해서도 실험장치가 여전히 안정한 것이 관찰된다. 같은 실험조건에 대하여, 이산화 제어기로 실험을 수행하였으나, 독립진자 시스템이 불안정해졌다. 따라서, 진자 시스템 응답 자료를 획득하는데 실패하였기 때문에, $h=0.05$ 일 때, 진자에 대한 실험실험 응답 그림은 나타내지 못하였다.

이상의 실험 결과를 표로 정리하면, 표 2와 같다.

표 2 제어기의 실험실험 결과 비교

Table 2 Comparison of the experiment results with each controller

진자종류	표본화 주기 제어기	h=0.01	h=0.05	h=0.1			
		진자 #1	샘플치 제어기: 성능 좋음	성능 좋음	성능 유지	이산화 제어기: 성능 좋음	성능 유지
진자 #2	샘플치 제어기: 성능 좋음	성능 좋음	성능 좋음	성능 유지	이산화 제어기: 성능 좋음	성능 악화	불안정

실험 결과에서 알 수 있듯이, 주어진 기준신호에 대해 수레의 위치가 잘 추종하는 것을 알 수 있으며, 비교적 느린 표본화 주기에서 샘플치 방법의 제어기는 연속시간 제어기의 성능을 유지하는 반면에, 표본화 구간 사이의 정보를 무시한 기존의 이산화 방법으로 얻어진 제어기의 응답은 상당한 진동을 일으키고 있는 것이 관찰된다.

특히, 불확실성에 대한 강건 안정도에 있어서, 표본화 주기가 느린 경우, 샘플치 제어기가 이산화 제어기에 비하여 좋은 강건 안정도를 갖는다는 것이 관찰 되었다. 따라서, 이 논문에서 제시한 설계절차에 의해 설계된 제어기가 매우 성공적으로 동작하는 것이 실험을 통해 검증되었다.

다음 절에서는 지금까지의 논의를 바탕으로 본 논문의 결론을 내린다.

6. 결 론

본 논문에서는 샘플치 시스템에 대한 루프정형 2 자유도 H_∞ 디지털 제어기 설계절차를 제시하였다. 제어기 설계를 위해 루프정형 2 자유도 샘플치 제어 시스템 구조를 설정하였고, 이러한 구조로부터, 정규화된 좌기약 불확실성에 대한 강건 안정성과 기준 모델과의 모델정합 측면에서의 강건 성능을 동시에 만족시키기 위한 일반화 제어대상을 유도하였다.

연속시간 루프정형 H_∞ 설계절차의 최종단계에서 H_∞ 제어기에 루프정형에 사용한 하중 함수를 포함시킴으로써 최종 제어기를 얻게 되는데, 샘플치 시스템에 이를 적용하려면, 표본 화기와 유지기로 인하여 바로 포함시키기가 어렵다. 따라서, 본 논문에서는 W_2 를 상수로 제한하였고, 더욱이 W_1 은 계 단 불변 변환에 의해 W_{1d} 로 변환하여 디지털 제어기에 포함시킬 수 있음을 보임으로써 문제를 해결하였다.

본 논문에서 제시한 설계절차에 의해 제어기를 구하기 위해서, MATLAB 소프트웨어를 이용하였으며, 특히, 본 논문의 구조를 갖는 샘플치 일반화 제어대상을 다룰 수 있는 명령어가 제공되지 않기 때문에, 연속 올림 기법에 의한 샘플치 시스템의 설계 명령어를 기본 명령어만으로 새롭게 개발하였다.

제시된 설계절차의 타당성을 입증하기 위해 도립진자 시스템에 대하여 모의실험과 실물실험을 수행하였다. 다양한 표본화 주기의 경우와 진자 길이/질량 변화를 고려한 매개변수 불확실성에 대하여, 기존의 이산화 방법을 통한 제어기와 비교함으로써, 본 논문에서 제시한 샘플치 시스템의 루프정형 2 자유도 H_∞ 제어기 설계절차의 타당성이 확인되었다.

감사의 글

이 논문은 1999년도 광운대학교 교내학술연구비 지원에 의해 연구되었습니다.

참 고 문 헌

[1] W.A. Wolovich, Automatic control systems : Basic analysis and design, Philadelphia, PA: Saunders, 1995.
 [2] G. Zames, "Feedback and optimal sensitivity : model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses", IEEE Trans. Auto. Control, vol. AC-26, pp. 301-320, 1981.
 [3] J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar, B.A. Francis, "State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems", IEEE Trans. Auto. Control, vol. AC-34, pp. 831-847, 1989.
 [4] K. Zhou, Robust and optimal control, Prentice-Hall, 1996.
 [5] J.C. Doyle, G. Stein, "Multivariable Feedback Design : Concepts for a Classical/Modern Synthesis", IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-26, No. 1, pp. 4-16, 1981.
 [6] D. McFarlane, K. Glover, "A loop-shaping Design Procedure Using H_∞ Synthesis", IEEE Trans. Auto. Control, Vol. 37, No. 6, pp. 759-769, 1992.

[7] D.C. McFarlane, K. Glover, Lecture notes in control information sciences 138 : Robust controller design using normalized coprime factor plant descriptions, Springer-Verlag, 1990.
 [8] D.J.N. Limebeer, E.M. Kasenally, J.D. Perkins, "On the Design of Robust two-degree-of-freedom Controllers", Automatica, Vol. 29, No. 1, pp. 157-168, 1993.
 [9] D. J. Walker, "On the structure of a two-degree-of-freedom H_∞ loop-shaping controller", INT. J. Control, Vol. 63, No. 6, pp. 1105-1127, 1996.
 [10] B. Bamieh, J.B. Pearson, B.A. Francis, and A. Tannenbaum, "A lifting technique for linear periodic systems with applications to sampled-data control", Systems & Control Letters, vol. 17, pp. 79-88, 1991.
 [11] B. Bamieh, J.B. Pearson, "A general framework for linear periodic systems with application to H_∞ sampled-data control", IEEE Trans. Auto. Control, vol. AC-37, pp. 418-435, 1992.
 [12] W. Sun, K.M. Nagpal, and P.P. Khargonekar, " H_∞ control and filtering for sampled-data systems", IEEE Trans. Auto. Control, vol. AC-38, pp. 1162-1175, 1993.
 [13] T. Chen, B.A. Francis, Optimal sampled-data control systems, Springer, 1995.
 [14] T. Chen, B.A. Francis, "Input-output stability of sampled-data systems", IEEE Trans. Auto. Control, vol. 36, pp. 50-58, 1991.
 [15] R. M. Redheffer, "On a certain linear fractional transformation", J. Maths. Phys., Vol. 39, pp. 269-286, 1960.
 [16] P. A. Iglesias, K. Glover, "State space approach to discrete time H_∞ control", Int. J. Control, Vol. 54, No. 5, pp. 1031-1073, 1991.
 [17] G. J. Balas, J.C. Doyle, K. Glover, A. Packard, R. Smith, μ -analysis and synthesis toolbox, The MathWorks Inc, 1995.
 [18] 황영민, 이상철, 이석배, 이상효, "LMI 기법에 의한 도립진자 시스템의 H_∞ 제어기 설계", 제12차 한국자동제어학술회의 논문집, pp. 1145-1148, 1997.
 [19] Lee, Sang-Hyo, Lee, Sang-Chuel, Park, Jong-Woo, Cho, Do-Hyeoun, and Lee, Jong-Yong, "The robust H_∞ controller design via linear matrix inequalities (LMIs) for an inverted pendulum on the cart", The International Conference on Electrical Engineering, pp.288-290, 1998.
 [20] 조창호, 이상철, 조도현, 박종우, 이종용, 이상효, "샘플드 데이터 시스템에 대한 H_∞ 제어기 설계 : 도립진자 예제", 제14차 한국자동제어학술회의 논문집 D, pp. 480-483, 1999.
 [21] The MATH WORKS, SIMULINK - dynamic system simulation software, The MATH WORKS Inc., mass., U.S.A., 1995.

저 자 소 개



이 상 철 (李 相 喆)

1988년 광운대 전자공학과 졸업. 1990년 동 대학원 전자공학과 졸업(석사). 1990년-1995년 국방과학 연구소 근무. 2000년 광운대 제어계측공학과 졸업(박사). 2000년 현재 재능대학 전자통신과 전임강사.

Tel : 032-770-1125

E-mail : sangch@mail.jnc.ac.kr



이 증 용 (李 鍾 龍)

1983년 한양대 원자력 공학과 졸업. 1988년 광운대 전자공학과 졸업(석사). 1993년 광운대 전자공학과 졸업(박사). 1991년-2000년 현재 광운대 전산사회 교육원 대우교수

Tel : 02-940-5289

E-mail : jylee57@catholic.or.kr



박 증 우 (朴 鍾 愚)

1990년 광운대 전자공학교 졸업(석사). 2000년 동 대학원 제어계측공학과 졸업(박사). 2000년 현재 재능대학 전자통신과 부교수

Tel : 032-770-1123

E-mail : parkjw@mail.jnc.ac.kr



이 상 효 (李 相 孝)

1969년 수도 공과대 졸업. 1971년 연세대 전기공학과 졸업(석사). 1981년 연세대 전시공학과 졸업(박사). 1980년-1988년 광운대 전자공학과 교수. 1989년-2000년 현재 광운대 제어계측공학과 교수

Tel : 02-940-5153

E-mail : sh41lee@daisy.kwangwoon.ac.kr



조 도 현 (曹 燾 鉉)

1987년 광운대 전자공학과 졸업. 1990년 동 대학원 전자공학과 졸업(석사). 1991년-1993년 LG전자 중앙연구소 근무. 1998년 광운대 제어계측공학과 졸업(박사). 1998년-2000년 현재 인덕대학 메카트로닉스과 겸

임교수

Tel : 02-940-5540

E-mail: dhcho_john@yahoo.co.kr