

Decentralized Compensator Design for Large-scale Systems

安 비 오*
(Pius Ahn)

Abstract - This paper presents a decentralized compensator design procedure for large scale systems. By using a coordinate transformation method, interconnection terms in the subsystem are decoupled and a decentralized observer is designed independently as a form of Luenberger-type for each subsystem. And the decentralized compensator which can select the observer and controller gain independently is designed as a form of observer based controller for each subsystem. The proposed method has a simplicity and conciseness in the aspects of the determination of coordinate transformation matrices and the derivation of the separation principle which is adopted independently for each subsystem.

Key Words : 대규모 시스템, 분산형 보상기, 좌표변환 방법, 분리법칙(Separation Principle)

1. 서 론

대규모 시스템 해석을 위한 접근은 크게 두 가지로 모델 축소(model reduction) 방법과 분산(distributed) 혹은 계층별(hierarchical) 제어로 비집중화(decentralized) 방법을 들 수 있다. 모델 축소방법과 비교하여 비집중화 방법이 갖는 장점은 대상 시스템을 실제의 물리계와 좀더 유사하게 표현하여 해석할 수 있다는 것이다. 이러한 이유로 비집중화 방법을 이용한 대규모 시스템의 제어기 설계, 시스템 동정, 추정기 설계 등 시스템 해석과 제어에 관한 연구가 활발히 진행되고 있다. 최근 대규모 동적 시스템의 분산형 관측기 설계 문제가 많은 관심의 대상이 되고 있는데[1-5], 이것은 대규모 동적 시스템의 분산형 관측기 설계문제가 공정 감시나 계기의 고장 검출 등에 응용 가치가 높고, 분산형 상태 피드백 제어 문제 혹은 분산형 보상기 설계문제로의 직접 응용이 가능하기 때문이다.

대규모시스템의 분산형 보상기(compensator or observer based controller)는 크게 분산형 관측기 설계부분과 제어기 설계부분으로 구성된다. 여기서 대규모 시스템의 분산형 보상기 설계에는 다음의 두 가지 어려운 점을 포함한다. 하나는 대규모 시스템에 대한 분산형 관측기를 Luenberger 형(type)으로 설계할 경우, 각각의 부시스템에 존재하는 입력에 대한 모든 정보를 갖고 있거나 혹은 측정이 가능하다는

가정이 필요하다. 그러나 분할된 각각의 부시스템에는 다른 부시스템들과의 상호 연관항(interconnection terms)을 갖고 있고, 이것은 각각의 부시스템이 독립적으로 분산형 관측기를 설계하는데 장애가 된다. 다른 하나는, 설계된 분산형 관측기를 지역적으로 독립인 제어기와 결합하여 보상기를 설계할 경우, 관측기 이득과 제어기 이득을 각각 독립적으로 선택 가능함을 보여야 한다. 이것은 각각의 안정한 시스템들이 모여 하나의 시스템을 구성하더라도 전체 시스템이 불안정하게 되는 경우가 있듯이, 보상기도 관측기와 제어기의 결합에 의해 시스템의 안정도가 손상될 수 있으므로, 관측기와 제어기가 각각 독립적으로 임의설계 가능해야 한다.

본 논문에서는 앞서의 두 가지 사항을 고려하여 다음과 같은 분산형 보상기 설계 방법을 제안한다. 첫째, 상호 연관항을 시스템에 존재하는 미지의 입력으로 가정하고, 좌표변환 방법(coordinate transformation method)을 이용한 미지 입력 관측기 설계기법을 직접 적용함으로써, 각각의 부시스템은 상호 연관항에 대한 아무런 가정이나 정보 없이 분산형 관측기를 설계하였다. 제안된 좌표변환 방법은 새롭게 유도한 행렬군(matrix pencil)에 단위 행렬을 포함하는 이유로 상호 연관항을 배제하기 위한 좌표변환 행렬의 선정이 간편하다. 둘째, 분산형 보상기는 제안된 분산형 관측기와 극점배치 방법에 의해 안정되게 선택된 지역적 제어기득 행렬의 결합으로 설계하였다. 제안된 분산형 보상기에 대한 분리법칙(separation principle)은 각각의 부시스템에 대하여 좌표변환을 통해 축차된 동적 시스템과 분산형 관측기 방정식으로부터 직접 유도함으로써 전체 시스템 조합에 의해 설계한 경우[5,6] 에 비해 유도과정이 쉽고 간명함을 보였다.

* 正 會 員 : (주)마이다스코리아 附設研究所 責任研究員 · 工博
接受日字 : 2000年 3月 2日
最終完了 : 2000年 6月 21日

2. 좌표변환을 이용한 분산형 관측기 설계

다음의 식(1)과 같이 N개의 부시스템으로 분할된 대규모 선형 동적 시스템을 고려하자.

i-번째 부시스템 ▶

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i(t) + \sum_{j=1}^N \mathbf{A}_{ij} \mathbf{x}_j(t) \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_i(t) = \mathbf{C}_i \mathbf{x}_i(t)$$

여기서, $i=1, 2, \dots, N$ 이고, 첨자 i 는 i-번째 부시스템을 나타낸다. 식(1)에서 \mathbf{x}_i , \mathbf{u}_i 와 \mathbf{y}_i 는 각각 i-번째 부시스템의 지역적 상태, 입력과 출력 벡터이고, 각각 $\mathbf{x}_i \in \mathcal{R}^{n_i}$, $\mathbf{u}_i \in \mathcal{R}^{p_i}$ 과 $\mathbf{y}_i \in \mathcal{R}^{m_i}$ 의 차원을 갖는다. i-번째 부시스템에 포함된 다른 부시스템들과의 상호 연관항

$\sum_{j=1}^N \mathbf{A}_{ij} \mathbf{x}_j(t)$ 을 재 표현하기 위하여 식(2)를 만족하는 임

의 행렬 \mathbf{R}_i 를 선정하자.

$$\overline{\mathbf{D}}_i \overline{\mathbf{d}}_i(t) = \sum_{j=1}^N \mathbf{A}_{ij} \mathbf{x}_j(t) \quad (2)$$

여기서, $\overline{\mathbf{D}}_i = \mathbf{D}_i \mathbf{R}_i$, $\mathbf{d}_i = \mathbf{R}_i \overline{\mathbf{d}}_i$,

$$\overline{\mathbf{D}}_i = [\mathbf{A}_{i1}, \mathbf{A}_{i2}, \dots, \mathbf{A}_{i(i-1)}, \mathbf{A}_{i(i+1)}, \dots, \mathbf{A}_{iN}]$$

$$\overline{\mathbf{d}}_i = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_N]^T$$

$\rho(\overline{\mathbf{D}}_i) = q_i$ 이고, $\mathbf{d}_i \in \mathcal{R}^{q_i}$ 이다.

식(2)로부터 식(1)의 i-번째 부시스템은 다음의 식(3)과 같이 표현된다.

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i(t) + \mathbf{D}_i \mathbf{d}_i(t) \quad (3)$$

$$\mathbf{y}_i(t) = \mathbf{C}_i \mathbf{x}_i(t)$$

[가정 1]

식(3)에서 $\rho(\mathbf{C}_i) = m_i$, $\rho(\mathbf{D}_i) = q_i$ 이고, $m_i \geq q_i$ 이다.

[가정 1]은 대규모 시스템의 분산형 관측기 설계 시 제약조건이 안 되는데, 이것은 각각의 부시스템이 갖는 상호 연관항의 수가 지역적으로 측정된 출력의 수보다 같거나 작을 때 분산형 관측기는 설계가 가능하다는 것을 잘 알려진 사실이기 때문이다[3]. [가정 1]로부터, 식(3)은 다음의 식(4)를 만족하는 유사변환 행렬 \mathbf{T}_{i1} 을 갖는다.

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{x}}_{i1}(t) &= \overline{\mathbf{A}}_{i11} \overline{\mathbf{x}}_{i1}(t) \\ &+ \overline{\mathbf{A}}_{i12} \overline{\mathbf{x}}_{i2}(t) + \overline{\mathbf{B}}_{i1} \mathbf{u}_i(t) \end{aligned} \quad (4.a)$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{x}}_{i2}(t) &= \overline{\mathbf{A}}_{i21} \overline{\mathbf{x}}_{i1}(t) \\ &+ \overline{\mathbf{A}}_{i22} \overline{\mathbf{x}}_{i2}(t) + \overline{\mathbf{B}}_{i2} \mathbf{u}_i(t) + \mathbf{d}_i(t) \end{aligned} \quad (4.b)$$

$$\mathbf{y}_i(t) = \overline{\mathbf{C}}_{i1} \overline{\mathbf{x}}_{i1}(t) + \overline{\mathbf{C}}_{i2} \overline{\mathbf{x}}_{i2}(t) \quad (4.c)$$

여기서, $\mathbf{x}_i = \mathbf{T}_{i1} \overline{\mathbf{x}}_i = \mathbf{T}_{i1} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}_{i1} \\ \overline{\mathbf{x}}_{i2} \end{bmatrix}$, $\overline{\mathbf{x}}_{i1} \in \mathcal{R}^{(n_i - q_i)}$,

$$\overline{\mathbf{x}}_{i2} \in \mathcal{R}^{q_i}, \quad \mathbf{T}_{i1}^{-1} \mathbf{A}_i \mathbf{T}_{i1} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}}_{i11} & \overline{\mathbf{A}}_{i12} \\ \overline{\mathbf{A}}_{i21} & \overline{\mathbf{A}}_{i22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{i1}^{-1} \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{B}}_{i1} \\ \overline{\mathbf{B}}_{i2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{i1}^{-1} \mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{q_i} \end{bmatrix} \text{ 이고,}$$

$$\mathbf{C}_i \mathbf{T}_{i1} = [\overline{\mathbf{C}}_{i1} \quad \overline{\mathbf{C}}_{i2}] \text{ 이다.}$$

식(4.b)와 식(4.c)로부터 식(5)의 행렬군(matrix pencil)을 유도하자.

$$\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{C}}_{i1} & \overline{\mathbf{C}}_{i2} & \vdots & -\mathbf{I}_{m_i} & \mathbf{0} \\ \overline{\mathbf{A}}_{i21} & \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{q_i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}_{i1}(t) \\ \overline{\mathbf{y}}_i(t) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5)$$

여기서, $\overline{\mathbf{y}}_i(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_i(t) \\ \mathbf{z}_i(t) \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_i(t) &\triangleq \overline{\mathbf{x}}_{i2}(t) - \overline{\mathbf{A}}_{i22} \overline{\mathbf{x}}_{i2}(t) - \overline{\mathbf{B}}_{i2} \mathbf{u}_i(t) - \mathbf{d}_i(t) \\ &= \overline{\mathbf{A}}_{i21} \overline{\mathbf{x}}_{i1} \end{aligned}$$

식(5)의 좌변 행렬군(matrix pencil)은 진행 계수(full row rank) $m_i + q_i$ 을 항상 보장하므로, 식(6)을 만족하는 정칙의 좌표변환 행렬 $\mathbf{T}_{i2} \in \mathcal{R}^{(m_i + q_i)}$ 는 존재한다[7].

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{i2} \cdot \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{C}}_{i1} & \overline{\mathbf{C}}_{i2} & \vdots & -\mathbf{I}_{m_i} & \mathbf{0} \\ \overline{\mathbf{A}}_{i21} & \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{q_i} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{i1} & \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{N}_{i1} & \mathbf{N}_{i2} \\ \mathbf{M}_{i2} & \mathbf{I}_{q_i} & \vdots & \mathbf{N}_{i3} & \mathbf{N}_{i4} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

이제, 식(6)의 좌표변환행렬 \mathbf{T}_{i2} 을 이용하여, 식(5)로부터 다음의 식(7), (8)을 구할 수 있다.

$$(\mathbf{M}_{i1} + \mathbf{N}_{i2} \overline{\mathbf{A}}_{i21}) \overline{\mathbf{x}}_{i1}(t) + \mathbf{N}_{i1} \mathbf{y}_i(t) = \mathbf{0} \quad (7)$$

$$\overline{\mathbf{x}}_{i2}(t) = -(\mathbf{M}_{i2} + \mathbf{N}_{i4} \overline{\mathbf{A}}_{i21}) \overline{\mathbf{x}}_{i1}(t) - \mathbf{N}_{i3} \mathbf{y}_i(t) \quad (8)$$

식(8)을 식(4.a)에 대입하고 식(7)에서 $\tilde{\mathbf{y}}_i(t) \triangleq -\mathbf{N}_{i1}\mathbf{y}_i(t)$ 라고 정의하면, 다음의 식(9)와 같이 상태 $\bar{\mathbf{x}}_{i1}(t)$ 만으로 이루어진 $(n_i - q_i)$ 차 동적 시스템을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{i1}(t) &= \mathbf{A}_i^* \bar{\mathbf{x}}_{i1}(t) + \bar{\mathbf{B}}_{i1}\mathbf{u}_i(t) - \bar{\mathbf{A}}_{i12} \mathbf{N}_{i3}\mathbf{y}_i(t) \\ \tilde{\mathbf{y}}_i(t) &= (\mathbf{M}_{i1} + \mathbf{N}_{i2} \bar{\mathbf{A}}_{i21}) \bar{\mathbf{x}}_{i1}(t) \end{aligned} \quad (9)$$

여기서,

$$\mathbf{A}_i^* = \bar{\mathbf{A}}_{i11} - \bar{\mathbf{A}}_{i12} \mathbf{M}_{i2} - \bar{\mathbf{A}}_{i12} \mathbf{N}_{i4} \bar{\mathbf{A}}_{i21} \text{ 이다.}$$

보조정리 1

식(1)의 i -번째 부시스템이 관측 가능하면, 좌표변환을 이용하여 유도한 축차된 동적 시스템 식(9) 역시 관측 가능하다.

즉, $\rho \begin{bmatrix} -s \mathbf{I}_{n_i} + \mathbf{A}_i \\ \mathbf{C}_i \end{bmatrix} = n_i$ 이면,

$$\rho \begin{bmatrix} -s \mathbf{I}_{(n_i - q_i)} + \mathbf{A}_i^* \\ \mathbf{M}_{i1} \end{bmatrix} = n_i - q_i \text{ 이다.}$$

여기서, $\forall s \in \mathbb{C}, \text{Re}(s) \geq 0$

증명)

$$\rho \begin{bmatrix} -s \mathbf{I}_{n_i} + \mathbf{A}_i \\ \mathbf{C}_i \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} -s \mathbf{I}_{(n_i - q_i)} + \bar{\mathbf{A}}_{i11} & \bar{\mathbf{A}}_{i12} \\ \bar{\mathbf{C}}_{i1} & \bar{\mathbf{C}}_{i2} \\ \bar{\mathbf{A}}_{i21} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

3행에 $(-\bar{\mathbf{A}}_{i12} \mathbf{N}_{i4})$ 를 곱해서 1행에 더하고,

$$\begin{aligned} &= \rho \begin{bmatrix} -s \mathbf{I}_{(n_i - q_i)} + \bar{\mathbf{A}}_{i11} - \bar{\mathbf{A}}_{i12} \mathbf{N}_{i4} \bar{\mathbf{A}}_{i21} & \bar{\mathbf{A}}_{i12} \\ \bar{\mathbf{C}}_{i1} & \bar{\mathbf{C}}_{i2} \\ \bar{\mathbf{A}}_{i21} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= \rho \begin{bmatrix} -s \mathbf{I}_{(n_i - q_i)} + \bar{\mathbf{A}}_{i11} - \bar{\mathbf{A}}_{i12} \mathbf{N}_{i4} \bar{\mathbf{A}}_{i21} & \bar{\mathbf{A}}_{i12} \\ \mathbf{M}_{i1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{i2} & \mathbf{I}_{q_i} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3행에 $-\bar{\mathbf{A}}_{i12}$ 을 곱해서 1행에 더하면,

$$\begin{aligned} &= \rho \begin{bmatrix} -s \mathbf{I}_{(n_i - q_i)} + \bar{\mathbf{A}}_{i11} - \bar{\mathbf{A}}_{i12} \mathbf{N}_{i4} \bar{\mathbf{A}}_{i21} - \bar{\mathbf{A}}_{i12} \mathbf{M}_{i2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{i1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{i2} & \mathbf{I}_{q_i} \end{bmatrix} \\ &= q_i + \rho \begin{bmatrix} -s \mathbf{I}_{(n_i - q_i)} + \mathbf{A}_i^* \\ \mathbf{M}_{i1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

따라서, $\rho \begin{bmatrix} -s \mathbf{I}_{n_i} + \mathbf{A}_i \\ \mathbf{C}_i \end{bmatrix} = n_i$ 이면,

$$\rho \begin{bmatrix} -s \mathbf{I}_{(n_i - q_i)} + \mathbf{A}_i^* \\ \mathbf{M}_{i1} \end{bmatrix} = n_i - q_i \text{ 이다.}$$

■

이제, [보조정리 1]로부터 식(1)로 표현된 i -번째 부시스템이 관측 가능하면, 상호 연관항이 배제되어 축차된 i -번째 부시스템 식(9)에 대해서 식(10)과 같이 Luenberger 형 관측기를 설계할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\zeta}}_i(t) &= \mathbf{A}_i^* \boldsymbol{\zeta}_i(t) + \bar{\mathbf{B}}_{i1}\mathbf{u}_i(t) - \bar{\mathbf{A}}_{i12} \mathbf{N}_{i3}\mathbf{y}_i(t) \\ &\quad + \mathbf{L}_i [\tilde{\mathbf{y}}_i(t) - (\mathbf{M}_{i1} + \mathbf{N}_{i2} \bar{\mathbf{A}}_{i21}) \boldsymbol{\zeta}_i(t)] \end{aligned} \quad (10)$$

오차함수를 식(11)과 같이 정의하고,

$$\mathbf{e}_i(t) = \boldsymbol{\zeta}_i(t) - \bar{\mathbf{x}}_{i1}(t) \quad (11)$$

다음의 식(12)의 관계로부터,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_i(t) &= \boldsymbol{\zeta}_i(t) - \bar{\mathbf{x}}_{i1}(t) \\ &= \mathbf{A}_i^* \boldsymbol{\zeta}_i(t) + \bar{\mathbf{B}}_{i1}\mathbf{u}_i(t) - \bar{\mathbf{A}}_{i12} \mathbf{N}_{i21}\mathbf{y}_i(t) \\ &\quad + \mathbf{L}_i [\tilde{\mathbf{y}}_i(t) - (\mathbf{M}_{i1} + \mathbf{N}_{i2} \bar{\mathbf{A}}_{i21}) \boldsymbol{\zeta}_i(t)] \\ &\quad - \mathbf{A}_i^* \bar{\mathbf{x}}_{i1}(t) - \bar{\mathbf{B}}_{i1}\mathbf{u}_i(t) + \bar{\mathbf{A}}_{i12} \mathbf{N}_{i21}\mathbf{y}_i(t) \\ &= [\mathbf{A}_i^* - \mathbf{L}_i(\mathbf{M}_{i1} + \mathbf{N}_{i2} \bar{\mathbf{A}}_{i21})] \mathbf{e}_i(t) \end{aligned} \quad (12)$$

식(10)의 관측기는 행렬 $[\mathbf{A}_i^* - \mathbf{L}_i(\mathbf{M}_{i1} + \mathbf{N}_{i2} \bar{\mathbf{A}}_{i21})]$ 의 고유값이 음의 실수부를 갖도록 관측기 이득행렬 \mathbf{L}_i 을 선택하면, $t \rightarrow \infty$ 에 따라 $\boldsymbol{\zeta}_i(t) \rightarrow \bar{\mathbf{x}}_{i1}(t)$ 가 됨을 알 수 있다. 이제, 식(10)의 관측기 방정식에 $\tilde{\mathbf{y}}_i(t) = -\mathbf{N}_{i1}\mathbf{y}_i(t)$ 을 대입하여 정리하면, 식(13)과 같이 i -번째 부시스템 식(1)에 대한 $(n_i - q_i)$ 차 축소차수 관측기를 유도할 수 있다.

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}}_i(t) = \mathbf{F}_i \boldsymbol{\zeta}_i(t) + \mathbf{G}_i \mathbf{u}_i(t) + \mathbf{H}_i \mathbf{y}_i(t) \quad (13)$$

여기서,

$$\mathbf{F}_i = [\mathbf{A}_i^* - \mathbf{L}_i(\mathbf{M}_{i1} + \mathbf{N}_{i2} \bar{\mathbf{A}}_{i21})]$$

$$\mathbf{G}_i = \bar{\mathbf{B}}_{i1}$$

$$\mathbf{H}_i = -(\bar{\mathbf{A}}_{i12} \mathbf{N}_{i3} + \mathbf{L}_i \mathbf{N}_{i1})$$

이다.

(8)로부터 식(14)를 구하면,

$$\hat{\mathbf{x}}_{i_2}(t) = -(\mathbf{M}_{i_2} + \mathbf{N}_{i_4} \bar{\mathbf{A}}_{i_{21}}) \boldsymbol{\zeta}_i(t) - \mathbf{N}_{i_3} \mathbf{y}_i(t) \quad (14)$$

($n_i - q_i$)차 분산형 관측기에 의해서 추정된 i -번째 부시스템의 상태벡터는 식(15)로부터 식(16)으로 구해진다.

$$\hat{\mathbf{x}}_i(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(n_i - q_i)} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}_{i_2} - \mathbf{N}_{i_4} \bar{\mathbf{A}}_{i_{21}} & -\mathbf{N}_{i_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\zeta}_i(t) \\ \mathbf{y}_i(t) \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_i(t) = \bar{\mathbf{T}}_i \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\zeta}_i(t) \\ \mathbf{y}_i(t) \end{bmatrix} \quad (16)$$

여기서, $\bar{\mathbf{T}}_i = \mathbf{T}_{i_1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(n_i - q_i)} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}_{i_2} - \mathbf{N}_{i_4} \bar{\mathbf{A}}_{i_{21}} & -\mathbf{N}_{i_3} \end{bmatrix}$

결국, 제안된 분산형 관측기 설계방법은 식(13), (16)으로부터 각각의 부시스템이 다른 부시스템들과 상호 연관항의 정보교환 없이도 i -번째 부시스템의 지역적 상태를 독립적으로 추정할 수 있음을 알 수 있다. 또한, 제안된 좌표변환 방법의 변환행렬의 선정은 식(6)에서 보는 바와 같이, 좌변행렬군에 단위행렬을 포함하는 이유로 좌표변환 행렬의 선정이 매우 용이함을 알 수 있다.

3. 대규모 시스템의 분산형 보상기 설계

이제 2절에서 제안된 분산형 관측기 설계방법을 이용하여 대규모 선형 동적 시스템의 분산형 보상기를 설계하였다. 제안된 분산형 보상기의 구조는 [그림 1]과 같다.

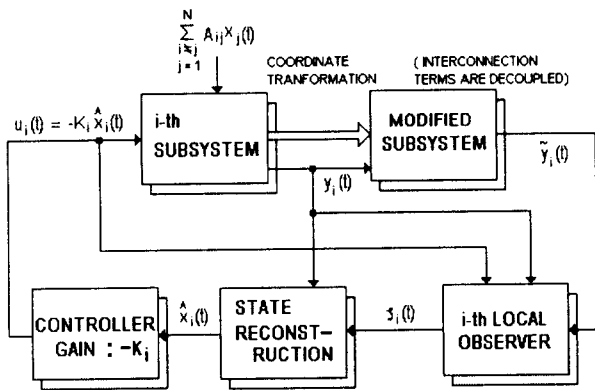


그림 1 제안된 분산형 보상기의 블록 다이어그램
Fig. 1 Block diagram of decentralized compensator

식(13)과 같이 i -번째 부시스템의 분산형 관측기로 추정된 상태 값을, 극점배치 방법으로 선택한 제어이득을 되먹임시켜 전체 시스템을 안정되게 제어하는 보상기를 설계하자. 되먹임 제어 입력이 각각의 부시스템에 독립적으로 결정되는 분산형 보상기 설계를 위하여 전체 시스템의 제어입력을 식(17)과 같이 각각의 부시스템 제어입력의 집합으로 표현

하자.

$$\mathbf{u}(t) = [\mathbf{u}_1(t) \ \mathbf{u}_2(t) \ \cdots \ \mathbf{u}_N(t)]^T \quad (17)$$

여기서, $\mathbf{u}_i(t) = -\mathbf{K}_i \hat{\mathbf{x}}_i(t)$

식(17)에서 \mathbf{K}_i 는 각각의 부시스템으로부터 ($\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_i$)의 고유값이 모두 음의 값을 갖도록 극점배치 방법에 의해 선정된 제어이득 행렬이다. i -번째 부시스템의 제어입력은 식(16)으로부터 식(18)과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{u}_i(t) = -\mathbf{K}_i \hat{\mathbf{x}}_i(t) = -\mathbf{K}_i \cdot \bar{\mathbf{T}}_i \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\zeta}_i(t) \\ \mathbf{y}_i(t) \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$= -\bar{\mathbf{K}}_i \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\zeta}_i(t) \\ \mathbf{y}_i(t) \end{bmatrix} = -[\bar{\mathbf{K}}_{i_1} \ \bar{\mathbf{K}}_{i_2}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\zeta}_i(t) \\ \mathbf{y}_i(t) \end{bmatrix}$$

여기서, $\bar{\mathbf{K}}_i = \mathbf{K}_i \cdot \bar{\mathbf{T}}_i$

따라서, 분산형 관측기 식(13)에 식(18)의 i -번째 부시스템의 제어입력을 대입하여 설계된 보상기는 식(19)와 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\zeta}}_i(t) &= [\mathbf{F}_i - \bar{\mathbf{B}}_{i_1} \bar{\mathbf{K}}_{i_1}] \boldsymbol{\zeta}_i(t) + [\mathbf{H}_i - \bar{\mathbf{B}}_{i_1} \bar{\mathbf{K}}_{i_2}] \mathbf{y}_i(t) \\ &= [\mathbf{A}_i^* - \mathbf{L}_i(\mathbf{M}_{i_1} + \mathbf{N}_{i_2} \bar{\mathbf{A}}_{i_{21}}) - \bar{\mathbf{B}}_{i_1} \bar{\mathbf{K}}_{i_1}] \boldsymbol{\zeta}_i(t) \\ &\quad - [\bar{\mathbf{A}}_{i_{12}} \mathbf{N}_{i_3} + \mathbf{L}_i \mathbf{N}_{i_1} + \bar{\mathbf{B}}_{i_1} \bar{\mathbf{K}}_{i_2}] \mathbf{y}_i(t) \end{aligned} \quad (19)$$

식(19)로 제안된 분산형 보상기는 관측기 이득 \mathbf{L}_i 과 제어기 이득 $\bar{\mathbf{K}}_i = \mathbf{K}_i \cdot \bar{\mathbf{T}}_i$ 를 각각 독립적으로 선택하기 위하여 분리법칙(separation principle)을 만족해야 한다. 이것은 각각의 안정한 부시스템이 전체 시스템을 불안정하게 만드는 경우가 있듯이, 제안된 보상기의 경우도 관측기와 제어기의 결합에 의해 시스템의 안정도를 손상시킬 수 있으므로, 관측기와 제어기가 각각 독립적으로 임의설계가 가능해야 한다.

분리법칙(separation principle)의 유도

식(18)로 표현된 되먹임 제어 입력을 식(9), (10)에 대입하여 정리하면, 식(20)을 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_{i_1}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\zeta}}_i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i^* & \vdots \\ \mathbf{L}_i(\mathbf{M}_{i_1} + \mathbf{N}_{i_2} \bar{\mathbf{A}}_{i_{21}}) & \vdots \\ & -\bar{\mathbf{B}}_{i_1} \bar{\mathbf{K}}_{i_1} \\ \mathbf{A}_i^* - \mathbf{L}_i(\mathbf{M}_{i_1} + \mathbf{N}_{i_2} \bar{\mathbf{A}}_{i_{21}}) - \bar{\mathbf{B}}_{i_1} \bar{\mathbf{K}}_{i_1} & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{i_1}(t) \\ \boldsymbol{\zeta}_i(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{i_{12}} \mathbf{N}_{i_3} + \bar{\mathbf{B}}_{i_1} \bar{\mathbf{K}}_{i_2} \\ \bar{\mathbf{A}}_{i_{12}} \mathbf{N}_{i_3} + \bar{\mathbf{B}}_{i_1} \bar{\mathbf{K}}_{i_2} \end{bmatrix} \mathbf{y}_i(t) \quad (20)$$

i -번째 부시스템의 관측기 오차함수 식(11)을 식(21)로 표현하여 식(20)에 대입하고,

$$\zeta_i(t) = e_i(t) + \bar{x}_{i1}(t) \quad (21)$$

식(12)을 함께 정리하면, 다음의 식(22)를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_{i1}(t) \\ \dot{e}_i(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i^* - \bar{\mathbf{B}}_{i1} \bar{\mathbf{K}}_{i1} & -\bar{\mathbf{B}}_{i1} \bar{\mathbf{K}}_{i1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_i^* - \mathbf{L}_i(\mathbf{M}_{i1} + \mathbf{N}_{i2} \bar{\mathbf{A}}_{i21}) \end{bmatrix} \\ & \cdot \begin{bmatrix} \bar{x}_{i1}(t) \\ e_i(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_{i1} \bar{\mathbf{K}}_{i2} + \bar{\mathbf{A}}_{i12} \mathbf{N}_{i3} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{y}_i(t) \end{aligned} \quad (22)$$

식(22)의 특성 다항식은 식(23)과 같고, 이때 관측기 이득 \mathbf{L}_i 와 되먹임 제어이득 $\bar{\mathbf{K}}_i = \mathbf{K}_i \cdot \bar{\mathbf{T}}_i$ 의 선택은 독립적임을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} & \det \left(\lambda_i \mathbf{I}_{2(n_i - q_i)} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i^* - \bar{\mathbf{B}}_{i1} \bar{\mathbf{K}}_{i1} & \vdots \\ \mathbf{0} & \vdots \\ & -\bar{\mathbf{B}}_{i1} \bar{\mathbf{K}}_{i1} \\ & \mathbf{A}_i^* - \mathbf{L}_i(\mathbf{M}_{i1} + \mathbf{N}_{i2} \bar{\mathbf{A}}_{i21}) \end{bmatrix} \right) \\ &= \det[\lambda_i \cdot \mathbf{I}_{(n_i - q_i)} - \mathbf{A}_i^* + \bar{\mathbf{B}}_{i1} \bar{\mathbf{K}}_{i1}] \\ & \quad \times \det[\lambda_i \cdot \mathbf{I}_{(n_i - q_i)} - \mathbf{A}_i^* + \mathbf{L}_i(\mathbf{M}_{i1} + \mathbf{N}_{i2} \bar{\mathbf{A}}_{i21})] \end{aligned} \quad (23)$$

결국, 식(20)에 $\begin{bmatrix} \bar{x}_{i1}(t) \\ \zeta_i(t) \end{bmatrix}$ 와 식(22)에 $\begin{bmatrix} \bar{x}_{i1}(t) \\ e_i(t) \end{bmatrix}$ 사이의 변환은 선형이고 정칙이므로 식(20)과 식(22)의 특성 다항식은 같고, i -번째 부시스템 식(1)이 제어가능/관측가능 하면 식(23)에서 보인바와 같이 관측기 이득 \mathbf{L}_i 와 제어기 이득 $\bar{\mathbf{K}}_i = \mathbf{K}_i \cdot \bar{\mathbf{T}}_i$ 는 각각 독립적으로 선택 할 수 있는 분산형 보상기를 설계할 수 있다.

4. 적용예제

이제 본 연구에서 제안된 분산형 보상기를 다음과 같이 2개의 부시스템으로 구성된 대규모 시스템에 적용하여 보자.

부시스템 1

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{\text{sub1}}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{sub1}}(t) \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_{\text{sub1}}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{sub2}}(t) \end{aligned}$$

$$\mathbf{y}_{\text{sub1}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{sub1}}(t)$$

부시스템 2

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{\text{sub2}}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{sub2}}(t) \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_{\text{sub2}}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & -1 \\ 4 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{sub1}}(t) \\ \mathbf{y}_{\text{sub2}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{sub2}}(t) \end{aligned}$$

먼저, 부시스템 1에 대해서 식(3)을 만족하는 \mathbf{R}_{sub1} 과 \mathbf{D}_{sub1} 은 각각 다음과 같다.

$$\mathbf{R}_{\text{sub1}} = [-1 \ 1 \ 1], \quad \mathbf{D}_{\text{sub1}} = [0 \ 0 \ 1]^T$$

식(4), (6)을 만족하는 좌표변환 행렬은 각각 $\mathbf{T}_{\text{sub1}} = \mathbf{I}_3$,

$$\mathbf{T}_{\text{sub2}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \text{으로 선택하였다.}$$

이때, 관측기 이득행렬을 $\mathbf{L}_{\text{sub1}} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ 로 결정하면, 유도된 관측기 방정식과 추정된 상태 벡터는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_{\text{sub1}}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & -14 \\ 2 & -17 \end{bmatrix} \zeta_{\text{sub1}}(t) \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_{\text{sub1}}(t) + \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 14 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{y}_{\text{sub1}}(t) \end{aligned}$$

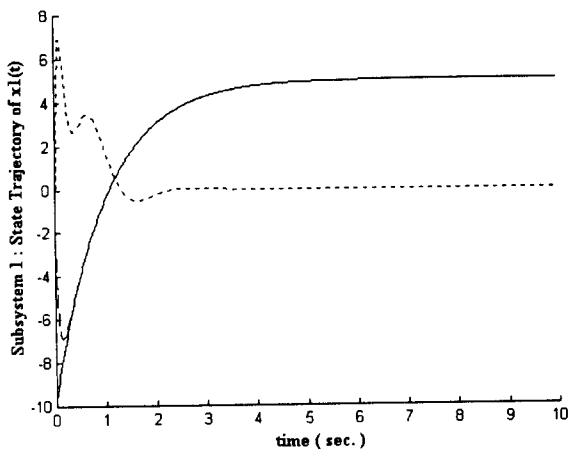
$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{sub1}}(t) = \begin{bmatrix} \zeta_{\text{sub1}_1}(t) \\ \zeta_{\text{sub1}_2}(t) \\ 4 \zeta_{\text{sub1}_2}(t) - 4 \mathbf{y}_{\text{sub1}_1}(t) + \mathbf{y}_{\text{sub1}_2}(t) \end{bmatrix}$$

이제, 극점배치 방법을 이용하여 페루프 시스템이 -7, -4, -5의 안정한 극점을 갖도록 되먹임 제어 이득을 선택하면, 부시스템 1의 보상기는 다음과 같이 결정된다.

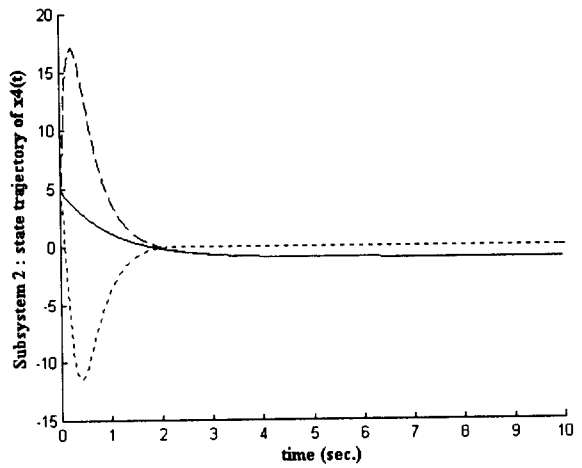
$$\begin{aligned} \zeta_{\text{sub1}}(t) &= \begin{bmatrix} -15.4965 & 19.8533 \\ 27.9928 & -105.0920 \end{bmatrix} \zeta_{\text{sub1}}(t) \\ &+ \begin{bmatrix} -28.0523 & 10.5131 \\ 122.1005 & -28.0251 \end{bmatrix} \mathbf{y}_{\text{sub1}}(t) \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}_{\text{sub1}}(t) = - \begin{bmatrix} -25.9 & 88.1 & -108.1 & 27.0 \\ 14.5 & -33.8 & 42.1 & -10.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_{\text{sub1}}(t) \\ \mathbf{y}_{\text{sub1}}(t) \end{bmatrix}$$

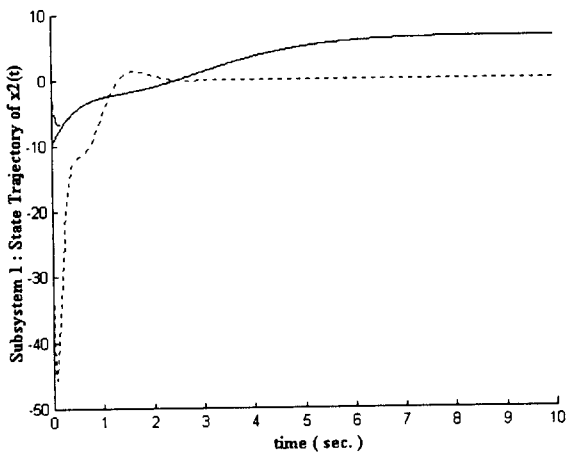
마찬가지로, 부시스템 2에 대해서, $\mathbf{R}_{\text{sub2}} = [-8 \ 1 \ -1]$ 과 $\mathbf{D}_{\text{sub2}} = [0 \ 1 \ -0.5]^T$ 을 선택하고, 조건에 따라 변환행렬을 다음과 같이 결정하자.



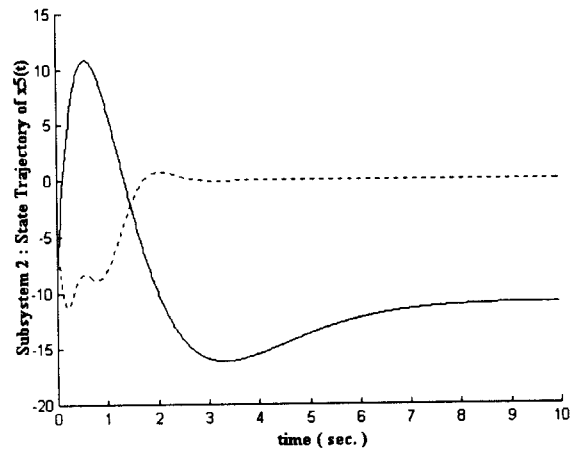
(a) State trajectory of $x_1(t)$



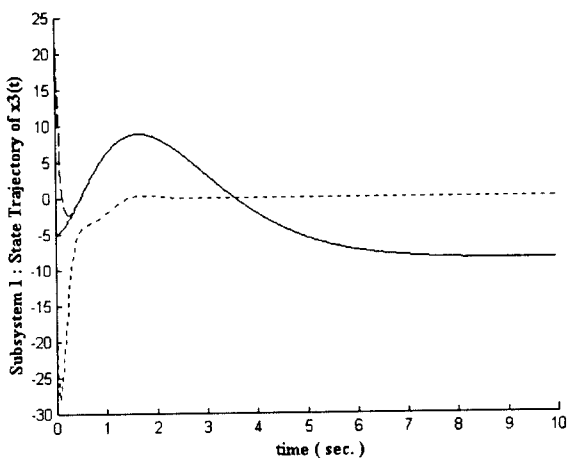
(d) State trajectory of $x_4(t)$



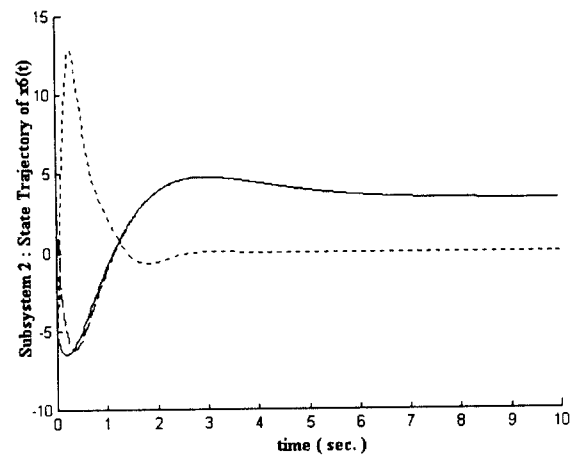
(b) State trajectory of $x_2(t)$



(e) State trajectory of $x_5(t)$



(c) State trajectory of $x_3(t)$



(f) State trajectory of $x_6(t)$

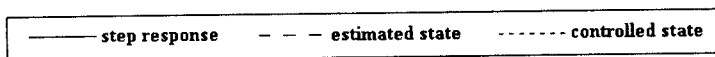


그림 2 적용예제 시스템의 실제상태, 추정된 상태, 보상된 상태의 궤적

Fig. 2 Actual, estimated and compensated states trajectory of the example system

$$\mathbf{T}_{sub2_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{sub2_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

관측기 이득행렬을 $\mathbf{L}_{sub2} = \begin{bmatrix} 1 & -20 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ 으로 선택하면, 부시스템 2의 관측기 방정식과 추정된 상태 벡터는 다음과 같고,

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_{sub2}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ -1 & -8 \end{bmatrix} \zeta_{sub2}(t) \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{u}_{sub2}(t) + \begin{bmatrix} -10 & -20 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \mathbf{y}_{sub2}(t) \end{aligned}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{sub2}(t) = \begin{bmatrix} \zeta_{sub2_1}(t) \\ \mathbf{y}_{sub2_1}(t) \\ 0.5 \zeta_{sub2_2}(t) - 0.5 \mathbf{y}_{sub2_1}(t) \end{bmatrix}$$

극점배치 방법을 이용하여 페루프 시스템이 -7, -5, -3의 안정한 극점을 갖도록 피드백 제어 이득을 선택하면, 부시스템 2의 보상기는 다음과 같이 설계된다.

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_{sub2}(t) &= \begin{bmatrix} -9.0 & 9.5 \\ 16.0 & -7.0 \end{bmatrix} \zeta_{sub2}(t) \\ &+ \begin{bmatrix} -9.5 & -20.0 \\ 4.0 & 8.0 \end{bmatrix} \mathbf{y}_{sub2}(t) \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}_{sub2}(t) = - \begin{bmatrix} -1.0 & 0 & 1.0 & 0 \\ -8.0 & -0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_{sub2}(t) \\ \mathbf{y}_{sub2}(t) \end{bmatrix}$$

결국, 제안된 방법으로 설계된 분산형 보상기는 [그림 2]에서 알 수 있는 바와 같이 각각의 부시스템의 상태를 올바르게 추정 및 제어하고 있음을 알 수 있다. 적용예제의 MATLAB을 이용하여 수행되었으며, [그림 3]은 적용예제의 MATLAB SIMULINK 블록선도이다.

5. 결 론

본 연구에서는 대규모 동적 시스템의 분산형 보상기 설계에 대해서 다루었다. 일반적으로 대규모 시스템을 N 개의 부시스템으로 분할했을 때, 각각의 부시스템에는 다른 부시스템들과의 상호 연관항을 포함하고, 이것은 분산형 관측기나 보상기 설계를 독립적으로 하는데 장애가 된다. 따라서, 본 연구에서는 좌표변환 방법을 이용하여 각각의 부시스템에 존재하는 상호 연관항을 배제한 축차된 동적 시스템을 유도하고, 이에 대한 Luenberger 형 관측기를 직접 설계함으로써 분산형 관측기를 설계하였다. 분산형 보상기는 설계된 분산형 관측기와 극점배치 방법에 의해 안정되게 선택된 지역적 제어이득의 결합으로 설계하였으며, 분리법칙(separation principle)을 유도하여 제안된 분산형 보상기가 관측기 이득과 제어기 이득을 각각 독립적으로 선택 가능함을 보였다. 제안된 좌표변환 방법은 새롭게 유도한 행렬군

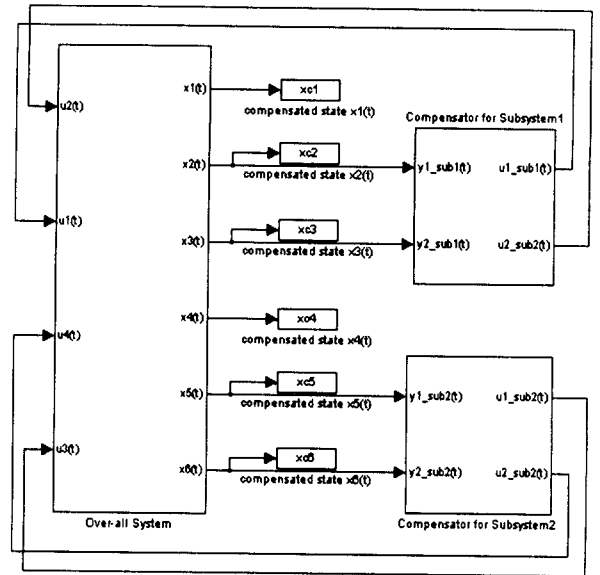


그림 3 적용예제의 MATLAB SIMULINK

Fig. 3 MATLAB SIMULINK scheme for the simulation

에 단위행렬을 포함하는 이유로 기존의 좌표변환 방법에 비해 변환 행렬 선정이 간편하고, [보조정리 1]을 통하여 대상 시스템이 관측 가능하면 제안된 좌표변환 방법에 의해 축차된 동적 시스템 역시 관측 가능함을 보였다. 또한, 제안된 분산형 보상기에 대한 분리법칙(separation principle)의 유도는 원래의 대상 시스템의 추정상태 $\hat{\mathbf{x}}_i(t)$ 을 직접 이용하지 않고, 식(18)에서와 같이 변형된 동적 시스템의 추정상태와 출력벡터 $\begin{bmatrix} \zeta_i(t) \\ \mathbf{y}_i(t) \end{bmatrix}$ 를 이용함으로써 식(20)~식(23)에서 보인 바와 같이 간명함을 알 수 있다.

참 고 문 헌

- [1] M. Saif and Y. Guan, "Decentralized state estimation in large-scale interconnected dynamical systems," *Automatica*, vol 28, no. 1, pp. 215-219, 1992.
- [2] R. J. Veillette and S. W. Nam, "Optimal observer for decentralized control," *Proceeding of the American Control Conferences*, pp. 2391-2395, June, 1993.
- [3] M. Hou and P. C Müller, "Design of decentralized linear function observer," *Automatica*, vol 30, no. 11, pp. 1801-1805, 1994.
- [4] P. Ahn, M. K. Kim and J. H. Jin, "Methodology : Algebraic approach to observer design for large scale systems," *Proc. of IEEE Symposium on Robotics and Control*, vol. I, pp. 273-278, 1999.
- [5] N. Viswanadham and A. Ramakrishna, "Decentralized estimation and control for interconnected systems," *Large Scale Systems* vol. 3, pp. 255-266, 1982.

[6] W. Bachmann, "On decentralized output feedback stabilizability," Large Scale Systems vol. 4, pp. 165-176, 1983.

[7] P. Ahn, M. H. Kim, and D. S. Ahn, "A novel Approach to Unknown Input Observer Design via Block Pulse Function's Differential Operation," Proc. of IFAC World Congress, vol. D, 255-260, 1999.

저 자 소 개



안 비 오 (안 비 오)

1968년 2월 24일 생. 1992년 성균관대 공대 전기공학과 졸업. 1998년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학). 1998년 5월~1999년 8월 한국원자력연구소 Post-Doc. 현재 (주)마이 다스코리아 부설 연구소 책임 연구원

Tel : 02-529-0950, Fax : 02-576-6444

E-mail : piusahn@email25.com