

# 월쉬함수에 의한 비선형계의 해석 및 최적제어에 관한 연구

論 文

49D-7-3

## A Study on the Analysis and Optimal Control of Nonlinear Systems via Walsh Function

金 珍 泰\* · 金 泰 勳\* · 李 明 珪\*\* · 安 斗 守\*\*\*  
(Jin-Tae Kim · Tai-Hoon Kim · Myung-Kyu Lee · Doo-Soo Ahn)

**Abstract** - This paper presents the new adaptive optimal scheme for the nonlinear systems, which is based on the Picard's iterative approximation and fast Walsh transform. It is well known that the Walsh function approach method is very difficult to apply for the analysis and optimal control of nonlinear systems. However, these problems can be easily solved by the improvement of the previous adaptive optimal scheme. The proposed method is easily applicable to the analysis and optimal control of nonlinear systems.

**Key Words** : nonlinear system, fast Walsh transform, optimal control

### 1. 서 론

최근 비행체의 항해, 유도 및 레이더 추적 등과 같은 비선형계에 관한 많은 연구가 진행되고 있다. 이러한 비선형계의 해석 및 제어를 위하여 가장 일반적으로 알려져 있는 방법으로는 상태방정식을 테일러(Taylor) 급수 전개하여 이 결과의 2차 이상을 모두 무시하고 선형 근사화 시킨 후, 기존의 선형제어이론을 적용하는 방법이다. 그러나 이와 같은 방법에서는 동작점(equilibrium point)으로부터 비선형계를 선형화 함으로써 선정된 동작점에 따라 그 결과가 달라질 수 있으며 비선형성이 강한 경우 효과적인 제어가 어렵다는 단점이 있다.

월쉬함수(Walsh function)를 이용한 제어시스템설계에 관한 연구는 1973년 M. S. Corrington이 월쉬함수 유한급수 전개를 이용하여 미·적분방정식의 해를 구하는 방법을 제시한 이후, 1975년 C. F. Chen 과 C. H. Hsiao에 의하여 적분연산행렬이 정의되었으며 이후로 시스템의 해석 및 제어문제에 월쉬함수, 블럭펄스함수(block pulse function), 그리고 하알함수(Haar function)등과 같은 직교함수가 도입되었다.

그후, 선형계 뿐만 아니라 비선형계의 적용이 간편한 월쉬함수 단일항(STWS : single term Walsh series)전개를 이용한 방법이 개발되었는데[3,8,9], 이는 전체구간  $[0, T]$ 에서 월쉬함수 유한급수전개를 이용하는 것은 각 세부구간  $[0, T/m]$ 에서 월쉬함수의 제 1 항만을 이용하고 이를 전체구간에 반복 적용하여 얻은 결과와 같다는 점에 착안되어 개발되었다. 그러나 서로 다른 고유한 구성과 특성을 갖고 있는 월쉬함수를 포함한 직교함

수의 제 1 항은 구간에서 항상 1로써 동일하므로[6,9], STWS 방법은 사용하는 직교함수의 종류에 관계없이 그 방법과 결과가 동일하게 나타나 고유특성을 배제한 방법이라고 할 수 있다. 그리고 STWS를 이용한 방법에서는 전개항수에 해당하는 만큼의 역행렬의 계산을 필요로 하며 그 응용분야에 한계가 있는 것으로 지적되고 있다. 그러나 비선형계의 해석 및 제어를 위한 연구는 그 응용의 간편성에 의하여 STWS를 이용한 연구가 많이 보고되고 있으며, 월쉬함수 유한급수전개나 고속월쉬변환(fast Walsh transformation)을 이용한 연구는 극히 드물게 발표되고 있다.

1973년 Matuszewski는 비선형계의 해석 및 최적제어를 위하여 적응최적계획법(adaptive optimal scheme)[1]을 제시한 바 있다. 이는 비선형 시스템을 Pearson이 제시한 방법으로 모델링한 후 시스템행렬내의 상태벡터를 매 시점 고정된 값으로 처리하고 다음구간에서의 해를 구하여 미소시간동안 비선형계를 제어하며 여기에서 구해진 상태벡터를 이용하여 시스템행렬내의 상태벡터를 새롭게 수정하는 과정을 최종시간까지 반복함으로써 비선형계의 해석 및 최적제어문제를 수행하는 방법이다. 또한 적응최적계획법에 월쉬함수나 블럭펄스함수등과 같은 직교함수를 이용함으로써 비선형계의 최적제어를 보다 개선하기 위한 많은 연구가 진행되어 오고 있다[1,3,4]. 그러나 적응최적계획법에서는 현시점에서 시스템행렬내의 상태벡터를 고정하고 새롭게 수정해 나가는 과정에서 수정된 상태벡터값이 정확하지 않으면 그 이후로 오차가 계속 누적된다는 문제점을 가지고 있다.

본 연구에서는 비선형계의 해석 및 최적제어를 위해 적응최적계획법을 개선한 새로운 방법을 제시하였다. 이는 먼저 비선형계를 Pearson이 제시한 방법에 의하여 선형계의 형태로 나타낸 후, 최초 시스템행렬내에 포함된 상태벡터를 전체구간에서 고정된 값으로 처리하여 선형계로 나타낸다. 다음으로 시스템행렬이 가정한 선형방정식의 해를 구하고, 여기에서 구한 해를 사용하여 다시 시스템행렬의 상태벡터를 고정 처리한다. 현재의 선형방정식의 해와 이전의 과정에서 추정된 상태벡터와의

\* 正 會 員 : 成均館大 電氣電子 및 컴퓨터工學部 博士課程

\*\* 正 會 員 : 慶星大 電氣電子 및 컴퓨터工學部 教授 · 工博

\*\*\* 正 會 員 : 成均館大 電氣電子 및 컴퓨터工學部 教授 · 工博

接受日字 : 1999年 12月 22日

最終完了 : 2000年 6月 1日

오차가 0 이 될 때까지 시스템행렬에 포함된 상태벡터를 새롭게 수정하는 과정을 반복함으로써 비선형계의 해를 구할 수 있는 방법을 제안하였다. 또한 이 방법에 Picard의 반복연산법 [5,6]을 도입하여 역행렬의 연산을 없애고, 고속월쉬변환[6-8]을 이용하여 일반화된 알고리즘으로써 비선형계의 해석 및 최적제어를 보다 간편하게 수행할 수 있도록 하였다.

2. 고속월쉬변환

2.1 월쉬함수 및 월쉬함수의 변환[6-8]

월쉬함수와 같은 직교함수는 미분방정식으로 표현되는 물리계를 간략화 된 대수방정식으로 나타내어 시스템 해석 및 제어 문제를 수행함에 널리 이용되고 있다. 월쉬함수는 함수의 발생 순서의 배열에 따라 세 가지 형태로 분류되는데, 시퀀시(Sequency)배열, 팰리(Paley)배열, 그리고 하다마드(Hadamard)배열로 나뉜다. 월쉬함수는 배열방식에 관계없이  $m (= 2^p, p=0, 1, 2, \dots)$ 개의 함수로 하나의 완전집합을 이루며, 본 연구에서는 시스템론 및 제어이론에 주로 이용되는 팰리배열 월쉬함수를 이용한다. 팰리배열 월쉬함수는 Rademacher함수(이하, Rad함수)의 연속적인 곱에 의해 발생하는 순서에 따라 배열되는 월쉬함수를 말한다. Rad함수는 다음과 같이 표현되며

$$Rad(i, t) = sign[\sin(2^i \pi t)] \tag{2.1}$$

팰리배열 월쉬함수와와의 관계는 다음과 같다.

$$Pal(n, t) = \prod_{i=1}^p Rad(i, t)^{b_i} \tag{2.2}$$

단,  $n = 0, 1, \dots, m-1, p = \log_2 m$

여기서  $b_i$ 는  $n$ 을 2진수로 표현할 때의 각 자릿수 값으로  $n$ 은 다음과 같이 표현된다.

$$n = \boxed{b_p} \dots \boxed{b_2} \boxed{b_1} \tag{2.3}$$

그리고 월쉬함수는 구간  $[0, T)$ 에서 다음과 같은 직교특성(orthogonality)을 갖고 있다.

$$\int_0^T Pal(i, t) Pal(j, t) dt = \begin{cases} T, & (i=j) \\ 0, & (i \neq j) \end{cases} \tag{2.4}$$

단,  $i, j = 0, 1, \dots, m-1$

또한  $m$ 개의 월쉬함수로 표현되는 함수  $x(t)$ 는, 월쉬함수가 부분적으로 연속인 함수값으로 구성되기 때문에, 부분적으로 연속인 형태로 표현된다. 이때  $i$ 번째 세부구간에서의  $x(t)$ 의 값  $\bar{x}_i$ 는 다음과 같다.

$$\bar{x}_i = \sum_{n=0}^{m-1} X_n Pal(i, n) \tag{2.5}$$

단,  $i = 0, 1, \dots, m-1$

또한  $n$ 번째 월쉬계수  $X_n$ 은 다음과 같다.

$$X_n = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \bar{x}_i Pal(n, i) \tag{2.6}$$

단,  $n = 0, 1, \dots, m-1$

여기서  $Pal(n, i)$ 는  $n$ 번째 월쉬함수에 대한  $i$ 번째 세부구간에서의 값을 나타낸다. 식(2.5)를 이산월쉬역변환이라 하고, 식(2.6)을 이산월쉬변환이라 한다.

2.2 고속월쉬변환

고속월쉬변환은 이산월쉬변환을 보다 신속하게 처리하기 위해 사용된다. 월쉬함수  $m$ 항 전개를 이용하는 경우 모든 월쉬함수는  $m$ 개의 세부구간에서 +1 혹은 -1의 값만으로 구성되므로 각 월쉬계수들은 원 함수의 이산값들의 가·감산에 의하여 간단히 계산할 수 있다. 고속월쉬변환 알고리즘은 Welch과 Guinn에 의해 제시되었으며 고속푸우리에변환(fast Fourier transform)의 주파수축을 알고리즘(decimation-in frequency Algorithm)을 기초로 하여 개발되었다[7,8].

고속월쉬변환 알고리즘은 그림 2.1과 같으며 그림에서 점선은 감산을 나타내고 실선은 가산을 나타낸다.

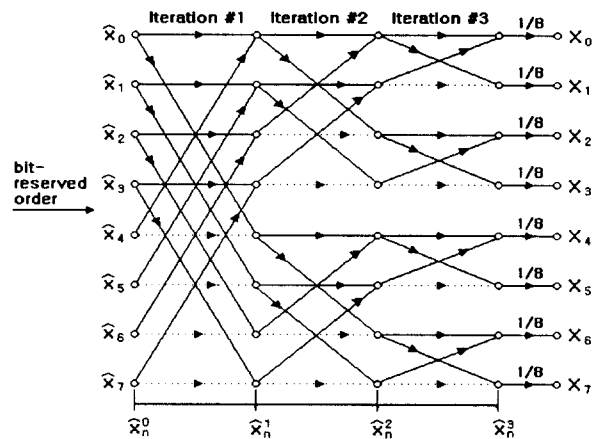


그림 2.1 고속월쉬변환 신호흐름선도

Fig. 2.1 The flow diagram for a paley-order fast Walsh transform

그림에서와 같이 고속월쉬변환은 다음의 과정을 따른다.

- [1] 월쉬함수  $m$ 항 전개를 이용하는 경우 고속월쉬변환은  $\log_2 m$ 개의 단으로 나뉜다.
- [2] 최초의 단( $p=0$ )에  $\bar{x}_i$ 를 비트 자리바꿈(bit-reverse)하여 증가순서대로 재배열하고  $p$ 번째 단과  $p-1$ 번째 단과의 관계는 다음과 같다.

$$x_{(h)}^p = x_{(h)}^{p-1} + x_{(j+h)}^{p-1} \tag{2.7}$$

$$x_{(j+h)}^p = x_{(h)}^{p-1} - x_{(j+h)}^{p-1} \tag{2.8}$$

단,  $j = m/2^p, h = l + k \times 2^v, k = 0, 1, \dots, 2^{p-1} - 1,$   
 $l = 0, 1, \dots, j-1, v = \log_2(j+1)$

[3] 고속월쉬변환과 역변환은 똑같은 과정에 의해 이루어지며 식(2.6)에서 보듯이 고속월쉬변환의 경우에는 식(2.7), (2.8)의 계산결과에  $1/m$ 을 곱하면 된다.

월쉬함수  $m$ 항전개를 이용하는 경우 고속월쉬변환은  $p (= \log_2 m)$ 개의 단계가 필요하고 각 단계에서  $m$ 번의 가·감산이 필요하므로 총  $m \log_2 m$ 번의 가·감산을 통하여 이루어진다.

### 3. 고속월쉬변환을 이용한 비선형계의 해석

#### 3.1 반복법을 이용한 비선형계의 해석

일반적으로 비선형계는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \tag{3.1}$$

단,  $\mathbf{x}(t)$ 는  $n$ 차 상태벡터,  $\mathbf{u}(t)$ 는  $r$ 차 입력벡터이다.

식(3.1)의 비선형계는 Pearson이 제시한 방법에 의해 다음과 같이 표현할 수 있다[1-4].

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t), t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t), t) \mathbf{u}(t) \tag{3.2}$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

여기서 시스템행렬  $\mathbf{A}(\mathbf{x}(t), t)$ 와  $\mathbf{B}(\mathbf{x}(t), t)$ 는 각각  $n \times n, n \times r$ 행렬이다. 식(3.2)의 상태방정식에서 시스템행렬  $\mathbf{A}(\mathbf{x}(t), t)$ 와  $\mathbf{B}(\mathbf{x}(t), t)$ 에 포함되어 있는 상태벡터의 변화를  $\mathbf{x}^L(t)$ 로 알고 있는 값이라 가정하면 다음과 같은 선형시변계로 표현할 수 있다. 단, 최초  $L=0$ 일 때는  $\mathbf{x}^L(t) = \mathbf{x}(0)$ 이다.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}^L(t), t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}^L(t), t) \mathbf{u}(t) \tag{3.3}$$

식(3.3)을 적분하면 다음과 같다.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{A}(\mathbf{x}^L(\tau), \tau) \mathbf{x}(\tau) d\tau + \int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{x}^L(\tau), \tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \tag{3.4}$$

식(3.3)의 최초의 해를  $\mathbf{x}^0(t) = \mathbf{x}_0$ 으로 가정하고 식(3.4)에

대입하면 다음과 같고

$$\mathbf{x}^1(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{g}^0(\tau) d\tau + \int_0^t \mathbf{h}(\tau) d\tau \tag{3.5}$$

$$\text{단, } \mathbf{g}^0(\tau) = \mathbf{A}(\mathbf{x}^L(\tau), \tau) \mathbf{x}^0(\tau),$$

$$\mathbf{h}(\tau) = \mathbf{B}(\mathbf{x}^L(\tau), \tau) \mathbf{u}(\tau)$$

반복 적용할 때  $k$ 번째 결과는 다음과 같다.

$$\mathbf{x}^k(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{g}^{k-1}(\tau) d\tau + \int_0^t \mathbf{h}(\tau) d\tau \tag{3.6}$$

$$\text{단, } \mathbf{g}^{k-1}(\tau) = \mathbf{A}(\mathbf{x}^L(\tau), \tau) \mathbf{x}^{k-1}(\tau), k=1, 2, 3, \dots$$

식(3.3)의 상태방정식이 Lipschitz조건을 만족한다면 Picard에 의한 식(3.6)의 반복연산에 의해 다음을 만족하는

$$e(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}^k(t) - \mathbf{x}^{k-1}(t)\| = 0 \tag{3.7}$$

식(3.3)의 상태방정식의 해가 존재한다[5,6].

여기에서 구한  $\mathbf{x}^k(t)$ 를  $\mathbf{x}^L(t)$ 라하고 다시 식(3.3)의 시스템행렬에 포함된 상태벡터를 새로운 상태값으로 수정한다.

다시 식(3.4)~(3.7)의 과정을 반복하여 다음의 오차가 0으로 수렴하는

$$e(t) = \lim_{L \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}^L(t) - \mathbf{x}^{L-1}(t)\| \tag{3.8}$$

$\mathbf{x}^L(t)$ 를 식(3.2)의 해인  $\mathbf{x}(t)$ 로 결정한다.

#### 3.2 고속월쉬변환을 이용한 해의 결정

비선형계의 해석을 위하여  $\mathbf{x}^{k-1}(t)$ 를 알고 있다고 할 때, 구간  $[0, T)$ 에서 월쉬함수를 적용하여 식(3.6)의 해를 구하는 문제를 고려한다.

식(3.6)의  $\mathbf{g}^{k-1}(\tau) = \mathbf{A}(\mathbf{x}^L(\tau), \tau) \mathbf{x}^{k-1}(\tau)$ 와  $\mathbf{x}_0, \mathbf{h}(\tau) = \mathbf{B}(\mathbf{x}^L(\tau), \tau) \mathbf{u}(\tau), \mathbf{x}^k(t)$ 를 각각 월쉬함수로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{g}^{k-1}(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{G}_i^{k-1} \text{Pal}(i, t) = \mathbf{G}^{k-1} \text{Pal}(t) \tag{3.9}$$

$$\mathbf{x}^k(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{X}_i^k \text{Pal}(i, t) = \mathbf{X}^k \text{Pal}(t) \tag{3.10}$$

$$\mathbf{h}(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{H}_i \text{Pal}(i, t) = \mathbf{H} \text{Pal}(t) \tag{3.11}$$

$$\mathbf{x}_0 = \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{x}_{0,i} \text{Pal}(i, t) = \mathbf{X}_0 \text{Pal}(t) \tag{3.12}$$

여기서  $\mathbf{G}^{k-1}$ 은  $\mathbf{g}^{k-1}(\tau)$ 의 월쉬계수행렬로  $\mathbf{A}(\mathbf{x}^L(\tau), \tau)$

와 바로 전 단계에서 결정된  $x^{k-1}(\tau)$ 의 곱으로부터 고속윌쉬변환을 이용하여 결정할 수 있다.

또한  $X^k = [X_0^k, X_1^k, \dots, X_{m-1}^k]$ 이며 상태벡터  $x^k(t)$ 의 윌쉬계수행렬( $n \times m$ )로 결정해야 할 값이다. 또한  $X_i^k$ 는 상태벡터  $x^k(t)$ 의  $i$ 번째 윌쉬계수로  $n$ 차 벡터이다.

초기조건에 대한 윌쉬계수행렬은  $X_0 = [X_{00}, 0, \dots, 0]$ 로 첫 번째 계수만  $X_{00} = x_0$ 의 값을 취하고 나머지는 모두 0이다.  $H = [H_0, H_1, \dots, H_{m-1}]$ 는  $h(t)$ 의 윌쉬계수행렬( $r \times m$ )이고,  $H_i$ 는  $h(t)$ 에 대한  $i$ 번째 윌쉬계수로  $r$ 차 벡터이다.

식(3.9)~(3.12)의 관계를 식(3.6)에 대입하면 다음과 같이 표현된다.

$$X^k Pal(t) = X_0 Pal(t) + G^{k-1} \int_0^t Pal(\tau) d\tau + H \int_0^t Pal(\tau) d\tau \quad (3.13)$$

임의 함수를 윌쉬함수로 전개할 수 있는 것과 마찬가지로 식(3.13)에서 윌쉬함수의 적분 역시 윌쉬함수로 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$\int_0^t Pal(\tau) d\tau = P_m Pal(t) \quad (3.14)$$

$P_m$ 은 팰리배열 윌쉬함수의 적분연산행렬로 다음과 같다 [8,10].

$$P_m = \begin{bmatrix} P_{\frac{m}{2}} & -\frac{1}{2m} I_{\frac{m}{2}} \\ \frac{1}{2m} I_{\frac{m}{2}} & 0_{\frac{m}{2}} \end{bmatrix} \text{ 단, } P_1 = \frac{1}{2} \quad (3.15)$$

여기서  $m$ 은 전개항수를 나타내며, 식에서 첨자는 해당 정방행렬의 크기를 나타낸다. 이후 편의상 첨자를 생략하고  $P_m$ 을  $P$ 로 표기한다. 식(3.13)에 윌쉬함수의 적분연산행렬을 도입하면 다음과 같다.

$$X^k Pal(t) = X_0 Pal(t) + G^{k-1} P Pal(t) + H P Pal(t) \quad (3.16)$$

식(3.16)의 양변에 있는 윌쉬벡터를 소거하면 다음과 같고

$$X^k = X_0 + G^{k-1} P + H P \quad (3.17)$$

이 대수방정식으로부터  $x^k(t)$ 의 윌쉬계수행렬인  $X^k$ 를 구할 수 있다.

그러나 윌쉬함수의 적분연산행렬  $P$ 에는 많은 0요소가 포함

되어 있다. 윌쉬함수의  $m$ 항 전개 시 적분연산행렬은  $m^2$ 개의 요소 중  $2m-1$ 개의 요소만이  $\pm 2^{-(n+1)}$  ( $n=1, 2, \dots, p$ )의 값을 취하므로 이러한 특성을 이용하여 식(3.17)의  $X^k$ 를 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다.

1)  $i=0$ 인 경우

$$X_i^k = X_{00} + \frac{1}{2^{i+1}} [G_i^{k-1} + H_i] + \sum_{j=1}^i \frac{1}{2^{j+1}} [G_{2^j-1}^{k-1} + H_{2^j-1}] \quad (3.18)$$

2)  $i=2^{n-1}, 2^{n-1}+1, \dots, 2^n-1$  (단,  $n=1, 2, \dots, p-1$ )인 경우

$$X_i^k = -\frac{1}{2^{n+1}} [G_{i-2^{n-1}}^{k-1} + H_{i-2^{n-1}}] + \sum_{j=n+1}^i \frac{1}{2^{j+1}} [G_{i+2^{j-1}}^{k-1} + H_{i+2^{j-1}}] \quad (3.19)$$

3)  $i=2^{n-1}, 2^{n-1}+1, \dots, 2^n-1$  (단,  $n=p$ )인 경우

$$X_i^k = -\frac{1}{2^{n+1}} [G_{i-2^{n-1}}^{k-1} + H_{i-2^{n-1}}] \quad (3.20)$$

식(3.18)~(3.20)에서 구한  $X^k$ 를 고속윌쉬역변환하면  $x^k(t)$ 를 구할 수 있으며 전 단계에서 구한  $x^{k-1}(t)$ 와 비교하여 식(3.7)을 만족하는  $x^k(t)$ 가 식(3.6)의 해가 된다.

이상의 비선형계의 해석 과정을 요약하면 다음과 같다.

- ① 비선형계를 식(3.2)로 모델링하고 시스템행렬  $A(x(t), t)$ 와  $B(x(t), t)$ 에 포함되어 있는 상태벡터의 변화를  $x(t) = x^L(t)$ 로 알고 있는 값이라 가정하고 식(3.3)과 같은 선형시변계로 표현한다. 단, 최초  $L=0$ 일 때는  $x^L(t) = x(0)$ 이다.
- ② 고속윌쉬변환과 Picard의 반복연산을 통하여 식(3.3)의 해를 결정한다.
  - ① 고속윌쉬변환을 이용하여 초기조건에 대한 윌쉬계수행렬  $X_0$  및  $h(t) = B(x^L(t), t)u(t)$ 의 윌쉬계수행렬  $H$ 를 결정한다.
  - ② 바로 전 단계에서 구한  $x^{k-1}(t)$ 와 고속윌쉬변환을 이용하여  $g^{k-1}(t) = A(x^L(t), t)x^{k-1}(t)$ 의 윌쉬계수행렬  $G^{k-1}$ 을 결정한다.
  - ③ 식(3.18)~(3.20)의 과정을 이용하여 식(4.17)의 대수방정식의 해인  $X^k$ 를 결정한다.
  - ④ 고속윌쉬역변환을 이용하여  $X^k$ 에서  $x^k(t)$ 를 구한다.
  - ⑤  $x^k(t)$ 를 전 단계에서 구한  $x^{k-1}(t)$ 와 비교하여 식(3.7)을

만족할 때까지 ②~⑤의 과정을 반복한다.

[3] [2]에서 결정된  $x^k(t)$ 를  $x^L(t)$ 라 하여 다시 식 (3.3)의 시스템행렬에 포함된 상태벡터를 새로운 상태값으로 수정하고, [2]의 과정을 식(3.8)의 오차가 0으로 수렴할 때까지 반복한다.

[4] 오차  $e(t)$ 가 0으로 수렴할 때 이때의  $x^L(t)$ 가 식(3.2)의 해인  $x(t)$ 가 된다.

이상의 고속월쉬변환을 이용한 비선형계의 해석과정을 그림 3.1에서 흐름도로 나타내었다.

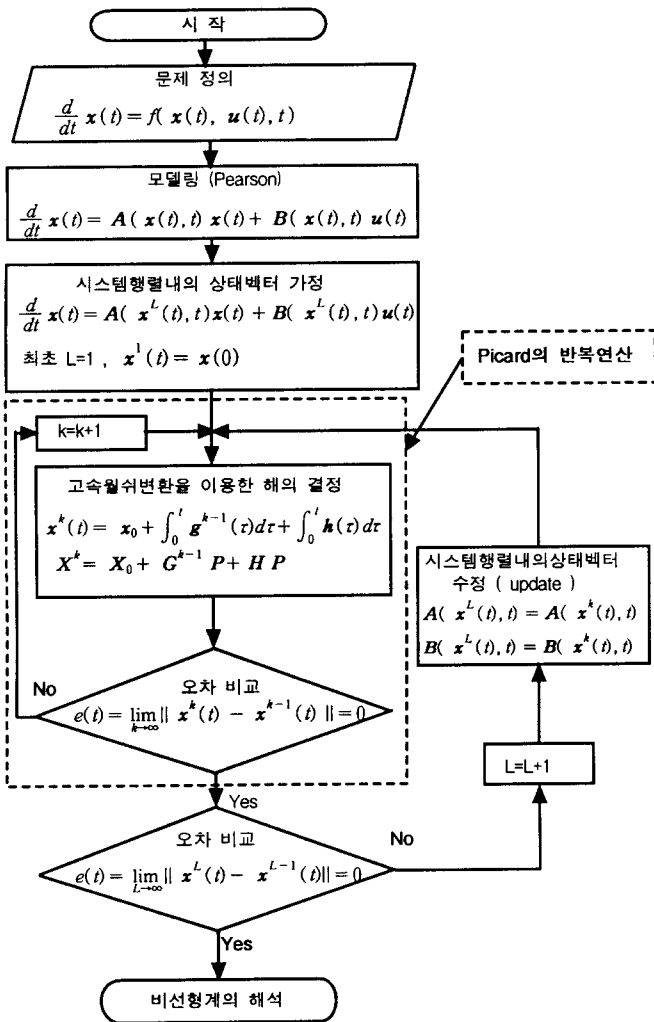


그림 3.1 고속월쉬변환을 이용한 비선형계의 해석 흐름도  
Fig. 3.1 The flow chart for analysis of nonlinear systems using fast Walsh transform

#### 4. 고속월쉬변환을 이용한 비선형계의 최적제어

비선형계를 Pearson이 제시한 방법에 따라 다음과 같이 표현한다.

$$\frac{d}{dt} x(t) = A(x(t), t)x(t) + B(x(t), t)u(t) \quad (4.1)$$

$$x(0) = x_0$$

단,  $x(t)$ 는  $n$ 차 상태벡터이고  $u(t)$ 는  $r$ 차 입력벡터이며 시스템행렬  $A(x(t), t)$ 와  $B(x(t), t)$ 는 각각  $n \times n$ ,  $n \times r$  행렬이다.

평가함수를 다음과 같이 정의하고

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T \{ x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) \} dt \quad (4.2)$$

단,  $Q \geq 0, R > 0$

이 평가함수를 최소화하는 제어입력을 결정하는 문제를 고려한다.

본 연구의 비선형계를 위한 적응형 최적제어는 다음의 과정을 따른다.

[1] 비선형계를 식(4.1)로 모델링한다.

[2] 식(4.1)의 상태방정식에서 시스템행렬  $A(x(t), t)$ 와  $B(x(t), t)$ 에 포함되어 있는 상태벡터의 변화를  $x(t) = x^L(t)$ 로 알고 있는 값이라 가정하여 다음과 같은 선형시변계로 표현한다. 단, 최초  $L=0$ 일 때는  $x^L(t) = x(0)$ 이다.

$$\frac{d}{dt} x(t) = A(x^L(t), t)x(t) + B(x^L(t), t)u(t) \quad (4.3)$$

이에 대한 최적제어입력을 구하면 다음과 같다.

$$u(t) = -R^{-1} B^T(x^L(t), t) \lambda(t)$$

$$= -R^{-1} B^T(x^L(t), t) K(t) x(t) \quad (4.4)$$

여기서  $K(t)$ 는 리카티해이다.

[3] 위에서 구한 제어입력을 이용하여 식(4.1)의 비선형계를 제어하고 식(4.3)의 시스템행렬에 포함된 상태벡터를 제어된 상태값( $x^L(t)$ )으로 새롭게 수정한다.

[4] 이상의 과정들을 다음의 오차가 0으로 수렴할 때까지 반복한다.

$$e(t) = \lim_{L \rightarrow \infty} \| x^L(t) - x^{L-1}(t) \| \quad (4.5)$$

식(4.4)의 리카티해는 다음의 2점 경계치 문제로부터 구할 수 있다[6,8,10,11].

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = F(x^L, t) \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$x(0) = x_0, \quad \lambda(T) = 0$$

$$\text{단, } F(x^L, t) = \begin{bmatrix} A(x^L, t) - B(x^L, t)R^{-1}B^T(x^L, t) \\ -Q \\ -A^T(x^L, t) \end{bmatrix}$$

여기서  $\tau = T - t$ 로 치환하면 식(4.6)은 다음과 같다.

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\tau) \\ \lambda(\tau) \end{bmatrix} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^L, \tau) \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\tau) \\ \lambda(\tau) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_0, \quad \lambda(0) = 0$$

식(4.7)의 상태전이행렬을 다음이라 하면

$$\Phi(\tau) = \begin{bmatrix} \phi_{11}(\tau) & \phi_{12}(\tau) \\ \phi_{21}(\tau) & \phi_{22}(\tau) \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

다음의 관계로부터

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix} = \Phi(\tau) \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\tau) \\ \lambda(\tau) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$\lambda(0) = 0$  이므로 식(4.9)에서  $\lambda(\tau)$ 는

$$\lambda(\tau) = \phi_{21}(\tau) \phi_{11}^{-1}(\tau) \mathbf{x}(\tau) \quad (4.10)$$

임을 알 수 있으며, 식(4.4)와 식(4.10)의 관계로부터 리카티 해는 다음과 같이 결정할 수 있다.

$$\mathbf{K}(\tau) = \phi_{21}(\tau) \phi_{11}^{-1}(\tau) \quad (4.11)$$

상태전이행렬은 다음의 초기조건을 이용하여

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_p \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

식(4.7)의 해를 구함으로써 결정할 수 있고, 리카티해는 식(4.11)에 의하여 결정할 수 있다. 단,  $\mathbf{e}_p$ 는  $p$ 번째 요소만 1이고 나머지 요소는 모두 0인  $n$ 차 열벡터를 나타낸다.

식(4.12)의 초기조건을 이용하여 식(4.7)의  $\mathbf{x}(\tau)$ 와  $\lambda(\tau)$ 를 구하면  $\phi_{11}(\tau)$ 와  $\phi_{21}(\tau)$ 의  $p$ 번째 열벡터가 구해지고 이는 다음의 과정에 의하여 결정된다.

먼저 식(4.7)을 적분하면 다음과 같고

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(\tau) \\ \lambda(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix} + \int_0^\tau \mathbf{F}(\mathbf{x}^L, \tau) \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\tau) \\ \lambda(\tau) \end{bmatrix} d\tau \quad (4.13)$$

식(4.13)을 편의상 다음과 같이 표현한다.

$$\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{y}_0 + \int_0^\tau \theta(\tau) d\tau \quad (4.14)$$

$$\text{단, } \mathbf{y}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\tau) \\ \lambda(\tau) \end{bmatrix}, \quad \theta(\tau) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^L, \tau) \mathbf{y}(\tau), \quad \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_p \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

식(4.14)의 해를 최초  $\mathbf{y}^0 = \mathbf{y}_0$ 로 가정하여 다시 해를 구하

고  $k$ 번 반복할 때 결과는 다음과 같다.

$$\mathbf{y}^k(\tau) = \mathbf{y}_0 + \int_0^\tau \theta^{k-1}(\tau) d\tau \quad (4.15)$$

식(4.15)는 식(3.6)과 같은 형태이며  $\mathbf{y}_0$ 와  $\mathbf{y}^k(\tau)$ ,  $\theta^{k-1}(\tau)$ 를 각각 다음과 같이 월쉬함수로 전개한다.

$$\theta^{k-1}(\tau) = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i^{k-1} \text{Pal}(i, \tau) = \Theta^{k-1} \text{Pal}(\tau) \quad (4.16)$$

$$\mathbf{y}^k(\tau) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{Y}_i^k \text{Pal}(i, \tau) = \mathbf{Y}^k \text{Pal}(\tau) \quad (4.17)$$

$$\mathbf{y}_0 = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{y}_{0,i} \text{Pal}(i, \tau) = \mathbf{Y}_0 \text{Pal}(\tau) \quad (4.18)$$

여기서  $\Theta^{k-1}$ 은  $\theta^{k-1}(\tau)$ 의 월쉬계수 행렬로  $\mathbf{F}(\mathbf{x}^L, \tau)$ 에 바로 전 단계에서 구한  $\mathbf{y}^{k-1}(\tau)$ 를 곱하고 이를 고속월쉬 변환하여 구할 수 있다.

또한  $\mathbf{Y}^k$ 는 상태벡터  $\mathbf{y}^k(\tau)$ 의 월쉬계수행렬로 결정해야 할 값이며,  $\mathbf{Y}_0$ 는 초기조건에 대한 월쉬계수행렬로서 첫 번째 계수만  $\mathbf{Y}_{00} = \mathbf{y}_0$ 의 값을 취하고 나머지는 모두  $\mathbf{0}$ 이다.

식(4.15)에 식(4.16)~(4.18)의 관계 및 적분연산행렬을 도입하면 다음과 같다.

$$\mathbf{Y}^k \text{Pal}(\tau) = \mathbf{Y}_0 \text{Pal}(\tau) + \Theta^{k-1} \mathbf{P} \text{Pal}(\tau) \quad (4.19)$$

식(4.19)의 양변에 있는 월쉬벡터를 소거하면 다음과 같고,

$$\mathbf{Y}^k = \mathbf{Y}_0 + \Theta^{k-1} \mathbf{P} \quad (4.20)$$

3장의 방법에서와 마찬가지로 식(4.20)의 대수방정식에서  $\mathbf{y}^k(\tau)$ 의 계수  $\mathbf{Y}^k$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

1)  $i=0$ 인 경우

$$\mathbf{Y}_i^k = \mathbf{Y}_{00} + \frac{1}{2^{i+1}} \Theta_i^{k-1} + \sum_{j=1}^i \frac{1}{2^{j+1}} \Theta_{2^j-1}^{k-1} \quad (4.21)$$

2)  $i=2^{n-1}, 2^{n-1}+1, \dots, 2^n-1$  (단,  $n=1, 2, \dots, p-1$ )인 경우

$$\mathbf{Y}_i^k = -\frac{1}{2^{n+1}} \Theta_{i-2^{n-1}}^{k-1} + \sum_{j=n-1}^i \frac{1}{2^{j+1}} \Theta_{i+2^j-1}^{k-1} \quad (4.22)$$

3)  $i=2^{n-1}, 2^{n-1}+1, \dots, 2^n-1$  (단,  $n=p$ )인 경우

$$\mathbf{Y}_i^k = -\frac{1}{2^{n+1}} \Theta_{i-2^{n-1}}^{k-1} \quad (4.23)$$

식(4.21)~(4.23)에서 구한  $\mathbf{Y}^k$ 를 고속월쉬역변환하면  $\mathbf{y}^k(\tau)$ 를 구할 수 있으며 전 단계의 반복연산에서 구한  $\mathbf{y}^{k-1}(\tau)$ 와 비교하여 다음의 오차가 0이 될 때까지 반복한다.

$$e(\tau) = \lim_{k \rightarrow \infty} \| \mathbf{y}^k(\tau) - \mathbf{y}^{k-1}(\tau) \| \quad (4.24)$$

식(4.24)를 만족하는  $\mathbf{y}^k(\tau)$ 는 식(4.12)의 초기조건에 의한 결과이며  $\phi_{11}(\tau)$ 와  $\phi_{21}(\tau)$ 의  $p$ 번째 열벡터와 같다. 그러므로 식(4.12)의 모든 초기조건에 대한 식(4.7)의 해를 구함으로써 상태천이행렬  $\phi_{11}(\tau)$ 와  $\phi_{21}(\tau)$ 를 결정할 수 있고 이로부터 리카티해 및 최적제어입력, 최적상태를 구할 수 있다.

그림4.1에서 고속월쉬변환을 이용한 비선형계의 최적제어 흐름도를 나타내었다.

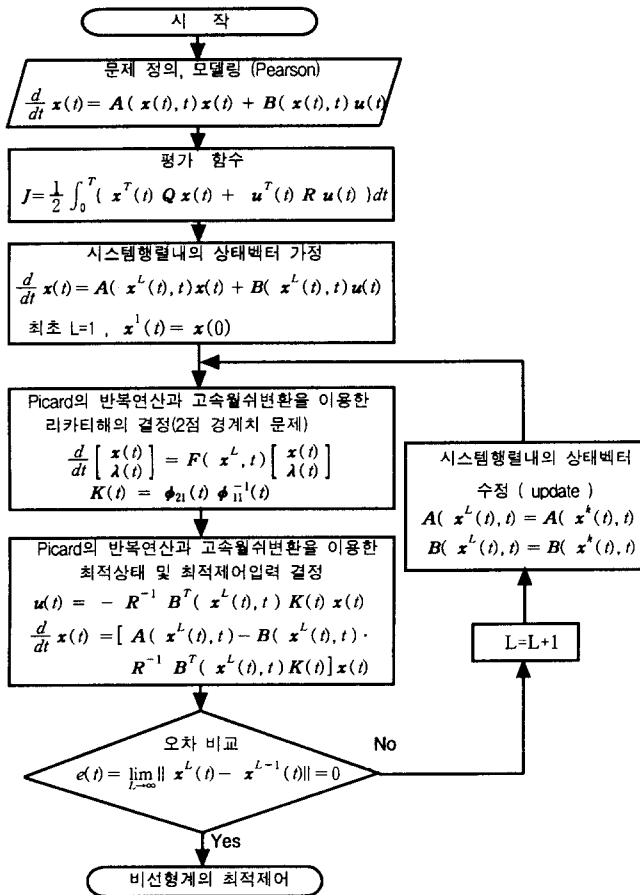


그림 4.1 고속월쉬변환을 이용한 비선형계의 최적제어 흐름도  
 Fig. 4.1 The flow chart for optimal control of nonlinear systems using fast Walsh transform

### 5. 적용예

다음은 진동이 작을 때는 계에 에너지를 주고, 진동이 클 때는 계로부터 에너지를 받는 물리계로써 상평면에서 무한 사이클의 형태로 나타나는 자기제어진동함수인 Van der Pol 시스템이다[1,3,4].

$$\frac{d}{dt} x_1(t) = x_2(t) \quad (5.1a)$$

$$\frac{d}{dt} x_2(t) = -x_1(t) + x_2(t) - x_1^2(t)x_2(t) + u(t) \quad (5.1b)$$

#### 5.1 Van der Pol 시스템의 해석

주어진 비선형 시스템을 Pearson이 제시한 방법에 의하여 다음과 같이 나타낸다.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t), t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t), t)\mathbf{u}(t) \quad (5.2)$$

단,  $\mathbf{A}(\mathbf{x}(t), t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1-x_1^2(t) \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{x}(t), t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

주어진 조건이 다음과 같을 때,

◎ 초기조건 :  $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , 시구간 :  $t \in [0, 5)$

◎ 전개항수 :  $m=64$ , 반복계산의 수렴오차 :  $e(t) \leq 10^{-8}$

최초의 해를  $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \mathbf{x}(0)$ 로 가정하여 시스템 행렬  $\mathbf{A}(\mathbf{x}(t), t)$ 에 대입하면 비선형 시스템인 식(5.2)는 다음과 같은 선형 시변계의 식으로 나타난다.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}^{(1)}(t), t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}^{(1)}(t), t)\mathbf{u}(t) \quad (5.3)$$

식(5.3)에서 구해진 해( $\mathbf{x}(t)$ )를 시스템 행렬 내의 상태벡터 ( $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ )로 새롭게 수정한다.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}^{(2)}(t), t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}^{(2)}(t), t)\mathbf{u}(t) \quad (5.4)$$

위의 과정을 다음의 오차를 만족할 때까지 반복하여 비선형 시스템의 해를 구한다.

$$e(t) = \lim_{L \rightarrow \infty} \| \mathbf{x}^L(t) - \mathbf{x}^{L-1}(t) \| = 0 \quad (5.5)$$

그림 5.1에는 시스템의 입력을 0으로 하고, 전체 시구간 [ 0 , 5 )에서 월쉬함수 64항 전개를 이용하였을 때의 Van der Pol 시스템의 응답을 나타내었다. 여기서 실선은 Runge-Kutta수치 해석방법에 의한 결과이고, 구형파의 형태로 나타나는 것은 본 연구에 의한 결과이다.

#### 5.2 Van der Pol 시스템의 최적제어

식(5.2)에 대한 평가함수가 다음과 같을 때

$$J = \frac{1}{2} \int_0^5 \{ \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) R \mathbf{u}(t) \} dt \quad (5.6)$$

단,  $\mathbf{Q} = \text{diag}\{1, 1\}$ ,  $R = 1$

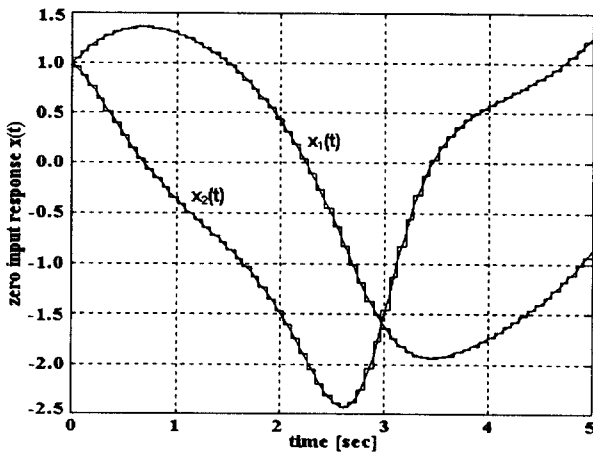


그림 5.1 제안한 방법에 의한 영입력응답  
Fig. 5.1 Zero-input response by the proposed method

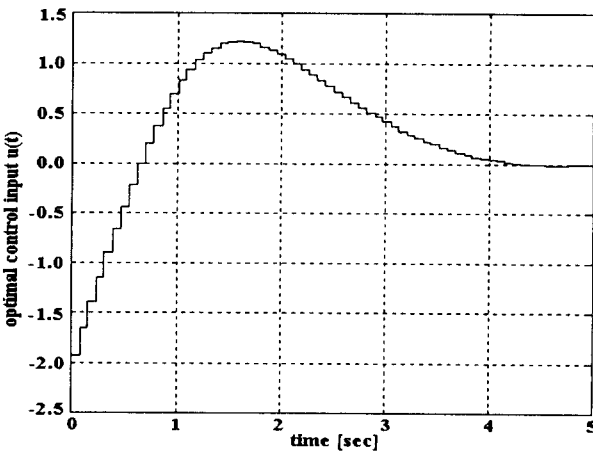


그림 5.2 제안한 방법에 의한 최적제어입력  
Fig. 5.2 Optimal control input by the proposed method

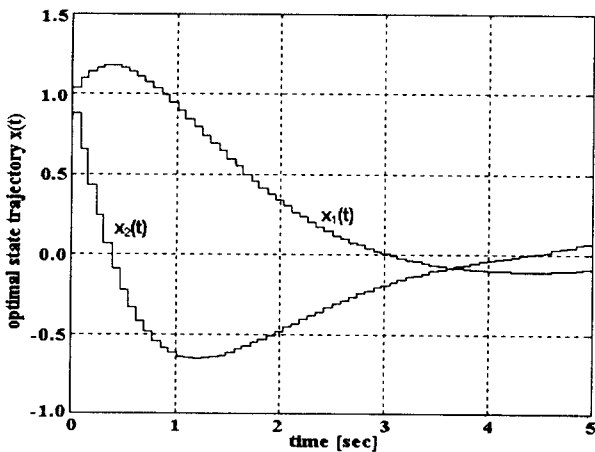


그림 5.3 제안한 방법에 의한 최적상태궤적  
Fig. 5.3 Optimal state trajectory by the proposed method

이러한 평가함수를 최소화하는 최적제어입력을 그림 5.2에 나타내었고, 그림 5.3에는 최적상태궤적을 나타내었다.

표 5.1에서 Van der Pol 시스템의 최적제어에 대한 다양한 연구방법과 그 평가함수 값을 비교하였다. 표 5.1에서 보듯이 본 연구에 의한 방법이 기존의 다른 방법에 비교하여 우수한 결과를 보여주고 있다.

표 5.1 평가함수값 비교  
Table 5.1 Comparisons of performance index

방법	평가함수값	오차율(%)
Pearson[12]	2.6188	2.157
Garrard[13]	2.6335	2.730
Burgart[14]	2.6101	1.818
Matuszewski[1]	2.6373	2.886
Mahamoud[15]	2.5941	1.194
Permar[4]	2.5887	0.983
적용최적계획법(BPF)[3]	2.5993	1.369
본 연구방법	2.5958	1.013
Optimal	2.5635	0.000

### 7. 결 론

본 연구에서는 비선형계의 해석 및 최적제어를 위하여 기존의 적용최적계획법을 개선한 새로운 최적제어방법을 제시하였으며 본 연구에서 얻어진 결론은 다음과 같다.

- (1) 기존의 적용최적계획법을 이용한 방법에서는 시스템 행렬내의 상태벡터를 매 시점 고정 처리하고 다음 시점에서 초기값으로 이용하는 과정에서 현시점의 상태벡터값이 정확하지 않으면, 이후로 오차가 계속 누적된다는 단점을 가지고 있으나 본 논문에서의 방법은 전체구간에서 상태벡터를 수정함으로써 이러한 누적오차를 제거할 수 있다.
- (2) 월쉬함수 유한급수 전개 비선형계에의 적용은 행렬분해 등을 이용하거나 선형화의 과정을 통하여 선형계의 형태로 만들어서 해석 및 최적제어를 수행하고 있으며 그 적용이 어렵고 일반화된 알고리즘을 얻을 수 없다. 그러나 본 연구에서는 비선형계에 적용가능한 일반화된 알고리즘을 개발하였으며, Picard의 반복연산법을 도입하여 기존의 월쉬함수를 이용할 때 발생할 수 있는 전개항수에 해당하는 역행렬 계산도 제거할 수 있어 보다 간편하게 비선형계의 해석 및 최적제어 문제를 수행할 수 있다.
- (3) 기존의 다른 최적제어 방법들과 비교한 결과 본 논문의 방법이 상대적으로 우수함을 볼 수 있어 그 유용성을 확인할 수 있다.

이상의 결론을 통하여 본 연구에서 제시된 고속월쉬변환을 이용한 비선형계의 해석 및 최적제어 방법이 일반화된 알고리



증으로 신뢰성 있게 적용될 수 있으며 보다 간단히 비선형계의 최적제어를 수행할 수 있음을 보았다. 또한 본 연구의 방법은 비선형계 뿐만 아니라 분포정수계 및 확률계에의 적용도 쉽게 이루어질 수 있다.

참 고 문 헌

[1] J. P. Matuszewski, "Suboptimal Terminal Feedback Control of Non-stationary Nonlinear Systems", IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 18, pp.271-274, 1973

[2] J. D. Pearson, "Optimization Methods for Large-scale Systems", (Edited by D.A.Wismer). McGraw-Hill, New York, 1970

[3] 박준훈, "블러펄스변환에 의한 비선형계의 최적제어를 위한 새로운 접근방법에 관한 연구", 성균관대 박사학위논문, 1991

[4] K. D. Permar, "Adaptive optimal hierarchical control of nonstationary nonlinear system", Journal of Computer and Electrical Engineering vol.10, pp.51-57, 1983

[5] Ronald R. Mohler, *Nonlinear Systems*, vol.1, Prentice Hall, 1991

[6] 이명규, "고속윌쉬변환에 의한 선형시변계의 해석 및 최적제어를 위한 새로운 접근방법", 대한전기학회논문지 제47권 제1호, pp.75-82, 1998

[7] K. G. Beauchamp, *Applications of Walsh and Related Functions*, Academic Press, 1984

[8] 안두수, *직교함수와 응용*, 복두출판사, 1997

[9] K. R. Palanisamy, "Analysis of nonlinear systems via single term Walsh series approach", Int. J. System Science vol.13, pp.929-935, 1982

[10] C. F. Chen and C. H. Hsiao, "Design of Piecewise Constant Gains for Optimal Control via Walsh Function", IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 20, no. 5, pp.596-602, 1975

[11] 김진태, 이명규, 안두수, "고속윌쉬변환을 이용한 비선형계의 적용형해석 및 최적제어에 관한 연구", 로보틱스·제어계측·자동화 종합 학술 대회, pp.289-292, 1998

[12] J. D. Pearson, "Approximation method in optimal control", J. Electron Control Vol. 13, pp.435-469, 1962

[13] W. L. Garrard, "An approach to suboptimal feedback control of nonlinear systems", Int. J. Control, Vol. 5, pp.425-435, 1967

[14] J. H. Burgart, "A technique for suboptimal feedback systems", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.14, pp.530-532, 1969

[15] M. S. Mahamoud, "Closed-loop multilevel control of large nonlinear systems via invariant imbedding techniques", Comput. Elect. eng. Vol. 4, pp.3-23, 1977

저 자 소 개



**김진태 (金珍泰)**  
 1972년 1월 1일생. 1997년 경성대 공대 전기공학과 졸업. 1999년 성균관대 대학원 전기전자 및 컴퓨터 공학과 졸업(석사). 1999년~현재 동 대학원 전기전자 및 컴퓨터공학과 박사과정

Tel : 0331-290-7167  
 E-mail : oshkjt@ece.skku.ac.kr



**이명규 (李明珪)**  
 1960년 12월 15일생. 1982년 성균관대 공대 전기공학과 졸업. 1984년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1990년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학박사). 1991~현재 경성대 전기전자 및 컴퓨터공학부 교수

Tel : 051-620-4772  
 E-mail : mklee@star.kyungsung.ac.kr



**김태훈 (金泰勳)**  
 1971년 2월 1일생. 1995년 성균관대 공대 전기공학과 졸업. 1997년 동 대학원 전기전자 및 컴퓨터 공학과 졸업(석사). 1999년~현재 동 대학원 전기전자 및 컴퓨터공학과 박사과정

Tel : 0331-290-7167  
 E-mail : taihoon@netsgo.com



**안두수 (安斗守)**  
 1937년 6월 9일생. 1960년 서울대 공대 전기공학과 졸업. 1964년 서울대 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1982년 중앙대 대학원 전기공학과 졸업(공학박사). 1971~현재 성균관대 전기전자 및 컴퓨터공학부 교수

Tel : 0331-290-7101  
 E-mail : dsahn@ece.skku.ac.kr