

Current Source Disposition of Large-scale Network
with Loop-reduction Drawing Technique

黃 載 皓*
(Jae-Ho Hwang)

Abstract - A new large-scale network geometric analysis is introduced. For a large-scale circuit, it must be analyzed with a geometric diagram and figure. So many equations are induced from a geometric loop-node diagram. The results are arranged into a simple matrix, of course. In case of constructing a network diagram, it is not easy to handle voltage and current sources together. Geometric loop analysis is related to voltage sources, and node analysis is to current sources. The reciprocal transfer is possible only to have series or parallel impedance. If not having this impedance, in order to obtain equivalent circuit, many equations must be derived. In this paper a loop-reduction method is proposed. With this method current source branch is included into the other branch, and disappears in circuit diagram. So the number of independent circuit equations are reduced as much as that of current sources. The number is not $(b-n+1)$, but $(b-n+1-p)$. Where p is the number of current sources. The reduction procedure is verified with a geometric principle and circuit theory. A resultant matrix can be constructed directly from this diagram structure, not deriving circuit equations. We will obtain the last results with the help of a computer.

Key Words : Large-scale network, Loop analysis, Network geometric graph, Loop-reduction drawing technique

1. 서 론

대형 수동회로망은 단순한 회로와는 달리 기하학적 작도에 의한 도형화 작업으로부터 행렬을 도식적으로 구성하고 컴퓨터에 의해 그 결과를 얻는다.[1] 이는 두 가지 과정에 의해 이루어진다. 하나는 대형 회로망을 변형하여 기하학적인 방향성 위상 그래프를 얻는 것이고, 다른 하나는 그 그래프로부터 행렬 형태의 수식을 도출하는 일이다. 첫째 과정에서는 여러 가지 회로 법칙들이 사용된다. 기하학적 도형화 작업의 효과는 여러 원리와 법칙들이 어떻게 도형적 형태로 구현되었느냐에 의존하며, 그래프의 형태도 그에 따라 달라진다. 두 번째 과정에서는 그렇게 얻은 그래프에 구획과 연결 상태에 따른 도형적 원리를 적용하여 수식을 도출한다. 어떠한 법칙과 작도법을 적용하느냐에 따라 최종 수식이 복잡하게도 되고 간단하게도 된다. 가장 효과적인 추출 방법은 회로 해석 원리보다는 회로망 도형과 수식의 간략화에 달려 있다. 이 과정에서 지금까지 문제가 되었던 것 중의 하나는 다수의 전류원과 전압원이 중복으로 존재하는 경우였다. 전원의 중복은 망해석법이나 마디해석법을 일방적으로 적용하기 곤란하다. 이 방식들을 그대로 사용하려면 전원의 등가변환을 통해 한가지 종류의 전원으로 통일시킨

다음 도형화를 시도해야 한다.[2] 전원의 등가 변환이 곤란한 경우에는 기하학적 방식보다는 종래의 수식전개 방식에 의존하는 수밖에 없다. 이는 매우 복잡할 뿐만 아니라, 기하학적 도형화를 위한 여러 단계의 수식화 작업이 수반되고, 전원 형태에 따른 회로망 방정식 도출에도 많은 시간과 노력이 필요하다.[3, 4]

본 연구에서는 등가 변환이 곤란한 전류원이 전압원과 함께 존재하는 대형회로망의 기하학적 해석 기법을 제시한다. 전류원의 회로망 내에서의 순환 경로를 수식적으로 추적하고, 그 궤적을 도형적으로 작도하여 전체 회로망 그래프를 재구성함으로써 종래의 회로망 그래프와는 다른 형태의 축소된 그래프를 얻는다. 회로망 변수들의 수와 계산 시간은 그래프의 구성에 의해 결정되므로, 그래프의 축소는 필산에 따른 수고는 물론이고, 축소된 변수의 수만큼의 계산시간을 줄이는 이중의 효과가 있다. 이 과정에서 회로망 행렬의 랭크가 결정되며 새로운 형태의 경로와 변수가 선정된다.

2. 본 론

RLC 수동소자와 전압원 및 전류원으로 구성된 대형회로망에서 병렬 어드미턴스를 수반하지 않고 전류원 단독으로 연결되어 가지(branch)를 형성한 경우, 이를 기하학적 도형으로 구현하고 망해석법을 적용하는데는 몇 가지 해결해야 할 선결 문제와 수식적 처리가 있다. 본 논문에서는 이러한 전류원을 편의상 "단독전류원(Isolated Current Source)"으로 부르겠다.

* 正 會 員 : 大田産業大 電氣電子工學部 副教授 · 工博
 接受日字 : 2000年 2月 22日
 最終完了 : 2000年 3月 29日

2.1 문제 설정

다수의 전압원과 전류원이 수동 소자들과 함께 공존하고 있는 대형회로망을 그대로 그래프로 작도하였을 때, n 개의 마디와 b 개의 가지가 존재한다. 통상 이러한 그래프는 보목가지의 수인 $(b-n+1)$ 개 만큼의 독립된 방정식을 갖고 있다고 알려져 있다.[5] 그러나 두 종류의 전원이 함께 존재하면 이 그래프를 그대로 사용할 수 없을 뿐만 아니라, 방정식의 개수도 동일하지 않다. 회로망 내의 전류원을 기하학적으로 처리하여 전체 회로망을 전압원들과 수동소자들만으로 재구성하기 위해서는 다음 몇 가지 문제를 해결해야 한다.

문제 1 : 단독전류원을 갖고 있는 가지의 그래프적 처리

전류원 그 자체로는 망해석법을 그대로 적용할 수 없기 때문에 독립된 가지로 그래프를 그릴 수 없다. 회로망 방정식의 변수들의 수와 행렬의 차수는 보목가지의 수에 의해 결정되므로 단독전류원이 있는 가지를 이 수에 포함시킬 것인가를 해결해야 한다.

문제 2 : 망과 망 전류 선정

전류원의 그래프적 처리는 망의 수와 망전류 선정에도 영향을 미친다. 회로망 그래프로의 나무(Tree)에 보목가지를 추가하여 얻어지는 종래의 망 개수 결정과 망 전류(loop current)의 개념을 계속적으로 사용할 수 있는지를 규명해야 한다.

문제 3 : 전류원 전류값의 수식적 표현

기하학적 작도는 회로 법칙의 적용과 수식 전개에 근거한다. 수식 전개 과정 분석을 통한 전류원 전류값의 수식상의 위치에 따른 회로망내 흐름 경로 분석 결과가 기하학적 작도법으로 응용 가능한가를 결정한다.

2.2 단독전류원의 수식적 처리

전류원의 기하학적 처리에 앞서 수식적 해법을 통해 전류원 전류값의 수식적 위치를 규명한다.[6] 단독전류원을 포함한 대형회로망을 그대로 도형화하여 n 개의 마디와 b 개의 가지를 얻었다.

정의 1 : 망대표가지(Loop Representative Branch)란 망해석법(Loop Analysis)상 각 독립 망을 구성하는 가지들의 집합 가운데 다른 망과 중복되지 않는 하나의 가지를 일컫는다.

정의 2 : 망대표전류는 망대표가지의 전류이다.

정리 1 : 마디가 n (개), 가지가 b (개)인 회로망의 기하학적 그래프의 독립 망 각각의 망대표전류를 I_{Bm} , $m=1,2,\dots,(b-n+1)$ 이라 하고, 망대표가지에서 제외된 가지의 전류를 I_{sk} , $k=1,2,\dots,(n-1)$ 라고 할 때, I_{sk} 는 I_{Bm} 의 함수이다.

$$I_{sk} = f(I_{B1}, I_{B2}, \dots, I_{B(b-n-1)}) \tag{1}$$

증명 : 각 독립 망에서의 망대표 전류는 다른 망대표전류와 서로 중복되지 않으므로 각각의 망대표 전류는 오직 해당 망에만 귀속된다. 임피던스 행렬을 Z 라고 할 때 망해석법에 의한 수식 정립과정에서 해가 존재하기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.[3]

$$\text{Rank}(Z) = b - n + 1 \tag{2}$$

각 가지 전류, $I_b(l=1,2,\dots,b)$ 과 망대표전류 I_{Bm} 과의 관계를 변환 행렬 T_N 에 의해 정립한다.

$$I_B = T_N I_{BM} \tag{3}$$

여기서

$$I_{BM} = [I_{B1}, I_{B2}, \dots, I_{B(b-n+1)}]^T, \quad T_N \in R^{l \times m}$$

$$I_B = [I_{b1}, I_{b2}, \dots, I_{bb}]^T$$

I_B 에는 I_{BM} 과 중복되는 것이 $(b-n+1)$ 개 존재하므로, 식 (3)은 두 부분으로 구분된다.

$$\begin{pmatrix} I_{BM} \\ \dots \\ I_{Bf} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ \dots \\ T_M \end{pmatrix} I_{BM} \tag{4}$$

여기서

$$I_{Bf} = [I_{s1}, I_{s2}, \dots, I_{s(n-1)}]^T, \quad I_{Bf} \in R^{(n-1)}$$

$$T_M \in R^{(n-1) \times (b-n+1)}$$

중복부분을 제거하고 I_{Bf} 만의 수식을 세운다.

$$I_{Bf} = T_M I_{BM} \tag{5}$$

□

정리 2 : n (개)의 마디와 b (개)의 가지로 구성된 회로망 그래프에 p (개) 마디가 단독전류원이고 단독전류원이 속한 망의 망대표 전류가 서로 별개일 때, 계산될 전류값 미지수의 개수는 p 만큼 감소하고 $\text{Rank}(Z) = b - n + 1 - p$ 이다.

증명 : 단독전류원 가지의 수가 p (개)이고 각각의 전류는 $I_{Bg}(g=1,2,\dots,p)$ 로서 이미 알려져 있으므로, 식(5)의 I_{Bf} 에서 p (개)만큼의 미지수가 제거된다.

$$I_{Bf} = \begin{pmatrix} I_{sp} \\ \dots \\ I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_N \\ \dots \\ A \end{pmatrix} I_{BM} \tag{6}$$

$$I_{sp} = T_N I_{BP} \quad (7)$$

여기서

$$I_{sp} \in R^{(n-1-p)}, \quad T_N \in R^{(n-1-p) \times (b-n+1)}$$

A의 원소는 모두 상수

$$\text{Rank}(Z) = b - n + 1 - p$$

□

보조정리 1 : 위 정리 2에서 독립망의 수는 $b-n+1-p$ (개)로서 미지수의 수와 같다.

증명 : 자명하다.

□

일반적으로 대형회로망은 n (개)의 마디와 b (개)의 가지로 구성된 기하학적 그래프로 표현하여 $(b-n+1)$ 개의 독립망에서 전압, 전류 관계식으로 구현된다.

$$Z I_l = V_l \quad (8)$$

여기서, $I_l \in R^{(b-n+1)}$, $Z_l \in R^{(b-n+1) \times (b-n+1)}$

$$V_l \in R^{(b-n+1)}$$

회로망 내에 p (개)의 단독 전류원들이 내재되어있는 경우에 위 관계식은 그대로 쓸 수 없고 다음과 같이 변형한다.

보조정리 1에 의해 전류원이 제거된 $(b-n+1-p)$ 개의 독립망에 망대표전류 $I_{BP} \in R^{(b-n+1-p)}$ 를 선정한다. 전류원 가지 전류를 $I_p \in R^p$ 라 할 때, 선정 과정에서 제외된 가지 전류 I_F 는 전체 가지 전류 I_{bl} 에 대하여 $(n-1)$ 개의 원소를 갖는다. 정리 1에 의해 I_F 는 선정된 가지 전류로 환산 가능하다.

$$I_F = (T_{s1} : T_{s2}) \begin{pmatrix} I_{BP} \\ \dots \\ I_p \end{pmatrix} \quad (9)$$

I_p 는 이미 알려진 값이므로 식(9)는 미지수항과 상수항으로 구분된다.

$$I_F = T_{s1} I_{BP} + K_2, \quad K_2 = T_{s2} I_p \quad (10)$$

I_{BP} 와 I_F 는 모두 가지 전류이며 원소 개수의 합이 $(b-p)$ 개로서 전류원 가지를 제외한 모든 가지를 포함한다. $(b-n+1-p)$ 개의 독립망에서 전압, 전류 관계식을 수립한다

$$(Z_{s1} : Z_{s2}) \begin{pmatrix} I_{BP} \\ \dots \\ I_F \end{pmatrix} = V_s \quad (11)$$

식 (11)에 식(10)을 대입하고 I_{BP} 에 대하여 정리한다.

$$I_{BP} = (Z_{s1} + Z_{s2} T_{s1})^{-1} (V_s - Z_{s2} T_{s2} I_p) \quad (12)$$

여기서, $\text{Rank}(Z_{s1} + Z_{s2} T_{s1}) = b - n + 1 - p$

I_{BP} 계산 결과를 가지고 식 (3)에 의해 전체 가지 전류를 산출한다.

$$I_B = T_M \begin{pmatrix} I_{BP} \\ \dots \\ I_p \end{pmatrix} \quad (13)$$

2.3 기하학적 그래프 구현

식(12)를 전압, 전류 관계식으로 변형한다. 관계식의 변수는 I_{BP} 로서 전류원가지를 제거한 망대표 전류의 집합이다.

$$Z_N I_{BP} = V_N \quad (14)$$

여기서,

$$Z_N = Z_{s1} + Z_{s2} T_{s1}, \quad V_N = V_s - Z_{s2} T_{s2} I_p$$

식(14)의 회로망 그래프는 본래 그래프에서 단독전류원 가지 p (개)가 제거된 형태로서 전체 마디의 수 n 은 변함없으나 가지가 $(b-p)$ 개 줄어든 그래프이다. 그에 따라 독립망 및 변수의 수 또한 $(b-n+1-p)$ 개이다. 수식의 임피던스 행렬 Z_N 은 새로 작도된 그래프에서의 임피던스 배열을 갖으며, 전압원 행렬 V_N 에는 그래프 재형성 과정에서 제외되었던 전류원값이 임피던스 행렬과 곱해져서 새로운 전압원 행렬을 형성하고 있다.

2.3.1 임피던스행렬 Z_N 의 배열구조

(1) 전압원과 RLC수동소자로 구성된 회로망

전압원만을 전원으로 갖는 가지의 수가 b (개)인 회로망 그래프에서 각 가지의 전압 $V_i (i=1, 2, \dots, b)$ 은 전압원 값이거나 또는 전압강하 합 $\sum Z_i I_i$ 이다. 여기서 Z_i 는 가지의 임피던스, I_i 는 가지전류이다. 마디의 수가 n (개)일 때, 독립망의 개수 $k = b-n+1$ (개)에 대한 각 망에서의 전압관계식을 세울 수 있다.[2]

$$\sum_j V_j = 0, \quad j=1, 2, \dots, (b-n+1) \quad (15)$$

b(개)의 가지 가운데 b_0 (개) ($b > b_0$)의 가지가 전압원이라면, 식(15)는 전압강하 부분과 전원 부분으로 나누어진다.

$$Z_B I_B = V_B \quad (16)$$

여기서

$$Z_B \in R^{k \times b}, I_B = [I_1, I_2, \dots, I_b]^T$$

$$V_B = [V_1, V_2, \dots, V_B]^T$$

식 (16)의 행렬 Z_B 는 각 가지의 임피던스를 원소로 갖는 행렬 Z_I 와 해당 망에 속해있는 가지들의 선택 여부를 1 과 0 으로 처리한 것을 원소로 갖는 행렬 S_B 의 곱이다.

$$Z_B = Z_I S_B \quad (17)$$

여기서

$$Z_I = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 & \dots & Z_b \\ Z_1 & Z_2 & \dots & Z_b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_1 & Z_2 & \dots & Z_b \end{pmatrix} : \in R^{k \times b}$$

Z_1, Z_2, \dots, Z_b : 각 가지의 임피던스

$$S_B \in R^{b \times b}$$

$a_{ij} = 1$ 망을 구성하는 가지들의 집합에 포함될 때,
망선회 방향과 일치하면 +1, 반대이면 -1
 $a_{ij} = 0$ 망을 구성하는 가지들의 집합에 포함되지 않을 때

식(17)로 식(16)의 좌변을 정리하고 식(3)을 대입한다.

$$Z_I S_B T_N I_{BM} = V_B \quad (18)$$

식(18)의 $Z_0 = Z_I S_B T_N \in R^{(b-n+1) \times (b-n+1)}$

$$Z_0 = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1k} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{k1} & Z_{k2} & \dots & Z_{kk} \end{pmatrix} \quad (19)$$

여기서, 대각선 배열 원소

$$Z_{ii} = \sum_k Z_k, (i = 1, 2, \dots, k) \quad (20)$$

는 k번째 망을 구성하는 가지의 집합에 속해 있는 가지들의 임피던스의 합이다.[7]

$$Z_{ij} = Z_{ij} = \sum_k -Z_k, (i, j = 1, 2, \dots, k) \quad (21)$$

식 (21)은 망선회시 인접 망 선회 방향과 서로 만나는 지점의 임피던스 합이다.

[예제 1] 마디 n=5(개), 가지 b = 8 (개), 망대표전류가지의 집합 = { b_1, b_2, b_5, b_8 } 가지 b_4 와 b_6 에는 전압원 V_4 와 V_6 이 있고 , 나머지 가지의 임피던스는 모두 R 이다. 그림 1 에서 b-n+1 = 4(개)의 망에 식(18)을 적용하여 Z_B 와 T_N 을 통해 Z_0 를 산출한다.

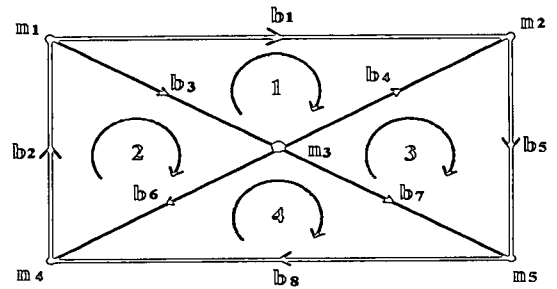


그림 1 n=5, b=8 인 회로망 그래프 (예)
Fig. 1 Network graph(ex.) n=5, b=8

$$Z_B = \begin{pmatrix} R & 0 & -R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R & 0 & -R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R & R \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$T_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T \quad (23)$$

$$Z_0 = Z_{BT_N} = \begin{pmatrix} 2R & -R & 0 & 0 \\ -R & 2R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2R & -R \\ 0 & 0 & -R & 2R \end{pmatrix} \quad (24)$$

□

(2) 단독 전류원이 내지된 회로망

회로망그래프를 구성하는 b(개)의 가지 가운데 단독전류원이 p(개)의 가지에 존재할 때, 정리 2와 식(12)에 의해 전류원가지는 제거되고, (b-n+1-p)개 독립망과 미지수에 의한 새로운 관계가 성립한다. 새로 작성된 회로망 그래프에는 (b-p)개의 가지가 있다. (b-n+1-p)개의 독립망들에서 각 가지 전류에 의한 전압,전류 관계식을 수립한다.

$$Z_{BO} I_{BO} = V_{BO} \quad (25)$$

여기서

$$Z_{BO} \in R^{(b-n+1-p) \times (b-p)}$$

$$I_{BO} = [I_1, I_2, \dots, I_{(b-p)}]^T \in R^{(b-p)}$$

$$V_{BO} = [V_1, V_2, \dots, V_{(b-p)}]^T \in R^{(b-p)}$$

임피던스행렬 Z_{BO} 는 모든 가지의 임피던스와 망을 구성하는 가지들의 집합의 관계에서 규명된다.

$$Z_{BO} = Z_{IO} S_{BO} \tag{26}$$

여기서

$$Z_{IO} = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 & \dots & Z_{(b-p)} \\ Z_1 & Z_2 & \dots & Z_{(b-p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_1 & Z_2 & \dots & Z_{(b-p)} \end{pmatrix} \in R^{(b-n+1-p) \times (b-p)}$$

$$S_{BO} \in R^{(b-p) \times (b-p)}$$

$a_{ij} = 1$ 망을 구성하는 가지들의 집합에 포함될 때,
 망선회 방향과 일치하면 +1, 반대이면 -1
 $a_{ij} = 0$ 망을 구성하는 가지들의 집합에 포함되지 않을 때

망대표전류 행렬이 I_{BM} 일 때, 정리 1 에 의해 I_{BO} 는 I_{BM} 으로 표현 가능하다.

$$I_{BO} = T_{NO} I_{BM} \tag{27}$$

식 (26),(27)을 식 (25)에 대입하여 임피던스 행렬을 도출한다.

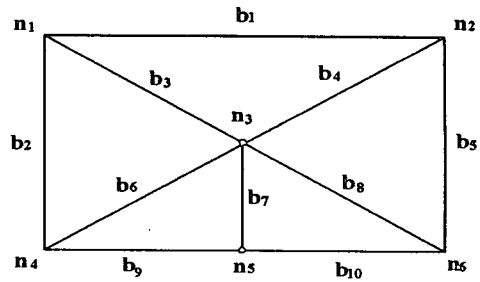
$$Z_N = Z_{IO} S_{BO} T_{NO} \tag{28}$$

식 (28)의 Z_N 은 식 (19) 의 Z_O 와 동일한 형태이며 식 (12)와 같다.

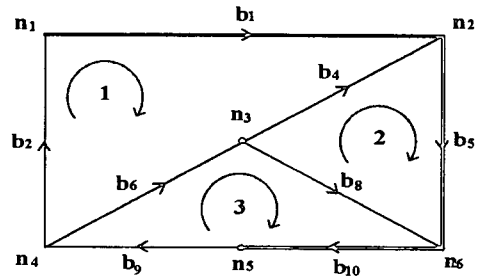
$$Z_N = Z_{IO} S_{BO} T_{NO} = Z_{S1} + Z_{S2} T_{S1} \tag{29}$$

여기서, $Z_N \in R^{(b-n+1-p) \times (b-n+1-p)}$ 이고 원소들의 형태는 식 (19)~(21) 과 동일하다.

[예제 2] 전류원가지 $\{b_3, b_7\}$, 전압원 가지 $\{b_2, b_9\}$ 에는 전압원 V_2 와 V_9 , 마디 $n=6$ (개), 가지 $b=10$ (개) 로 구성된 그림 2 회로망그래프가 있다. 나머지 가지의 임피던스 모두 R 이다.



(a) 전류원이 내재된 회로망 그래프



(b) 전류원 가지가 제거된 그래프

그림 2 전류원이 내재된 회로망 그래프의 재구성
 Fig. 2 Reconstruction of network graph including current sources

전류원 가지 b_3 와 b_7 를 제거하고 $b-n+1-p = 3$ (개) 망에 식 (28)을 적용하여 Z_N 을 산출한다. 새로 구성된 회로망 그래프의 망대표전류를 갖는 가지의 집합은 $\{b_1, b_5, b_{10}\}$ 이다.

$$Z_{IO} S_{BO} = \begin{pmatrix} R & 0 & -R & 0 & -R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & R & 0 & -R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R & R & 0 & R \end{pmatrix} \tag{30}$$

$$T_{NO} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T \tag{31}$$

$$I_{BO} = [I_1 \ I_2 \ I_4 \ I_5 \ I_6 \ I_8 \ I_9 \ I_{10}]^T \tag{32}$$

$$I_{BM} = [I_1 \ I_5 \ I_{10}]^T \tag{33}$$

식 (30) 과 (31)을 곱하여 Z_N 을 구한다.

$$Z_N = \begin{pmatrix} 3R & -R & -R \\ -R & 3R & -R \\ -R & -R & 3R \end{pmatrix} \tag{34}$$

□

(3) 임피던스 행렬 Z_N 산출을 위한 회로망 그래프 작도법

그래프 작도는 정리 2 와 식 (14) 에 의한다. 작도 순서는 다음과 같다.

- i) 대상 회로망의 기하학적 그래프를 작도하고 마디와 가지를 설정한다.
- ii) 전류원가지들이 제거된 새로운 그래프를 작도한다.
- iii) 가지의 방향과 독립망을 선정하고 망대표전류와 가지를 설정한다.

작도가 완료되었으면 식 (19)~(21)의 요령에 따라 행렬 Z_N 의 원소들을 찾아 배열한다.

2.3.2 전원행렬 V_N 의 배열 구조와 기하학적 구현

(1) 수식 및 그래프를 통한 V_N 의 정성적 해석

변형된 회로망 그래프의 전압,전류 관계식 (14)의 V_N 에는 단독전류원 행렬 I_P 가 포함되어 있다. $Z_{\Sigma} T_{\Sigma} I_P$ 는 전압의 형태이며 본래의 전원행렬 V_S 와 함께 전압값을 갖는 행렬을 형성한다. 식(11)의 $Z_{\Sigma} I_P$ 는 망대표전류와 전류원을 갖는 가지에서 제외된 가지의 전류원에 의한 전압강하이다. 식(10)의 $T_{\Sigma} I_P$ 는 전류원 가지가 접속된 마디에서 I_P 와 전류원의 접속상태를 보여준다. 따라서 식(14)의 $Z_{\Sigma} T_{\Sigma}$ 는 전류원이 접속된 마디를 통해 연결된 가지들을 가리키고 $Z_{\Sigma} T_{\Sigma} I_P$ 는 그 가지에서의 전압강하이다. 이 경우 가지들은 망대표전류 선정이나 전류원에서 제외된 나머지 가지이다. 전류원 전류 흐름이 그 접속된 마디를 통해 망대표전류가지가 아닌 다른 가지로 이어져 다시 전류원에 접속된 상대편 마디로 귀속된다. 이 과정에 참여한 가지의 집합 B_I 은 다음과 같다.

$$B_I = \{ \text{전류원 가지들, } Z_{\Sigma} T_{\Sigma} \text{의 해당 임피던스가 속한 가지들} \} \quad (35)$$

이 집합은 매 전류원 흐름 방향을 따라 하나의 경로를 형성한다. 그리고 회로망 본래의 전압원 행렬 V_S 와 합하여져 전원행렬 V_N 을 형성한다. 이 과정을 수식적으로 정립하는 것은 회로망 그래프의 마디와 가지 선정의 임의성 때문에 어렵고, 다음 그림의 회로망 그래프를 통해 고찰한다.

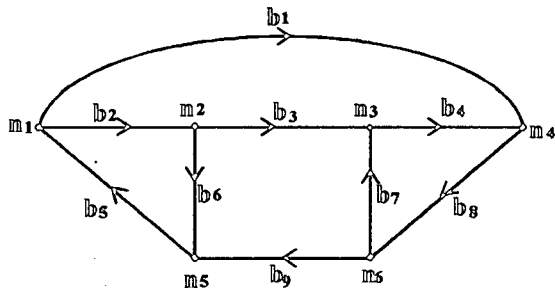


그림 3 전압원과 전류원이 내재된 회로망 그래프(예)
Fig. 3 Network graph including voltage and current sources(ex.)

그림 3 회로망 그래프 조건 : 가지 b_1 에 전류원 I_1 , 가지 b_6 에 전압원 V_6 , 모든 가지의 임피던스는 R_i , $i = 1, 2, \dots, 9$. 이 조건에 의해 마디 $n=6$ (개), 가지 $b=9$ (개), 전류원 가지 $p=1$ (개) 인 회로망 그래프의 망대표 전류 가지의 집합 $\{b_2, b_3, b_4\}$ 을 선정한다. 식(9)에서 T_{Σ} , 식(11)에서 Z_{Σ} 를 구하여 $Z_{\Sigma} T_{\Sigma}$ 를 계산한다.

$$T_{\Sigma} = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1]^T \quad (36)$$

$$Z_{\Sigma} = \begin{pmatrix} R_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_7 & 0 & R_9 \\ 0 & 0 & -R_7 & R_8 & 0 \end{pmatrix} \quad (37)$$

$$Z_{\Sigma} T_{\Sigma} = [R_5 \ R_8 \ R_9] \quad (38)$$

식 (38)에서 B_I 을 구한다.

$$B_I = \{ b_1, b_5, b_8, b_9 \} \quad (39)$$

다음 그림 4 에 회로망 그래프에서의 전류원 순환 경로를 보였다.

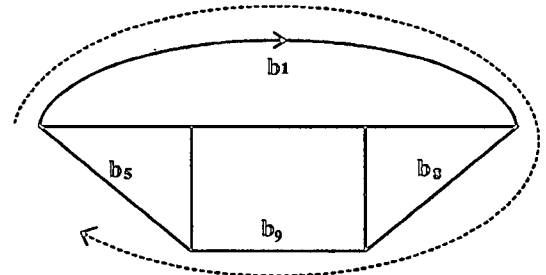


그림 4 전류원 순환 경로
Fig. 4 Current source circulating course

(2) 전원 행렬 V_N 산출을 위한 회로망 그래프 작도법

전류원 흐름 경로는 식 (35)을 근거로 다음 순서에 의해 작도한다.

- i) 전류원 가지에 접속된 마디 가운데 전류가 유출되는 마디에서 시작하여 인접된 마디들과의 연결 마디를 통해 전류원 가지 상대편 마디로 귀환시킨다. 이 때 망대표전류마디는 연결마디에서 제외된다.
- ii) 식(35)의 집합 가운데 전류원 가지를 제외한 나머지 접속 가지들의 임피던스에 전류원 전류값을 곱하여 $Z_{\Sigma} T_{\Sigma} I_P$ 를 산출한다.
- iii) V_S 와 ii)의 결과를 합하여 행렬 V_N 을 완성한다.

2.4 망축소작도법과 전압,전류 관계식

앞의 2.3.1 과 2.3.2 의 결과를 종합하여 전류원이 내재된 회로망을 기하학적으로 해석한다. 본래의 그래프가 전류원 가지 수 만큼 축소되므로, 이 방식을 "망축소작도법"으로 명한다. 본 작도법에는 두 가지 유형의 그래프가 제시된다. 하나는 식(28)의 임피던스 행렬 Z_N 을 구하기 위한 그래프이고, 다른 하나는 식(14)의 $Z_{\Sigma}T_{\Sigma}I_P$ 를 얻기 위한 그래프이다. 대상 회로망을 이 두 종류의 그래프로 작도한 다음 Z_N 과 V_N 을 찾아 수식을 정립한다. 작도법과 수식 추출을 종합 정리하면 다음과 같다

[도형 1] Z_N 산출을 위한 도형

- i) 대상 회로망을 마디와 가지로 구성된 그래프로 변형한다.
- ii) 위 그래프에서 전류원가지를 제거한 축소 그래프를 작도한다.
- iii) 축소 그래프에서 마디(n), 가지(b), 전류원 가지(p)의 개수를 고려한 (b-n+1-p)개의 독립망을 선정하고 각 망의 망대표전류 가지를 선택한다. 이때 하나의 망을 형성하는 가지의 집합의 원소 가운데 망대표전류 가지는 하나씩 존재한다.
- iv) 망대표전류 가지의 방향을 망 선회 방향과 일치시키고, 그 밖의 가지의 방향을 선정한다.

[도형 2] V_N 산출을 위한 도형

- i) 전류원 가지가 포함된 본래의 그래프에 전류원 전류의 방향과 일치한 가지의 방향을 표시한다.
- ii) 전류원 가지의 유출 방향과 접속된 마디에서 출발하여 근접 연결된 가지들을 순회하고 상대방 마디로 귀환하는 경로를 그린다.

위 도형들이 완성되었다면 도형 1에서는 Z_N , 도형 2에서는 V_N 을 다음 요령에 의해 산출한다.

- Z_N 산출 -

- i) Z_N 은 정방행렬로서 대각선 배열은 각 망을 구성하는 가지들의 집합에 속한 가지들의 임피던스를 모두 합성한 결과를 위치시킨다.
- ii) 대각선 이외의 배열은 해당 망 선회시 상대방 망의 선회와 교차되는 지점 가지의 임피던스 (-) 값을 위치시킨다.

- V_N 산출 -

V_N 은 V_S 와 $Z_{\Sigma}T_{\Sigma}I_P$ 의 두 부분으로 되어있다.

- i) V_S 는 도형 1에서 구한다. 각 망 선회시 해당 망에 속한 전압원 값들을 합성하여 배열한다.

- ii) $Z_{\Sigma}T_{\Sigma}I_P$ 는 도형 2에서 산출한다. 전류원 경로 곡선에 속한 가지의 임피던스와 전류원 값을 곱한다.
- iii) i) 과 ii) 의 결과를 합성하여 V_N 을 완성한다.

2.5 망축소작도법에 의한 대형 회로망 기하학적 해석(예)

다음 예제를 통해 망축소작도법에 의한 대형회로망 해석을 고찰한다.

[예제 3]

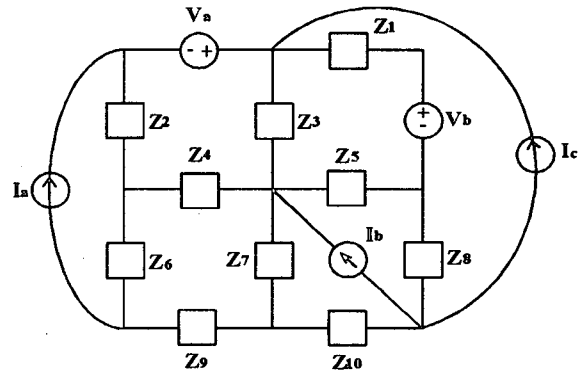


그림 5 전류원이 내재된 회로망(예)
Fig. 5 Network including current sources(ex.)

그림 5의 회로망 그래프를 작도한다.

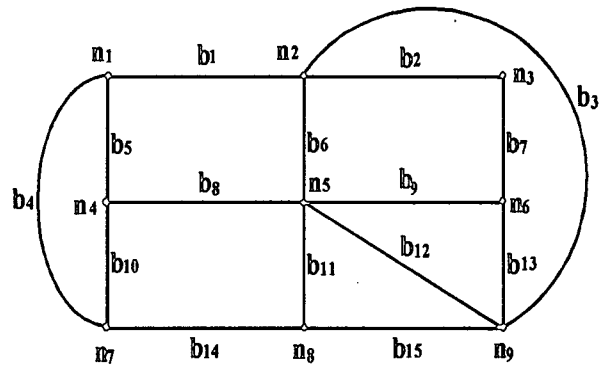


그림 6 그림 5의 회로망 그래프
Fig. 6 Network graph of Fig. 5

그림 6에서 마디 n=9(개), 가지 b=15(개), 전류원 가지 p=3(개) 이고, 전류원 가지 집합은 { b3, b4, b12 } 이다. 앞절의 작도법에 의해 도형 1을 작도한다.

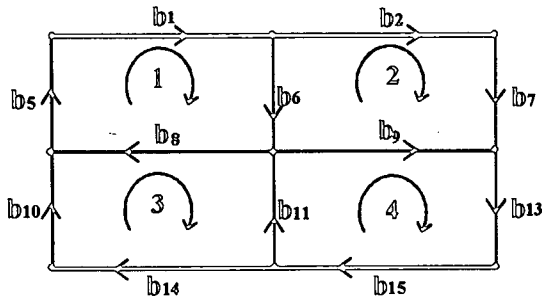


그림 7 전류원 가치가 제거된 그래프
Fig. 7 Graph not including current source branch

그림 7에서 망대표전류 가치의 집합 $\{b_1, b_2, b_{14}, b_{15}\}$, 독립망의 개수 = $b - n + 1 - p = 4$ (개)이다. Z_N 과 V_S 를 완성한다.

$$Z_N = \begin{pmatrix} Z_2 + Z_3 + Z_4 & -Z_3 & -Z_4 & 0 \\ -Z_3 & Z_1 + Z_3 + Z_5 & 0 & -Z_5 \\ -Z_4 & 0 & Z_4 + Z_6 + Z_7 + Z_9 & -Z_7 \\ 0 & -Z_5 & -Z_7 & Z_5 + Z_7 + Z_8 + Z_{10} \end{pmatrix} \quad (40)$$

$$V_S = [V_a \quad -V_b \quad 0 \quad 0]^T \quad (41)$$

도형 2를 작도한다.

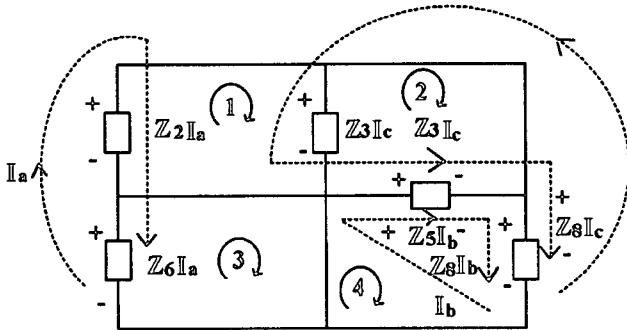


그림 8 전류원 순환 경로
Fig. 8 Current source circulating course

그림 8에서 $Z_{S2}T_{S2}T_P$ 를 구한다.

$$Z_{S2}T_{S2}T_P = \begin{pmatrix} -Z_2I_a + Z_3I_c \\ -(Z_3 + Z_5)I_c \\ -Z_6I_a \\ (Z_5 + Z_8)(I_b + I_c) \end{pmatrix} \quad (42)$$

식 (40),(41) 및 (42)를 합성한다.

$$\begin{pmatrix} Z_2 + Z_3 + Z_4 & -Z_3 & -Z_4 & 0 \\ -Z_3 & Z_1 + Z_3 + Z_5 & 0 & -Z_5 \\ -Z_4 & 0 & Z_4 + Z_6 + Z_7 + Z_9 & -Z_7 \\ 0 & -Z_5 & -Z_7 & Z_5 + Z_7 + Z_8 + Z_{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{b1} \\ I_{b2} \\ I_{b4} \\ I_{b15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_a + Z_2I_a - Z_3I_c \\ -V_b + (Z_3 + Z_5)I_c \\ Z_6I_a \\ -(Z_5 + Z_8)(I_b + I_c) \end{pmatrix} \quad (43)$$

□

3. 결 론

대형회로망의 기하학적 해법을 통한 전류원 처리의 이론적 근거와 기하학적 작도법을 제시하였다. 망축소작도법이라고 명한 이 작도법을 사용함으로써 전류원과 전압원이 혼재한 대형회로망의 망해석에 기초한 기하학적 접근이 가능하다. 전류원 전류값을 중심으로 종합적인 수식들을 모두 풀어야 했던 종래의 복잡함을 간단한 작도를 통해 해결할 수 있다. 망순환 전류 산출에만 의존하였던 방식에서 탈피하여 망대표가지와 그 전류를 변수로 선정한 후, 그 변수들로 수동소자 가치의 임피던스와 전원 가치의 전원값을 엮는 새로운 전압,전류 관계식을 수립하였다. 이 과정에서 전류원 가치의 위치와 개수를 고려한 새로운 그래프가 작도되었으며, 전류원 가치수를 고려한 $(b-n+1-p)$ 개의 독립망이 조성되었다. 이 방식에 의해 회로망 그래프를 작도하여 행렬 형태의 최종 전압,전류 관계식을 추출하면 회로 해석은 일단 종료된다. 그 나머지는 컴퓨터의 몫이다.

참 고 문 헌

- [1] W. H. Kim and H. E. Meadows, Modern Network Analysis, John Wiley & Sons, 1971.
- [2] 김수중, 신편회로망이론, 반도출판사, 1995.
- [3] 장세훈 외3 공편, 최신회로망이론, 청문각, 1992.
- [4] T. Ozawa, "The Complex Basis in Electrical Networks and Its Application to Network-element-Value Calculation", IEEE Trans. Circuits and Systems, pp. 561-566, 1990.
- [5] J. B. Murdoch, Network Theory, McGraw-Hill, 1970.
- [6] 황재호, "전류원을 포함한 대형 수동회로망의 도형적 해석", 대한전기학회추계학술회의 논문집(B), pp. 730-732, 1999. 11.
- [7] N. Balabanian and T. A. Bickart, Electrical Network Theory, John Wiley & Sons, 1969.

저 자 소 개



황 재 호 (黃 載 皓)

1956년 4월 20일생. 1982년 아주대 전자공학과 졸업. 1986년 서울대 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1994년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학박사). 1982년~1992년 전력연구원 부장대리 근무. 1992년~현재 대전산업대 전기전자공학부 부교수

Tel : 042-821-1136

E-mail : hwangjh@hyunam.tunt.ac.kr