

## Wiener-Hopf Design of the Two-Degree-of-Freedom Controller for the Standard Model

趙容奭\* · 崔君鎬\*\* · 朴基憲\*\*\*  
(Yong-Seok Cho · Goon-Ho Choi · Ki-Heon Park)

**Abstract** - In this paper, Wiener-Hopf design of the two-degree-of-freedom(2DOF) controller configuration is treated for the standard plant model. It is shown that the 2DOF structure makes it possible to treat the design of feedback properties and reference tracking problem separately. Wiener-Hopf factorization technique is used to obtain the optimal controller which minimizes a given quadratic cost index. The class of all stabilizing controllers that yield finite cost index is also characterized. An illustrative example is given for the step reference tracking problem which can not be treated by the conventional  $H_2$  controller formula.

**Key Words** : Wiener-Hopf controller, Two-Degree-of-Freedom, Standard Model

### 1. 서 론

1970년대 중반부터 다변수 시스템에 대한 주파수 영역의 제어기 설계가 활발히 연구되어왔다. 여러 연구 내용중  $H_2$  와  $H_\infty$  제어기법이 가장 대표적인 결과로 볼 수 있는데 이 분야의 최근 연구에서는 그림 1과 같은 표준 모델을 주로 사용하고 있다[1, 2]. 이 모델은 제어계 내에 존재하는 모든 신호를 측정변수, 제어변수, 조정변수, 외부입력신호로 구분하고, 가중치 블록을 포함하는 제어계내의 모든 블록을 일반화 플랜트로 표현하는 추상적인 구조를 가지고 있다. 이 모델은 단순한 구조를 가지면서도 매우 광범위한 제어문제를 다룰 수 있어 피드백 제어계의 공통적 성질의 이해와 수식의 표준화에 크게 기여하였다. 그러나 지나친 단순화로 인하여 몇 가지 단점을 가지고 있는 것도 사실이다.

첫째, 물리적으로 성격이 판이하게 다른 여러 외부 입력 신호를 하나의 신호 군으로 묶어서 처리하게되어 기준입력에 대한 처리가 어려워진다. 여러 외부입력 신호중 특히 기준입력 신호는 제어기 설계측면에서 매우 중요한 비중을 차지한다. 계단 혹은 램프형태의 기준입력에 대하여 응답성능이 우수하도록 제어기를 설계하는 것은 거의 모든 제어시스템의 설계규격에 포함되는 기본적인 내용이다. 따라서 제어기의 설계과정에서 계단 및 램프 신호를 기준입력으로 설정할 수 있게 하는 제어기법의 개발의 필요성은 매우 중요하게 된다. 불행히도 그림 1의 표준모델에서는 앞에서 언급한

허수축에 극(pole)을 가지는 기준입력에 대한 응답설계가 불가능하거나[2] 매우 불편하다[1].

둘째, 제어기 구조로 인한 설계상의 특징을 이해하고 분석 가능하게 하는 통찰력을 제공하지 못한다는 것이다. 이론적으로는 그림 1의 표준모델의 공식으로도 2 혹은 3 자유도 제어기[3, 4]의 공식을 유도할 수 있다. 그러나 이것은 제어기의 해를 구하는 것으로 한정되며 제어기의 구조에 의한 설계상의 장점을 따지는 물리적 통찰력은 부족하다. 구체적으로 2자유도 제어기의 설계의 분리성[3], 비결합 제어기 설계[5] 등의 문제를 분석하려면 그림 1의 표준 모델로는 불가능하게 된다.

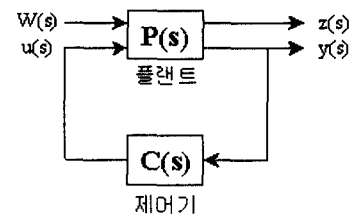


그림 1 표준모델

Fig. 1 The standard model

이러한 결점을 보완하기 위하여 제안된 구조가 2자유도를 가지는 표준모델 구조이다[6](2장의 그림 2 참조). 이 구조는 기준입력을 별도로 분리시켜 독립적으로 처리 가능케 하며 또한 2자유도 구조의 제어기가 가지는 구조상의 장점을 해석적으로 분석 가능하게 한다. 전통적인 단순모델에 대한 2자유도 설계는 [3, 7] 등에서 볼 수 있으며 [6]에서는 표준모델의 2자유도 제어 문제를 다루었으나 기준 입력의 범위를 너무 임의로 허용하여 해의 존재를 보장하는 가정이 너무 까다롭고 최종공식이 매우 복잡하여 계산상의 어려움이 존

\* 正會員 : 建陽大 情報電子通信工學部 專任講師 · 工博

\*\* 正會員 : (株)韓美 技術研究所 研究員 · 工博

\*\*\* 正會員 : 成均館大 電氣電子 및 컴퓨터工學部 教授 · 工博

接受日字 : 1999年 2月 25日

最終完了 : 1999年 9月 3日

재한다. 본 논문에서는 2자유도 구조의 표준모델에 대한  $H_2$  제어기공식을 유도하였다. 기존의 결과[1, 2]와는 다르게 계단 및 램프 형태의 기준입력에 대해서도 설계 가능성을 명백히 보였고 또한 표준모델에 대해서도 기존의 2자유도 구조가 가지는 설계상의 장점[3]이 똑같이 적용됨을 보였다.

본 연구에서 사용되는 수학적 표기는 다음과 같다.  $G^{-1}(s)$ ,  $G^T(s)$ ,  $\det G(s)$  와  $TrG(s)$ 는 각각 전달함수  $G(s)$ 의 역행렬, 전치행렬(transpose), 행렬식(determinant)과 주 대각합(trace)이다. 행렬  $G_*(s)$ 는  $G^T(-s)$ 를 표시한다.  $G(s)$ 의 부분분수 전개에서  $-\infty < Re s \leq 0$ ,  $0 < Re s < \infty$ 와  $s = \infty$ 의 극점으로 만들어진 항을 각각  $\{G(s)\}_+$ ,  $\{G(s)\}_-$ ,  $\{G(s)\}_\infty$ 로 표시한다. 차수 표시  $G(s) \leq 0(s')$ 는  $G(s)$ 의 어떤 항도  $s \rightarrow \infty$ 에서  $s'$ 보다 빠르게 증가하지 않는다는 표시이다. 기호  $< >$ 는 기대값을 표시한다.

## 2. 표준모델의 2자유도 위너-호프 제어기

본 연구에서 제시하는 표준모델의 2자유도 제어기 구조는 다음과 같다.

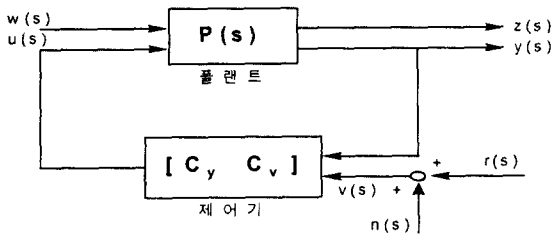


그림 2 2자유도 표준모델 제어 시스템  
Fig. 2 The standard model adopting the 2DOF controller

위의 모델이 그림 1의 구조와 다른 점은 기준입력 신호를 외부 입력항  $w(s)$ 와 구분해서 처리하는 것이다. 또한  $r(s)$ 의 파워 스펙트럼 밀도(power spectral density)  $G_r(s)$ 를 0으로 놓으면 기존의 모델로 환원되므로 기존 모델의 확장 모델로도 볼 수 있다. 그림 2에서 신호  $w(s)$ ,  $u(s)$ ,  $z(s)$ ,  $y(s)$ ,  $v(s)$ 는 각각  $r_1 \times 1$ ,  $r_2 \times 1$ ,  $m_1 \times 1$ ,  $m_2 \times 1$ ,  $q \times 1$ 의 차원이고, 항상  $m_1 \geq q$ 의 관계가 성립한다고 가정한다. 기준 입력  $r(s)$ 는 크기가 불규칙 변수(random variable)인 형상확정 함수(shape deterministic function)로 가정한다. 즉,

$$r(s) = [a_1 r_1(s) \ a_2 r_2(s) \ \dots \ a_q r_q(s)]^T \quad (1)$$

이고 계수  $a_i$ 들은  $\langle a_i \rangle = 0$ ,  $i = 1 \rightarrow q$ ,  $\langle a_i a_j \rangle = a_{ij}$ 의 성질을 갖고  $n$ ,  $w$ ,  $a_i$ 들은 서로 독립적이라고 가정한다. 이 경우  $r(s)$ 의 파워 스펙트럼 밀도  $G_r(s)$ 는

$$G_r(s) = \langle r(s) r_*(s) \rangle = [a_{ij} r_i(s) r_j^*(s)] \quad (2)$$

으로 정의한다. 그림 2에서 제어기 전달 행렬  $T_c(s)$ 는 2자

유도 제어기 구조, 즉

$$T_c(s) = [C_y(s) \ C_v(s)] \quad (3)$$

이고, 플랜트  $P(s)$ 의 입출력 관계식은

$$\begin{bmatrix} z(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \quad (4)$$

이다. 플랜트 입력  $u(s)$ 는

$$u(s) = [C_y(s) \ C_v(s)] \begin{bmatrix} y(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \quad (5)$$

이며 식 (4), (5)로부터

$$z(s) = T_{zw}(s) w(s) + T_{zv}(s) v(s) \quad (6)$$

의 식을 유도할 수 있는데 여기서

$$T_{zw}(s) = P_{11}(s) + P_{12}(s) R_y(s) P_{21}(s) \quad (7)$$

$$R_y(s) = (I - C_y(s) P_{22}(s))^{-1} C_y(s) \quad (8)$$

$$T_{zv}(s) = P_{12}(s) R_v(s) \quad (9)$$

$$R_v(s) = (I - C_y(s) P_{22}(s))^{-1} C_v(s) \quad (10)$$

이다. 식(8), (10)에서  $[C_y(s) \ C_v(s)]$ 행렬을  $[R_y(s) \ R_v(s)]$ 행렬로 표시하면

$$[C_y(s) \ C_v(s)] = (I + R_y(s) P_{22}(s))^{-1} [R_y(s) \ R_v(s)] \quad (11)$$

이 되는데 (8), (10), (11) 식으로부터  $C_y(s)$ ,  $C_v(s)$ 와  $R_y(s)$ ,  $R_v(s)$ 는 1:1 대응 관계가 있음을 알 수 있으므로 제어기  $C_y(s)$ ,  $C_v(s)$ 를 구하는 대신 대응되는  $R_y(s)$ ,  $R_v(s)$ 를 구해도 된다. 실제로 전달행렬  $C_y$ ,  $C_v$ 는 제어기의 구현시에만 필요한 표현인데 비해  $R_y$ ,  $R_v$ 는 페루프 제어계의 물리적 성질을 나타내기 때문에 설계관점에서는 더 큰 의미가 있다. 따라서 앞으로 우리는 전달행렬  $R_y$ ,  $R_v$ 를 제어기로 부르기로 하고 모든 제어기 설계공식도  $R_y$ ,  $R_v$ 에 대해 표현하겠다. 일단 필요한  $R_y$ ,  $R_v$ 가 정해진 다음에 이 값을 구현할 수 있는 제어기 전달행렬  $C_y$ ,  $C_v$ 는 (11)식에 의해 구할 수 있다.

본 연구에서 제시하는 위너-호프 제어기 설계는 페루프 시스템을 내부적으로 안정시키고 제곱형 평가함수를 최소화하는 제어기를 찾는 것이다. 일반적인 표준모델[1, 2]의 경우에는  $z(s)$ 의 평균파워(average power)를 평가함수로 생각하지만 본 연구에서는 기준입력을 별도로 고려하므로 평가함수를 오차항(error)

$$e(s) = z(s) - T(s)r(s) \quad (12)$$

의 평균파워로 생각한다. 특별히 조정변수  $z(s)$ 를 기준입력  $r(s)$ 를 추종하는 출력항  $z_1(s)$ 와 기타항  $z_2(s)$ 로 분리하여  $z(s) = [z_1^T(s) \ z_2^T(s)]^T$ 로 표시하는 경우 합리적인  $T(s)$ 의 값은  $T(s) = [I \ 0]^T$ 일 것이며 이 경우 (12)식은

$$e(s) = \begin{bmatrix} z_1(s) - r(s) \\ z_2(s) \end{bmatrix} \quad (13)$$

의 형태가 될 것이다. 식 (12)의 형태는 이러한 경우를 포함하는 가장 일반적인 형태를 생각한 것이다. 이제 평가함수

는 다음과 같이 식 (12)의 오차 항에 대한 평균파워로 잡을 수 있다.

$$E = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} T_r [Q(s)G_e(s)] ds \quad (14)$$

여기서  $G_e(s)$ 는 오차  $e(s)$ 의 파워 스펙트럼 밀도이며 가중치 행렬  $Q(s)$ 는 허수축에서 해석적이고  $Q(s) = Q_*(s)$ ,  $Q(j\omega) \geq 0$ 의 조건을 만족한다고 가정한다. 이 경우 항상  $Q(s) = \widehat{Q}_*(s) \cdot \widehat{Q}(s)$ 의 인수분해가 가능하므로 (14)의 평가함수는

$$\widehat{e}(s) = \widehat{Q}(s)z(s) - \widehat{Q}(s)T(s)r(s) \quad (15)$$

의 평균 파워와 같아지며  $\widehat{Q}(s)$ 항은 플랜트  $P(s)$ 와 행렬  $T(s)$ 에 흡수될 수 있다. 따라서  $Q(s)$ 를 생략하여도 일반성을 잃지 않으므로 최적적인 평가함수는

$$E = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} T_r G_e(s) ds \quad (16)$$

로 하기로 한다. 이제  $w$ 와  $n$ 의 파워스펙트럼 밀도를 각기  $G_w, G_n$ 으로 표시하면 식 (6), (12), (16)과  $v = r + n$ 의 관계로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$E = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} T_r [T_{zw}G_wT_{zw*} + (T_{zv} - T)G_r(T_{zv} - T)* + T_{zv}G_nT_{zv*}] ds \quad (17)$$

$$= E_y + E_v \quad (18)$$

여기서

$$E_y = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} T_r [T_{zw}G_wT_{zw*}] ds \quad (19)$$

$$E_v = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} T_r [(T_{zv} - T)G_r(T_{zv} - T)* + T_{zv}G_nT_{zv*}] ds \quad (20)$$

이다. 일반적으로 평가함수를 유한하게 하고 폐루프 시스템을 내부적으로 안정하게 하는 많은  $(R_y, R_v)$ 가 있다. 따라서 주어진 플랜트  $P(s)$ 에 대해서 위의 조건을 만족하는  $(R_y, R_v)$ 을 먼저 찾은 후, 그 중에서 평가함수  $E$ 를 최소화하는  $(\widetilde{R}_y, \widetilde{R}_v)$ 을 찾는 것이 이 장의 목적이다. 이를 위해 먼저 주어진 시스템을 안정화시키는  $(R_y, R_v)$ 을 찾는 문제를 다루기로 한다.

**정의 1** ; 그림 2와 같은 구조의 시스템에 대해서 대응되는 제어기  $(C_y, C_v)$ 가 전체 시스템을 내부적으로 안정하게 할 때, 주어진 플랜트에 대해서 실 유리행렬  $(R_y, R_v)$ 는 허용 가능(acceptable)하다고 한다.

다음은 그림 2의 플랜트  $P(s)$ 가 안정화 가능성을 보장하는 조건이다[1].

**가정 1** ; 플랜트  $P(s)$ 는 폐루프평면에서 숨은 극점(hidden pole)이 없고

$$\Psi_{p22}^+ = \Psi_p^+ \quad (21)$$

이다. 여기서  $\Psi_{p22}$ 와  $\Psi_p$ 는  $P_{22}(s)$ 와  $P(s)$ 의 특성(charac-

teristic) 분모식[8]이고  $\Psi^+$ 와  $\Psi^-$ 는 각각 다항식  $\Psi$ 의 폐루프평면과 개좌평면에 위치한 영점들만을 갖는 다항식이다. 이제,

$$P_{22} = A^{-1}B = B_1A_1^{-1} \quad (22)$$

의 좌(left) 및 우(right) 다항식 서로소 쌍(coprime pair)을 생각하자. 이 경우 잘 알려진 바와 같이

$$A_1Y_1 = YA, \quad X_1Y = Y_1X \quad (23)$$

$$AX + BY = I \quad (24)$$

$$X_1A_1 + Y_1B_1 = I \quad (25)$$

을 만족하는 다항식 행렬  $X_1, Y_1, X, Y$ 를 항상 찾을 수 있다.

**정리 1** ; 가정 1이 만족될 때 허용 가능한  $(R_y, R_v)$ 의 형태는 다음과 같다.

$$[R_y \ ; \ R_v] = A_1[-(Y_1 + KA) \ ; \ H_1] \quad (26)$$

여기서  $H_1$ 과  $K$ 는  $\det(X_1 - KB) \neq 0$ 을 만족하며 폐루프평면에서 해석적인 임의의 실유리 행렬이다. 이 때 (26)식의  $(R_y, R_v)$ 행렬에 대응되는 제어기  $(C_y, C_v)$ 행렬은 다음과 같다.

$$T_c = [C_y \ C_v] = (X_1 - KB)^{-1}[-(Y_1 + KA) \ H_1] \quad (27)$$

증명 : 참고문헌 [3, 9] 참조 ■

가정 1이 만족될 때, 행렬  $P_{11}(s) + P_{12}(s)A_1(s)Y_1(s)P_{21}(s), P_{12}(s)A_1(s), A(s)P_{21}(s)$ 들은 모두 폐루프평면에서 해석적 임의 알려져 있다[10].

식 (7), (9), (18)와 (26)식의 Youla 제어기의 형태를 보면 평가함수  $E$ 를 최소화하는  $(R_y, R_v)$ 을 찾는 문제는 각각 평가함수  $E_y$ 를 최소화하는  $R_y$ 를 찾는 것과 평가함수  $E_v$ 를 최소화하는  $R_v$ 를 찾는 것과 동가임을 알 수 있는데, 이와 같은 분리성이 2자유도 설계의 큰 특징인데 이에 대한 자세한 내용은 [3, 9]에서 찾을 수 있다.

이제  $E_y$ 와  $E_v$ 값을 최소화시키는 제어기  $R_y, R_v$ 에 대한 공식을 서술하기로 하자. 먼저 정방행렬(square matrix)  $\Lambda(s)$ 와  $\Omega(s)$ 를 다음의 식을 만족하는 워너-호프 스펙트럼 해라고 하자.

$$A_1 \cdot P_{12} \cdot P_{12} A_1 = \Lambda \cdot \Lambda \quad (28)$$

$$A P_{21} G_w P_{21} \cdot A_* = \Omega \Omega \quad (29)$$

**가정 2** ; 유한 허수축에서  $\det(A_1 \cdot P_{12} \cdot P_{12} A_1)$ 과  $\det(A P_{21} G_w P_{21} \cdot A_*)$ 는 0이 아니다(이 조건은  $\Lambda^{-1}$ 와  $\Omega^{-1}$ 는 유한 허수축에서 해석적이라는 조건과 동가이다).

**가정 3** ;  $G_w(s)$ 는 유한 허수축에서 해석적이고  $P_{11}G_wP_{11*} \leq O(s^{-2})$ 을 만족한다.

**가정 4** ; 다음 차수 관련 식이 만족된다 ;

$$(P_{21}G_wP_{21*})^{-1} \leq O(s^{-2\nu_1}), \quad (P_{12} \cdot P_{12})^{-1} \leq O(s^{-2\nu_2}) \quad (30.a)$$

$$P_{22}(s) \leq O(s^{-\nu_0}) \quad (30.b)$$

인 경우  $\nu_0 + \nu_1 + \nu_2 \geq 0$  이다.

가정 2와 3은  $H_2$  제어기 문제[1, 2]에서 표준적으로 채택 하는 가정들이다. 상태공간 모델을 사용하는 [2]의 경우,  $G_w(s)$ 는 단위(identity)행렬로 가정하고  $P_{11}(s)$ 는 진분수 적(strictly proper) 행렬로 가정하는데 가정 3의 내용은 이 러한 가정과 등가적이다. 또한 [2]에서는 전달행렬  $P_{12}(s)$ 와  $P_{21}(s)$ 의 허수축의 랭크(rank) 조건을 가정하는데 가정 2의 내용은 이러한 조건과 등가이다. 가정 4의 내용은 플랜 트  $F(s)$ 가 분수적(proper)일 경우에는 대부분 만족되는 조 건이다.

**정리 2** ; 가정 1-4가 만족될 때 다음의 내용이 성립한다.

1)  $E_y$  값을 유한하게 하는 모든 허용 가능한  $R_y$ 의 형태는

$$R_y = -A_1 \Lambda^{-1} (\{ \Lambda A_1^{-1} Y \Omega \}_- + \{ \Gamma \}_+ + Z_y) \Omega^{-1} A \quad (31)$$

이며 이 때  $Z_y$ 는  $\leq O(s^{-1})$ 이고 폐우평면에서 해석적인 임의의 행렬이고

$$\Gamma(s) = \Lambda_*^{-1} A_1 \cdot P_{12} \cdot P_{11} G_w P_{21} \cdot A_* \cdot \Omega_*^{-1} \quad (32)$$

이다

2)  $E_y$ 를 최소화시키는 허용 가능한  $\tilde{R}_y$ 는

$$\tilde{R}_y = -A_1 \Lambda^{-1} (\{ \Lambda A_1^{-1} Y \Omega \}_- + \{ \Gamma \}_+) \Omega^{-1} A \quad (33)$$

이며, 이 식은  $Z_y \equiv 0$ 일 때의 대응되는 값이다.

3) 식 (31)의  $R_y$ 를 사용하는 경우의 평가함수를  $E_y$ 로, 최 적 제어기에 의한 평가함수를  $\tilde{E}_y$ 로 표시하면

$$E_y = \tilde{E}_y + \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{j\infty} T_r(Z_y Z_{y*}) ds \geq \tilde{E}_y \quad (34)$$

이 성립한다.

4) (31)식의 제어기는

$$R_y(s) \leq O(s^{-\nu_1 - \nu_2 - 1}) \quad (35)$$

$$C_y(s) \leq O(s^{-\nu_1 - \nu_2 - 1}) \quad (36)$$

을 만족한다.

증명 : 부록 참조 ■

**가정 5** ; 행렬  $T$ 는 분수적(proper)이고 폐우평면에서 해석 적이며 파워 스펙트럼 밀도  $G_r(s)$ 는 다음 식을 만족한다.

$$G_r(s) \leq O(s^{-2}) \quad (37)$$

**가정 6** ;  $G_n, \Omega_0^{-1}$ 은 유한 허수축에서 해석적이다. 여기 서  $\Omega_0$ 는 다음 식을 만족하는 위너-호프 스펙트럼 해이다.

$$G_r + G_n = \Omega_0 \Omega_0^* \quad (38)$$

**가정 7** ; 다항식 행렬  $A_p, B_p$ 가  $P_{12}$ 의 좌 다항식 서로소 분해일 때, 즉

$$P_{12} = A_p^{-1} B_p \quad (39)$$

일 때,  $A_p T G_r T^* A_{p*}$ 는 유한 허수축에서 해석적이다.

가정 5의 내용은 앞의 가정 3의 차수 조건과 같은 성격의 조건이며 가정 6은 대부분의 경우 쉽게 만족되는 조건이다. 가정 7의 내용은 Doyle의 다수[2]의 논문과 본 논문과의 근 본적인 차이점을 나타내는 부분이다. 플랜트의 전달함수가 적분기를 포함하고 있는 경우 단위계단 입력에 대한 케환 시스템의 응답성능이 최적이 되도록 설계하는 것은 공정제 어기 설계의 중요한 내용중의 하나이다(마찬가지로, 2중적분 기를 가지는 경우는 램프함수를 기준입력으로 사용하게 된 다). 따라서 플랜트의 성질에 따라서 기준입력  $r(s)$ 의 파워 밀도함수  $G_r(s)$ 는 계단함수 혹은 램프함수를 포함할 수 있 도록 허수축 극(pole)을 갖는 것을 허용해야한다. 참고문헌 [2]의 공식을 이용하는 경우, 기준입력신호  $r(s)$ 는 외부입력 신호  $w(s)$ 에 포함시켜 풀게되는데, [2]에서는 외부입력 신 호  $w$ 를 백색잡음으로 가정하고 있고 필요한 경우에는 가중 함수를  $w$ 신호 다음의 위치에 블록 형태로 삽입하고, 이 블 러를 일반화된 플랜트에 포함시키도록 되어있다. 이 경우, 가중함수의 형태는 안정함수로 제한하기 때문에 앞에서 언 급한 허수축 극을 가지는 입력신호에 대한 제어기 설계는 불가능하게된다. 가정 7의 내용은 [2]의 이러한 단점을 해결 하고 있다. 즉,  $G_r(s)$ 가 허수축 극을 가지고 있어도 플랜트 의 분모항에 해당하는  $A_p(s)$ 가 같은 허수축 영(zero)을 가 지고 있으면  $A_p(s) T G_r(s) T^* A_{p*}(s)$ 는 극과 영의 상쇄로 인하여 허수축 극이 없게되고 이러한 경우의  $G_r(s)$ 에 대해 서는  $H_2$  제어기의 설계가 가능하게되는 것이다.

**정리 3** ; 가정 1-7이 만족될 때 다음의 내용이 성립한다.

1)  $E_v$  값을 유한하게 하는 모든 허용 가능한  $R_v$ 의 형태는

$$R_v = A_1 \Lambda^{-1} (\{ \Gamma_r \}_+ + Z_v) \Omega_0^{-1} \quad (40)$$

이다. 여기서,

$$\Gamma_r = \Lambda_*^{-1} A_1 \cdot P_{12} \cdot T G_r \Omega_0^{-1} \quad (41)$$

이며,  $Z_v$ 는  $\leq O(s^{-1})$ 이고 폐우평면에서 해석적인 임의의 행렬이다.

2)  $E_v$ 를 최소화시키는 허용 가능한  $\tilde{R}_v$ 는

$$\tilde{R}_v = A_1 \Lambda^{-1} (\{ \Gamma_r \}_+) \Omega_0^{-1} \quad (42)$$

이며, 이 식은  $Z_v \equiv 0$ 일 때의 대응되는 값이다.

3) (40)식의  $R_v$ 를 사용하는 경우의 평가함수를  $E_v$ 로, 최적 제어기에 대한 평가함수를  $\tilde{E}_v$ 로 표시하면 다음 식이 성립 한다;

$$E_v = \tilde{E}_v + \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{j\infty} T_r(Z_v Z_{v*}) ds \geq \tilde{E}_v \quad (43)$$

4) (40)식의 제어기를 사용하는 경우  $(G_r + G_n)^{-1} \leq O(s^{-2\nu_3})$  이면

$$R_v(s) \leq O(s^{-\nu_2 - \nu_3 - 1}), \quad C_v(s) \leq O(s^{-\nu_2 - \nu_3 - 1}) \quad (44)$$

이 성립한다.

증명 : 부록 참조

요약하면, 식(31),(40)은 전체 시스템을 내부적으로 안정화시키고 주어진 제곱형 평가함수를 유한하게 하는 제어기의 형태를 규정하고 있으며, 자유변수  $Z_y$ 와  $Z_v$ 를 영(zero)으로 할 때의 식(33), (42)는 평가함수를 최소화하는 최적 제어기이다.

### 3. 예제

이 장에서는 앞에서 유도된 공식을 이용하여 2자유도 제어기를 설계하는 과정을 예시하였다. 이 예제에서는 공식의 적용과 기준입력 처리 방법을 쉽게 설명하기 위해 단일력 단출력의 플랜트 제어 문제를 다루었는데 다변수 제어에 관한 예제는 [9]를 참조 바란다.

전달함수가  $P(s) = s - 1/s(s-2)$ 인 플랜트에 대하여 그림 3과 같은 2자유도 제어기 설계문제를 생각하자.

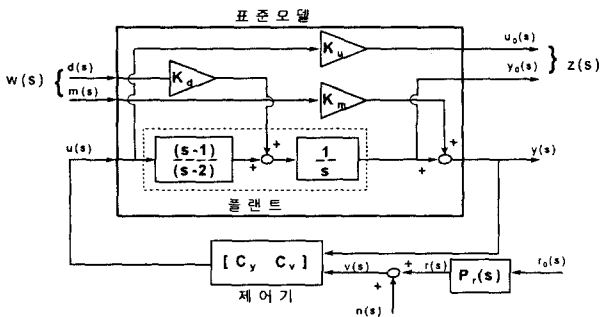


그림 3 2자유도 제어기 설계 구조  
Fig. 3 A 2DOF controller design scheme

그림에서 가중치 값  $K_u, K_d, K_m$ 은 모두 1로 하고  $w$ 와  $n$ 의 파워밀도함수  $G_w, G_n$ 은 각각  $G_w = I_2, G_n = 1$ 로 하자. 이 예제에서 플랜트는 적분기를 포함하고 있으므로 계단입력에 대하여 플랜트 입력  $u(t)$ 와 오차  $y(t) - r(t)$ 는 모두  $t \rightarrow \infty$ 에서 0으로 접근하고 따라서 이들을 조정변수로 하는  $H_2$  제어기 설계가 가능하다. 따라서  $P_r(s) = 1/s, T = [0 \ 1]^T$ 로 설정하자(이러한 기준입력에 대한  $H_2$ 설계는 [2]의 공식으로는 불가능함을 확인하기 바란다). 표준 모델의 전달함수는

$$P_{11}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/s & 0 \end{bmatrix}, P_{12}(s) = \begin{bmatrix} 1 \\ (s-1)/s(s-2) \end{bmatrix}$$

$$P_{21}(s) = [1/s \ 1], P_{22}(s) = (s-1)/s(s-2)$$

이며 따라서  $A = A_1 = s(s-2), B = B_1 = s-1$ 이고 (24)식의  $X$ 와  $Y$ 는  $X(s) = -1, Y(s) = s-1$ 이 되는데 이 경우 가정 1-4는 모두 만족됨을 쉽게 확인할 수 있다.

먼저 제어기  $\bar{R}_y, \bar{C}_y$ 를 구해보자. 식 (28), (29)의  $\Lambda(s)$ 와  $\Omega(s)$ 는 각각  $\Lambda = s^2 + \sqrt{7}s + 1, \Omega = (s+1)(s+2)$ 이며  $\{\Gamma\}_+ = \frac{1}{s}, \{\Lambda A_1^{-1} Y \Omega\}_- = 61.7490/(s-2)$ 임을 계

산할 수 있다. 따라서 이 경우 (33)식의  $\bar{R}_y$ 와 (11)식의  $\bar{C}_y$ 는 각기

$$\bar{R}_y(s) = -62.7490s(s-2)(s-0.0319)/(s+1)(s+2)(s^2 + \sqrt{7}s + 1)$$

$$\bar{C}_y(s) = -62.7490(s-0.0319)/(s+10.9737)(s-3.3280)$$

이 된다. 다음은 제어기  $\bar{R}_v, \bar{C}_v$ 를 구하자. 식 (38)의  $\Omega_0$ 는  $\Omega_0 = (1+s)/s$ 이 되며 식 (39)의  $A_p, B_p$ 는  $A_p = A, B_p = [A \ B]^T$ 가 됨을 알 수 있는데 이 경우 가정 5-7이 모두 성립함을 알 수 있다. 식 (42)의  $\bar{R}_v$ 를 구하기 위해  $\{\Gamma\}_+$ 을 계산하면  $\{\Gamma\}_+ = -1/s$ 이며 이 경우  $\bar{R}_v$ 는  $\bar{R}_v = -s(s-2)/(s+1)(s^2 + \sqrt{7}s + 1)$ 이 되며 (11)식의 대응되는 제어기  $\bar{C}_v$ 는  $\bar{C}_v = -(s+2)/(s+10.9737)(s-3.3280)$ 이 된다.

이 예제에서는 2장의 공식 적용법을 설명하기 위하여 각종 변수들을 간단한 값으로 설정하였는데, 실제 제어계의 여러 성능을 개선시키기 위한 가중치 설정등의 내용과 그때의 제어계 성능에 대한 자세한 시뮬레이션 결과는 [9]를 참조하라기 바란다.

### 4. 검토 및 결론

본 연구에서는 기존의 표준모델이 갖는 단점을 개선한 표준모델의 2자유도 위너-호프 제어기 설계기법을 제시하였다. 2 자유도 제어기는, 외란 및 측정잡음에 대한 페루프 시스템의 민감도 설계 문제는 제어기  $C_v$ 로 처리하고, 기준입력으로 인한 입력추종 문제는 제어기  $C_y$ 로 처리할 수 있는 편리한 구조임을 보였다. 위너-호프 기법을 이용하여 제곱형 평가함수를 최소화시키는 최적 제어기를 구하였으며, 자유변수를 통하여 평가함수를 유한하게 하는 모든 제어기의 형태도 제시하였다. 이때의 자유변수는 평가함수항에 포함되지 않은 여러 설계명세들을 고려하는 준최적 제어기 설계에 중요한 역할을 하게 될 것으로 기대된다. 또한, 본 연구에서 제시한 공식은 기존의  $H_2$  제어기 공식과는 달리 계단 및 램프 형태의 기준입력 신호에 대한 추종성능 설계를 가능하게 함을 보였다. 주파수 영역에서 표현된 공식의 단점은 유리함수의 극점-영점 상쇄를 정확히 계산할 수 없다는 점인데 이러한 단점을 극복하기 위하여 본 논문에서 유도된 공식에 대한 상태공간 변수 공식도 이미 개발되어 있다[9].

### 부 록

앞으로 표현의 편리성을 위해 “유한 허수축에서 해석적 임”을 J-해석적이라고 표현하기로 하자. 정리 2의 증명에 앞서 다음의 보조정리를 먼저 증명하자.

**보조정리** ; 가정 1-3이 만족될 경우 (32)식의  $\Gamma(s)$ 는 진분수적이고  $A_1^{-1}Y - \Lambda^{-1}\Gamma\Omega^{-1}$ 와  $Tr(P_{11}G_wP_{11}) - Tr(\Gamma\Gamma)$ 는 J-해석적이다.

**증명** ; 행렬  $\Gamma_w$ 를  $G_w$ 의 위너-호프 스펙트럼 해라고 하자. 식 (28)과 (29)로부터  $P_{12}A_1\Lambda^{-1}$ 와  $\Omega^{-1}AP_{12}\Gamma_w$ 는 분수 적임을 알 수 있고 가정 3에 의해  $P_{11}\Gamma_w \leq O(s^{-1})$ 이 된다. 따라서  $\Gamma(s)$ 는 진분수적이다. 다음으로, 식(28)과 (29)에서

$$\Lambda = \Lambda_*^{-1}A_1.P_{12}.P_{12}A_1, \quad \Omega = AP_{21}G_wP_{21}.A.\Omega_*^{-1} \quad (A1)$$

이므로

$$\Lambda A_1^{-1}Y\Omega - \Gamma = \Lambda_*^{-1}A_1.P_{12}.(P_{12}YAP_{21} - P_{11})G_wP_{21}.A.\Omega_*^{-1} \quad (A2)$$

이 되는데  $P_{12}A_1, AP_{21}, \Lambda^{-1}, \Omega^{-1}, P_{11} - P_{12}YAP_{21}$ 과  $G_w$ 가 모두 J-해석적 이므로  $\Lambda A_1^{-1}Y\Omega - \Gamma$ 도 해석적이고 따라서  $A_1^{-1}Y - \Lambda^{-1}\Gamma\Omega^{-1}$ 도 J-해석적이다. 마지막으로  $T_r(P_{11}G_wP_{11*}) - T_r(\Gamma\Gamma_*)$ 가 J-해석적임을 보이자. 식 (28)과 (29)로부터  $P_{12}A_1\Lambda^{-1}$ 와  $\Omega^{-1}AP_{12}\Gamma_w$ 는 각기 내행렬(inner)과 여내행렬(co-inner)이 되고 따라서  $[P_{12}A_1\Lambda^{-1} : U_a]$ 와  $\begin{bmatrix} \Omega^{-1}AP_{12}\Gamma_w \\ U_b \end{bmatrix}$ 가 정방 내행렬이 되게 하는 안정 행렬  $U_a(s)$ 와  $U_b(s)$ 가 존재한다[2]. 따라서

$$P_{12}A_1\Lambda^{-1}\Lambda_*^{-1}A_1.P_{12}. = I - U_aU_a* \quad (A3)$$

$$\Gamma_w.P_{21}.A.\Omega_*^{-1}\Omega^{-1}AP_{21}\Gamma_w = I - U_bU_b* \quad (A4)$$

의 등식이 성립하고 이 식을 이용하면

$$T_r(\Gamma\Gamma_*) = T_r(P_{11}G_wP_{11*}) - T_r(U_a.P_{11}G_wP_{11*}.U_a*) \quad (A5)$$

$$- T_r(P_{11}\Gamma_wU_b.U_b\Gamma_w.P_{11}.P_{12}A_1\Lambda^{-1}\Lambda_*^{-1}A_1.P_{12}.)$$

으로 정리되는데  $P_{12}A_1\Lambda^{-1}$ 가 J-해석적이므로  $U_a.P_{11}\Gamma_w$ 와  $P_{11}\Gamma_wU_b*$ 가 J-해석적임을 보이면  $T_r(P_{11}G_wP_{11*}) - T_r(\Gamma\Gamma_*)$ 는 J-해석적이다. 정방행렬  $[P_{12}A_1\Lambda^{-1} : U_a]$ 가 내행렬이라는 조건에서  $U_a.P_{12}A_1\Lambda^{-1} = 0$ 이고 따라서  $U_a.P_{12}A_1 = 0$ 임을 알 수 있다. 이제  $\Phi_a = U_a.(P_{11} - P_{12}A_1Y_1P_{21}) = U_a.P_{11} - U_a.P_{12}A_1Y_1P_{21} = U_a.P_{11}$ 의 등식을 생각하면  $\Phi_a$ 는 J-해석적이므로  $U_a.P_{11}$ 도 J-해석적이고 따라서  $U_a.P_{11}\Gamma_w$ 도 J-해석적이다. 비슷한 방법으로  $AP_{21}\Gamma_wU_b* = 0$ 임을 보일 수 있고  $\Phi_b = (P_{11} - P_{12}YAP_{21})\Gamma_wU_b* = P_{11}\Gamma_wU_b*$ 의 등식을 생각하면  $\Phi_b$ 는 J-해석적이므로  $P_{11}\Gamma_wU_b*$ 도 J-해석적임을 알 수 있다.

**정리2의 증명** ; 변분법을 이용하면, (26)식의 허용가능한  $R_y$ 중  $E_y$ 값을 최소화시키는 최적해  $\tilde{K}$ 의 필요 형태는 다음과 같이 구할 수 있다[8];

$$\tilde{K} = \Lambda^{-1}(J_1 - \{\Lambda A_1^{-1}Y\Omega - \Gamma\}_+) \Omega^{-1} \quad (A6)$$

여기서  $J_1$ 은 평가함수  $E_y$ 가 유한하기 위한 조건에서 결정되는 다항식 행렬이다. 이에 대응되는  $\tilde{R}_y$ 는 (26)식을 통해 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\tilde{R}_y = -A_1\Lambda^{-1}(J_1 + \{\Lambda A_1^{-1}Y\Omega\}_- + \{\Lambda A_1^{-1}Y\Omega\}_\infty + \{\Gamma\}_+) \Omega^{-1}A \quad (A7)$$

후보 해  $\tilde{K}$ 가 최적해가 되기 위해서는 폐루프평면에서 해석적이고 대응되는 평가함수는 최소임을 보여야 한다. 먼저  $\tilde{K}$ 가 개루프평면에서 해석적인 것은 (A6)식을 보면 자명해진다. 또한

$$\tilde{K} = \Lambda^{-1}(J_1 + \{\Lambda A_1^{-1}Y\Omega\}_- + \{\Lambda A_1^{-1}Y\Omega\}_\infty) \Omega^{-1} \quad (A8)$$

$$- \{A_1^{-1}Y - \Lambda^{-1}\Gamma\Omega^{-1}\} - \Lambda^{-1}(\{\Gamma\}_- + \{\Gamma\}_\infty) \Omega^{-1}$$

인데,  $\Lambda^{-1}, \Omega^{-1}, J_1, \{\Lambda A_1^{-1}Y\Omega\}_-, \{\Lambda A_1^{-1}Y\Omega\}_\infty, \{\Gamma\}_-, A_1^{-1}Y - \Lambda^{-1}\Gamma\Omega^{-1}$ 이 J-해석적이므로  $\tilde{K}$ 도 J-해석적이다. 다음은 평가함수  $E_y$ 가 유한해지기 위한  $J_1$ 의 조건을 따지자. (19)식의 평가함수  $E_y$ 의 피적분자  $\rho_y$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\rho_y = T_r(T_{zw}G_wT_{zw*}) \quad (A9)$$

$$= T_r((P_{11} + P_{12}R_yP_{21})G_w(P_{11} + P_{12}R_yP_{21})*.) \quad (A10)$$

위 식에서  $R_y$  대신  $\tilde{R}_y$ 를 대입하면

$$\tilde{\rho}_y = T_r\{(P_{11} - P_{12}A_1\Lambda^{-1}(J_1 + \{\Lambda A_1^{-1}Y\Omega\}_- + \{\Lambda A_1^{-1}Y\Omega\}_\infty + \{\Gamma\}_+) \Omega^{-1}AP_{21})G_w \quad (A11)$$

$$\cdot (P_{11*} - P_{21*}A.\Omega_*^{-1}(J_1 + \{\Lambda A_1^{-1}Y\Omega\}_- + \{\Lambda A_1^{-1}Y\Omega\}_\infty + \{\Gamma\}_+).\Lambda_*^{-1}A_1.P_{12}*)\}$$

$$= T_r\{P_{11}G_wP_{11*} - \Gamma\Gamma_* - (J_1 + \{\Lambda A_1^{-1}Y\Omega\}_- + \{\Lambda A_1^{-1}Y\Omega\}_\infty - \{\Gamma\}_-) \cdot (J_1 + \{\Lambda A_1^{-1}Y\Omega\}_- + \{\Lambda A_1^{-1}Y\Omega\}_\infty - \{\Gamma\}_-).\}$$

이 된다. 피적분자  $\tilde{\rho}_y$ 가  $\leq 0(s^{-2})$ 이고 J-해석적이면  $E_y$ 는 유한하다. (A12)식에서 괄호 항이 J-해석적이고  $T_r(P_{11}G_wP_{11*}) - T_r(\Gamma\Gamma_*)$ 도 J-해석적이므로  $\tilde{\rho}_y$ 도 J-해석적이다. 또한  $T_r(P_{11}G_wP_{11*})$ 은 가정 3에 의해서  $\leq 0(s^{-2})$ 이고,  $T_r(\Gamma\Gamma_*)$ 은 앞에서 이미  $\leq 0(s^{-2})$ 임을 증명하였다. 평가함수  $E_y$ 가 유한해지기 위해서는  $\{\Lambda A_1^{-1}Y\Omega\}_\infty + J_1$ 항이 사라져야 하므로  $J_1 = -\{\Lambda A_1^{-1}Y\Omega\}_\infty$ 이 되고 따라서  $\tilde{K}$ 는

$$\tilde{K} = -A_1^{-1}Y - \Lambda^{-1}(\{\Lambda A_1^{-1}Y\Omega\}_- - \{\Gamma\}_+) \Omega^{-1} \quad (A13)$$

이 되고 이때의  $\tilde{R}_y$ 는 (33)식과 같다. 이제  $\tilde{R}_y$ 의 최적성을 증명하자. 식(26)의 임의의 안정 실유리 행렬  $K$ 는  $\tilde{K}$ 와 임의의 안정 실유리 행렬  $Z_y$ 를 이용하여

$$K = \tilde{K} + \Lambda^{-1}Z_y\Omega^{-1} \quad (A14)$$

으로 표시 가능하다. 이러한  $K$ 를 사용하는 경우 허용가능한  $R_y$ 의 형태는 (31)식과 같이 되는데 이  $R_y$ 를 (A10)식에 대입하면

$$\rho_y = T_r\{P_{11}G_wP_{11*} - \Gamma\Gamma_* - (\{\Lambda A_1^{-1}Y\Omega - \Gamma\}_- + Z_y)(\{\Lambda A_1^{-1}Y\Omega - \Gamma\}_- + Z_y*)\}$$

이 된다. 여기서  $T_r(P_{11}G_wP_{11*}) - T_r(\Gamma\Gamma_*) \leq 0(s^{-2})$ 이고 J-해석적이기 때문에 평가함수  $E_y$ 가 유한하려면  $Z_y$ 는  $\leq 0(s^{-1})$ 이어야 한다. 이제 식(A15)로부터 다음 식을 얻게

된다.

$$E_y = \tilde{E}_y + \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} T_r(Z_y Z_{y*}) ds \quad (A16)$$

$$+ \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} T_r(2\{\Lambda A_1^{-1} Y \Omega - \Gamma\}_- Z_{y*}) ds$$

여기서  $\{\Lambda A_1^{-1} Y \Omega - \Gamma\}_- Z_{y*}$ 는 Cauchy정리에 의해 폐좌평면에서 해석적이고  $\leq 0(s^{-2})$ 이기 때문에 (A16)우측 두번째 적분 항은 사라진다. 따라서 (33)식에 의해 주어지는  $\tilde{R}_y$ 의 최적성은 증명된다. 다음은 (31)식의  $\tilde{R}_y$ 가  $\det(X_1 - KB) \neq 0$ 의 조건을 만족하는 지를 보이는 것만 남았다. (23)식과 (25)식을 이용하면

$$(X_1 - KB)A_1 + (Y_1 + KA)B_1 = I \quad (A17)$$

인데 (A17)식의 좌측에  $A_1$ , 우측에  $A_1^{-1}$ 를 곱하면 다음과 같다.

$$A_1(X_1 - KB) = I - R_y P_{22} \quad (A18)$$

다음으로 식(28), (29)와 가정 4를 이용하면

$$\Omega^{-1}A \leq 0(s^{-\nu_1}), A_1 \Lambda^{-1} \leq 0(s^{-\nu_2}) \quad (A19)$$

이며  $P_{22} \leq 0(s^{-\nu_0})$ 을 이용하면 (31)식에 있는  $R_y$ 는 다음 식을 만족한다.

$$R_y P_{22} \leq 0(s^{-\nu}), \nu = \nu_0 + \nu_1 + \nu_2 + 1 \quad (A20)$$

가정에서  $\nu_0 + \nu_1 + \nu_2 \geq 0$ 이기 때문에  $R_y P_{22}$ 는 진분수적이고  $s \rightarrow \infty$ 에 따라  $\det(I - R_y P_{22}) \rightarrow 1$ 이 된다. 결국  $\det(I - R_y P_{22}) \neq 0$ 이므로 (A17)식으로부터  $\det(X_1 - KB) \neq 0$ 의 조건을 만족한다. 또한 (35)식은 (31)식과 (A19)식을 이용하면 구할 수 있고, (36)식은 (35)식과  $R_y P_{22}$ 가 진분수적이라는 사실을 통해 쉽게 얻을 수 있다. ■

**정리 3의 증명 :**

먼저  $\Gamma_r(s) \leq 0(s^{-1})$ 임을 보이자.  $\Omega_r$ 과  $\Omega_n$ 을 다음 식을 만족하는 위너-호프 스펙트럼 해라고 하자.

$$G_r = \Omega_r \Omega_{r*}, G_n = \Omega_n \Omega_{n*} \quad (A21)$$

이 때, (38)식과 위 식을 이용하면

$$\Omega_0^{-1} \Omega_r \leq 0(s^0), \Omega_0^{-1} \Omega_n \leq 0(s^0) \quad (A22)$$

을 얻을 수 있다.  $P_{21} A_1 \Lambda^{-1}$ 은 분수적임이 이미 증명되었고 가정 5에 의해  $T \Omega_r \leq 0(s^{-1})$ 이므로,

$$\Gamma_r(s) = (P_{12} A_1 \Lambda^{-1}) \cdot T \Omega_r (\Omega_0^{-1} \Omega_r)_* \leq 0(s^{-1}) \quad (A23)$$

이 됨을 알 수 있다. 다음은 앞에서와 같이 최적한  $R_v$ 를 얻기 위한 후보 해를 구하면

$$\tilde{H}_1 = \Lambda^{-1} (J_2 + \{\Gamma_r\}_+) \Omega_0^{-1} \quad (A24)$$

이 된다. 이 때  $\tilde{H}_1$ 가 후보 해가 되기 위하여  $J_2$ 는 평가함수  $E_v$ 를 유한하게 하는 특정한 다항식 행렬로 택하면 된다. 이에 대응되는  $\tilde{R}_v$  값은

$$\tilde{R}_v = A_1 \tilde{H}_1 = A_1 \Lambda^{-1} (J_2 + \{\Gamma_r\}_+) \Omega_0^{-1} \quad (A25)$$

이다. (A24)식을 보면  $\tilde{H}_1$ 이 개우평면에서 해석적임은 자명하다.

또한,

$$\tilde{H}_1 = \Lambda^{-1} (J_2 - \{\Gamma_r\}_-) \Omega_0^{-1} \quad (A26)$$

$$+ \Lambda^{-1} \Lambda_*^{-1} A_1 \cdot P_{12*} T G_r (G_r + G_n)^{-1}$$

인데 첫째 항은 J-해석적이고  $T$ 와  $G_r (G_r + G_n)^{-1}$ 이 가정 6에 의해 J-해석적이므로 두번째 항도 J-해석적임을 알 수 있다. 따라서  $\tilde{H}_1$ 은 폐우평면에서 해석적이다. 다음은 (A24)식의 후보 해를 적용한 평가함수  $E_v$ 가 유한할 조건을 따지자. (A25)식을 대입한 평가함수  $E_v$ 의 피적분자  $\tilde{\rho}_v$ 는

$$\tilde{\rho}_v = T_r [T G_r T_* - \Gamma_r \Gamma_{r*} - (J_2 - \{\Gamma_r\}_-) (J_2 - \{\Gamma_r\}_-)] \quad (A27)$$

인데 가정 5에 의해  $T G_r T_*$ 가  $\leq 0(s^{-2})$ 임은 쉽게 알 수 있다. 따라서  $\tilde{\rho}_v$ 가  $\leq 0(s^{-2})$ 가 되기 위해서는 세번째 항이  $\leq 0(s^{-2})$ 이 되어야 하고 이를 만족하기 위해서는  $J_2 = 0$ 이어야 함을 알 수 있다. 또한  $\tilde{\rho}_v$ 가 J-해석적이 되기 위해서는  $T_r (T G_r T_* - \Gamma_r \Gamma_{r*})$ 이 J-해석적이어야 한다. 실제로

$$T_r (T G_r T_* - \Gamma_r \Gamma_{r*})$$

$$= T_r [T G_r T_* - \Lambda_*^{-1} A_1 \cdot P_{12*} T G_r \Omega_0^{-1} \Omega_0^{-1} G_r T_* P_{12} A_1 \Lambda^{-1}]$$

$$= T_r [T G_r T_* - P_{12} A_1 \Lambda^{-1} \Lambda_*^{-1} A_1 \cdot P_{12*} T G_r (G_r + G_n)^{-1} G_r T_*]$$

$$= T_r [T G_r T_* - P_{12} A_1 \Lambda^{-1} \Lambda_*^{-1} A_1 \cdot P_{12*} T$$

$$\cdot (G_r + G_n - G_n) (G_r + G_n)^{-1} G_r T_*]$$

$$= T_r [(I - P_{12} A_1 \Lambda^{-1} \Lambda_*^{-1} A_1 \cdot P_{12*}) T G_r T_*]$$

$$+ T_r [T G_n (G_r + G_n)^{-1} G_r T_*] \quad (A28)$$

인데 (A28)식에서 두번째 항은  $T, G_n, (G_r + G_n)^{-1} G_r$ 이 가정 6에 의해 J-해석적이므로 첫번째 항이 J-해석적이면  $\tilde{\rho}_v$ 가 J-해석적이 된다. (A28)식의 첫번째 항이 J-해석적임을 증명하기 앞서 (39)식으로 표시되는  $P_{12}$ 의 좌 서로소분해를 통해 다음 식

$$A_p X_p + B_p Y_p = I \quad (A29)$$

를 생각하자. (A29)식을 통해

$$A_p^{-1} = X_p + P_{12} Y_p \quad (A30)$$

이 되고 (A28)식의 첫번째 항은 다음과 같이 놓을 수 있다.

$$T_r [(I - P_{12} A_1 \Lambda^{-1} \Lambda_*^{-1} A_1 \cdot P_{12*}) T G_r T_*] = T_r [\Phi_1 A_p T G_r T_* A_{p*}] \quad (A31)$$

여기서

$$\Phi_1 = A_{p*}^{-1} (I - P_{12} A_1 \Lambda^{-1} \Lambda_*^{-1} A_1 \cdot P_{12*}) A_p^{-1} \quad (A32)$$

이다. 결국  $A_p T G_r T_* A_{p*}$ 는 가정 7에 의해 J-해석적이므로  $\Phi_1$ 이 J-해석적이면 (A28)식의 첫번째 항은 J-해석적이 되어  $\tilde{\rho}_v$ 가 J-해석적이 된다. (A30)식을 (A32)식에 대입하여 정리하면

$$\Phi_1 = X_{p*} (I - P_{12} A_1 \Lambda^{-1} \Lambda_*^{-1} A_1 \cdot P_{12*}) X_p + X_{p*} \Phi_2 Y_p + Y_{p*} \Phi_2 X_p + Y_{p*} \Phi_3 Y_p \quad (A33)$$

인데 여기서

$$\Phi_2 = (I - P_{12}A_1\Lambda^{-1}\Lambda_*^{-1}A_1P_{12})P_{12}, \Phi_3 = P_{12}\Phi_2 \quad (A34)$$

이다.  $\Phi_2$ 는

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= P_{12} - P_{12}A_1\Lambda^{-1}\Lambda_*^{-1}A_1P_{12} \\ &= P_{12} - P_{12}(P_{12}P_{12})^{-1}P_{12}P_{12} = 0 \end{aligned}$$

이므로  $\Phi_3 = 0$  이고 따라서  $\Phi_1$ 은 J-해석적이다.

다음은  $\tilde{R}_v$ 의 최적성을 증명하자. 식(26)의 허용가능한  $R_v$ 의 형태는 앞의  $\tilde{H}_1$ 을 이용하여 (40)식의 형태로도 표현 가능하다. 이때  $Z_v$ 를 개우평면에서 해석적인 임의의 실유리 행렬로 정의하면 대응되는  $H_1 = \Lambda^{-1}(\{\Gamma_r\}_+ + Z_v)\Omega_0^{-1}$ 도 역시 개우평면에서 해석적인 임의의 실유리 행렬을 표시하게 되어 (40)식으로 표현되는  $R_v$ 는 (26)식의 허용 가능한 제어기의 집합보다 더 큰 집합을 표시하게 된다. 이제 (40)식의  $R_v$ 를 (20)식의 피적분자  $\rho_v$ 에 넣고 풀면 다음과 같다.

$$\rho_v = T_r[ TG_r T_r - \Gamma_r \Gamma_r - (Z_v - \{\Gamma_r\}_-)(Z_v - \{\Gamma_r\}_-) ] \quad (A35)$$

앞에서  $T_r[ TG_r T_r - \Gamma_r \Gamma_r ]$ 이  $\leq 0(s^{-2})$ 이고 J-해석적임이 증명되었기 때문에 평가함수  $E_v$ 가 유한하려면  $Z_v$ 는  $\leq 0(s^{-1})$ 이고 J-해석적이어야 한다. 이 경우 대응되는  $H_1$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} H_1 &= \Lambda^{-1}(\{\Gamma_r\}_+ + Z_v)\Omega_0^{-1} \\ &= \Lambda^{-1}(Z_v - \{\Gamma_r\}_-)\Omega_0^{-1} \\ &\quad + \Lambda^{-1}\Lambda_*^{-1}A_1P_{12}TG_r(G_r + G_n)^{-1} \end{aligned} \quad (A36)$$

(A36)식을 보면  $H_1$ 이 개우평면에 해석적임은 자명하며  $Z_v, \{\Gamma_r\}_-, \Lambda^{-1}, T_r, G_r(G_r + G_n)^{-1}$ 이 J-해석적이므로  $H_1$ 은 J-해석적이고 따라서 (40)식의  $R_v$ 는 허용가능하게 된다. 다음 식은 (A36)식에서 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} E_v &= \bar{E}_v + \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} T_r(Z_v Z_v) ds \\ &\quad - \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} T_r(2\{\Gamma_r\}_- Z_v) ds \end{aligned} \quad (A37)$$

여기서  $\{\Gamma_r\}_- Z_v$ 는 폐좌평면에서 해석적이고  $\leq 0(s^{-2})$ 이므로 Cauchy 정리에 의해 우측 두번째 적분항은 사라진다. 따라서 (42)식에 의해 주어지는  $\tilde{R}_v$ 의 최적성은 증명된다. 마지막으로  $\Omega_0^{-1} \leq 0(s^{-\nu_3})$ 인 경우 (A19)식에서  $R_v \leq 0(s^{-\nu_2 - \nu_3 - 1})$ 이 되는 것을 알 수 있다. ■

### 참 고 문 헌

[1] K. Park and J. J. Bongiorno, "A general theory for the Wiener-Hopf design of multivariable control systems," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 34, pp. 619-626, 1989.  
 [2] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar and B.

A. Francis, "State space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 34, pp. 831-847, 1989.

[3] D. C. Youla and J. J. Bongiorno, "A Feedback theory of two-degree-of-freedom optimal Wiener-Hopf design," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 30, pp. 652-665, 1985.  
 [4] K. Park and J. J. Bongiorno, "Wiener-Hopf design of servo regulator-type multivariable control systems including feedforward compensation," International Journal of Control, Vol. 52, pp. 1189-1216, 1990.  
 [5] H. P. Lee and J. J. Bongiorno, Jr., "Wiener-Hopf design of optimal decoupled multivariable feedback control systems," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 38, No. 12, pp. 1838-1843, Dec, 1993.  
 [6] G.O. Correa, and M.A. Da Silveira, "On the Design of Servomechanisms Via  $H_2$ -Optimization," Int. J. Control, Vol. 61, pp. 475-491, 1995.  
 [7] S. Hara, and T. Suge, "Independent Parameterization of Two-Degree-of-Freedom Compensators in General Robust Tracking Systems," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 33, pp. 59-67, 1988.  
 [8] D. C. Youla, H. Jabr and J. J. Bongiorno, "Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers part II : the multivariable case," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 21, pp. 319-338, 1976.  
 [9] 조용석, 표준모델의 2자유도 위너-호프 제어기 설계에 관한 연구, 성균관대학교 공학박사 학위논문, 1997.  
 [10] C.N. Nett, "Algebraic aspects of linear control system stability," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 31, pp. 941-949, 1986.



저 자 소 개



조 용 석 (趙 容 奭)

1966년 4월 19일 생. 1989년 성균관대 전기공학과 졸업. 1992년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1998년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학). 현재 건양대 정보전자통신공학부 전임강사

Tel : 0461-730-5393

E-mail : yscho@kytis.konyang.ac.kr



박 기 헌 (朴 基 憲)

1955년 7월 5일 생. 1978년 서울대 전기공학과 졸업. 1980년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1980년~1983년 해군사관학교 전기공학과 전임강사. 1987년 미국 Polytechnic University 졸업(공학).

1988년~1990년 한국전자통신 연구소 선임연구원. 현재 성균관대 전기·전자·컴퓨터공학부 교수

Tel : 0331-290-7116

E-mail : khpark@yurim.skku.ac.kr



최 군 호 (崔 君 鎬)

1969년 12월 28일 생. 1993년 성균관대 전기공학과 졸업. 1995년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1999년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학). 현재 (주)한미 기술연구소 연구원

Tel : 032-580-1681

E-mail : goonho@hanminet.co.kr