

동적 관측자를 사용한 선형 시불변 시스템의 확장된 상태 추정 방법

論 文

49D-3-1

Extended State Estimation Method for Linear Time-Invariant Systems with Dynamic Observer

朴 鍾 久*
(Jong-Koo Park)

Abstract - A novel observer design methodology for linear time-invariant systems named the dynamic observer is presented. Efficient and plausible design algorithms are also provided. The dynamic observer is an extension of the usual static observer. The concept of the dynamic observer enlarges the capacity of observer design so much that well-developed advanced linear controller design techniques can be utilized to design observers. Both the dynamic observers in the form of standard and Luenburger types are considered. The essential characteristics of the dynamic observer to be qualified as an effective observer design scheme are addressed.

Key Words : 관측자, 상태추정, 동적 관측자, 선형 시스템

1. 서론 및 문제의 설정

상태 관측자는 현대 제어 이론에 있어 가장 기초적인 개념들 가운데 하나이다. 관측자 개념은 기본적으로 상태 되먹임을 할 때 측정하기 곤란하거나 측정비용이 많이 소요되는 신호들을 추정하기 위하여 도입되었다[1, 5, 8]. 그러나 그 개념은 여러 제어 이론 및 응용 분야에 광범위하게 사용되고 있다. 시스템의 고장 진단 (fault detection)[14], 포화 시스템의 리셋 와인드업 방지 방법 (anti-reset windup) [9-11] 등이 그러한 응용 사례들이다. 관측자 설계 문제는 제어 공학자들에게는 잘 인지되어 있는 문제이나, 더욱 다양하고 복잡한 문제에 대한 연구는 계속 이어지고 있으며, 최근에도 관측자에 대한 논문들을 상당히 많이 접할 수 있다 [2-4, 7, 12, 13].

다음과 같은 선형 시불변 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (1.2)$$

여기서 $x(t) \in R^n$ 는 상태, $u(t) \in R^p$ 는 제어입력, $y(t) \in R^m$ 는 측정된 출력, 그리고 상수 행렬 A, B, C , 그리고 D 는 적절한 행렬 차수를 갖는다. 이러한 시스템에 대한 완전 차수 관측자 (full-order observer)는

$$\begin{aligned} \hat{\dot{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) \\ &\quad + L[y(t) - (C\hat{x}(t) + Du(t))] \\ &= (A - LC)\hat{x}(t) + Ly(t) + (B - LD)u(t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

이다. 여기서 $\hat{x}(t) \in R^n$ 는 관측자 상태, L 은 적절히 선택되어야 할 관측자 이득(observer gain)이다. 만약 (C, A) 가 관측 가능하다면 $A - LC$ 의 모든 고유치는 임의로 설정 가능하다. 이와 같은 형태의 관측자를 본 논문에서는 표준형 정적 관측자라 일컫겠다.

또다른 형태의 관측자로는 다음과 같은 것이 있다.

$$\dot{z}(t) = Fz(t) + Gy(t) + Hu(t), \quad (1.4)$$

여기서 $z(t) \in R^n$ 는 관측자 상태이고 행렬 F, G , 그리고 H 는 다음과 같은 조건을 만족시켜야 한다: 1. $TA - FT = GC$; 2. $H + GD = TB$; 3. F 는 안정 행렬이어야 한다. 그러면 어떤 $n \times n$ 차의 비특이 상수 행렬 T 에 대하여, 상태 $z(t)$ 는 $Tx(t)$ 의 추정치가 된다. 이와 같은 형태의 관측자를 본 논문에서는 Luenburger형 정적 관측자라 일컫겠다.

관측자기반 제어 시스템은 대개 과도 응답 저하 특성을 보이는 경우가 많다. 이는 관측자의 초기 추정 오차가 상태 되먹임 제어 시스템의 과도 응답 특성에 영향을 미치기 때문이다. 즉 관측자는 페루프 시스템의 과도 응답 특성을 좌우할 수 있으므로 신중하게 설계되어야 한다. 추정할 시스템과 구성된 관측자 사이의 초기 상태 불일치로 인한 동작 특성, 시스템에 인가되는 알 수 없는 외란으로 인한 추정 오차의 영향 감소 등 관측자 설계시 고려하여야 할 요소는 다양하다.

일반적으로 관측자 설계 절차는 상태 되먹임 제어기 설계의 이원적인 것으로 간주되고 있다. 이러한 설계 개념과 분리 설계 가능 성질 (separation property), 즉 상태 되먹임 제어기와 관측자는 서로 독립적으로 설계 가능하다는 성질을 기초로 하여 적절한 제어기를 설계할 수 있다. 그러나 그 동안 관측자 설계에 대한 여러 방법들이 논의되어 왔지만 외란에 대한 강인한 성질을 가지면서 좋은 수렴 특성을 갖는 관측자를 설계한다는 것은 그리 쉬운 일이 아니다.

*正 會 員 : 成均館大 電氣電子및컴퓨터工學部 副教授 · 工博
 接受日字 : 1999年 2月 11日
 最終完了 : 2000年 2月 14日

지난 20 여년간 LQG/LTR, H_∞ 등 선형 제어기 설계 기법들은 상당히 많이 발전해 왔다. 이러한 제어 이론들은 거의 80년대 이후로 발전한 것으로서 기본적인 관측자 이론이 정립된 이후에 체계화된 것이다. 발전된 선형 제어 이론들은 제어 시스템을 설계할 때 많은 설계 목적을 고려할 수 있다. 모델의 불확실성, 외란의 영향 감소, 견실한 안정도 및 성능의 요건 충족 등이 그러한 설계 기법들로서 고려할 수 있는 설계 요소들이다.

비록 많은 연구자들에 의하여 관측자 이론이 심도있게 연구되었고 그 결과 다양해졌지만, 여러 관측자들의 기본적인 구조는 전통적인 설계 구조에서 벗어나지 못하고 있다. 이 시점에서 하나의 의문점이 떠오르게 된다: '관측자를 설계하는데 있어 발전된 선형 제어기 기법을 적용할 수 있는 방법은 없는가?' 본 논문은 이러한 의문점에 시작하였으며, 그리하여 동적 관측자라고 명명한 새로운 관측자 구조를 제안한다.

본 논문에서는 또한 유효한 동적 관측자의 설계 알고리즘을 제시하고, 이의 특성에 대한 해석을 한다. 결과적으로 제시된 방법대로 동적 관측자를 설계하는 경우, 관측자로서 갖추어야 할 수렴 특성 및 분리 설계 가능 성질 등을 모두 만족시킨다는 것을 보인다. 동적 관측자는 기존 관측자의 확장된 형태이며, 설계자에게 보다 많은 설계 자유도를 제공한다. 본 논문의 결과로서 '정적 관측자 설계 절차는 상태 되먹임 설계의 이원적인 것이다.'라는 문장이 유효하듯이, '동적 관측자 설계 절차는 발전된 출력 되먹임 제어기 설계 기법들의 이원적인 것이다.'라는 문장이 성립된다.

2절에서는 표준형 동적 관측자의 설계 지침을 제시하고 그의 특성을 분석한 결과를 기술하였다. Luenberger형 동적 관측자는 3절에서 다루었다. 제시된 동적 관측자의 유효성을 보이기 위해 4장에 시뮬레이션 예제를 보였다. 마지막으로 5절에 결론을 실었다.

2. 표준형 동적 관측자

다음과 같은 선형 시불변 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (2.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (2.2)$$

여기서 $x(t) \in R^n$ 는 상태, $u(t) \in R^p$ 는 제어입력, $y(t) \in R^m$ 는 측정된 출력, 그리고 상수행렬 A , B , C , 그리고 D 는 적절한 차수를 갖는다.

제안되는 동적 관측자는 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + \xi(t), \quad (2.3)$$

여기서 $\xi(t) \in R^n$ 는 추정오차 수정 신호로서 동특성은

$$\dot{\xi}(t) = \Phi \xi(t) + \Gamma \zeta(t), \quad (2.4)$$

$$\xi(t) = \Sigma x_d(t) + \Lambda \zeta(t), \quad (2.5)$$

$$\zeta(t) = y(t) - [C\hat{x}(t) + Du(t)] \quad (2.6)$$

로 발생시킨다. 여기서 $x_d(t) \in R^l$ 는 보조 상태이고 상수행렬 Φ , Γ , Σ , 그리고 Λ 는 적절한 차수를 갖는다.

동적 관측자의 전체적인 동특성은 다음과 같이 재 서술할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_d(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & -\Gamma C \\ \Sigma & A - \Lambda C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ \Lambda \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} -\Gamma D \\ B - \Lambda D \end{bmatrix} u(t) \quad (2.7)$$

$L(s) := \Lambda + \Sigma(sI_l - \Phi)^{-1}\Gamma$ 라 할 때, 동적 관측자의 설계 목적을 다음과 같이 기술할 수 있다.

설계 목표: 초기 시간 t_0 에서의 초기 상태 $\hat{x}(t_0)$ 와 $x(t_0)$ 사이에 오차가 크다고 하더라도 궁극적으로 $\hat{x}(t)$ 가 $x(t)$ 에 수렴하며, 그 때의 수렴 특성이 만족할 만 하도록 $L(s)$ 의 매개변수들을 설계하도록 한다.

위의 (2.1) 및 (2.2)에 기술된 시스템에서 다음과 같은 출력 되먹임 제어기를 가정하자.

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c e(t), \quad (2.8)$$

$$u(t) = C_c x_c(t) + D_c e(t), \quad (2.9)$$

$$e(t) = r(t) - y(t), \quad (2.10)$$

여기서 $x_c(t) \in R^l$ 는 제어기의 상태, $r(t) \in R^m$ 는 기준입력, 상수행렬 A_c , B_c , C_c , 그리고 D_c 는 적절한 차수를 갖는다. 그러면 페루프 시스템은

$$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m r(t) \quad (2.11)$$

이고, 여기서 $x_m(t) := (x_c^T(t), x^T(t))^T$ 이며

$$A_m := \begin{bmatrix} \Xi_1 & -\Xi_2 C \\ \Xi_3 C_c & \Xi_4 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$B_m := \begin{bmatrix} \Xi_2 \\ \Xi_3 D_c \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$\Xi_1 := A_c - B_c D(I_p + D_c D)^{-1} C_c$$

$$\Xi_2 := B_c [I_m - D(I_p + D_c D)^{-1} D_c]$$

$$\Xi_3 := B(I_p + D_c D)^{-1}$$

$$\Xi_4 := A - B(I_p + D_c D)^{-1} D_c C$$

이다.

위의 사전 단계를 거쳐 완전 차수 동적 관측자에 대한 다음과 같은 설계 알고리즘을 제안한다.

알고리즘 1

1단계: LQG/LTR, H_∞ 등 적절한 선형 제어기 설계 방법을 사용하여 대상 시스템에 대한 (2.8) 및 (2.9)에 기술된 동적 제어기를 설계한다. 제어기는 페루프 시스템의 안정도와 성능을 고려하여 설계한다.

2단계: 그 다음 동적 관측자의 매개변수들을 다음과 같이 설정한다.

$$\Phi = \Xi_1, \quad \Gamma = \Xi_2, \quad \Sigma = \Xi_3 C_c, \quad \Lambda = \Xi_3 D_c \quad (2.14)$$

정리 1: (2.1) 및 (2.2)에 주어진 시스템에서, (A, B) 가 제어가능하고 (C, A) 가 관측 가능하다고 가정한다. 이때 동적 관측자가 알고리즘 1과 같이 설계되었다면, (2.3) 또는 (2.7)의 상태 $\hat{x}(t)$ 는 $x(t)$ 에 궁극적으로 수렴하는 추정치가 된다. 또한 $x_d(t)$ 는 시간이 경과함에 따라 0으로 소멸된다.

증명: $\tilde{x}(t)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$\tilde{x}(t) := x(t) - \hat{x}(t) \quad (2.15)$$

그러면 (2.7)로부터

$$\begin{aligned} \dot{x}_d(t) &= \Phi x_d(t) + \Gamma y(t) - \Gamma C \hat{x}(t) - \Gamma D u(t) \\ &= \Phi x_d(t) + \Gamma C \tilde{x}(t), \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t) \\ &= -\Sigma x_d(t) + (A - \Lambda C) \tilde{x}(t) \end{aligned} \quad (2.17)$$

이다. 즉,

$$\dot{\tilde{x}}_e(t) = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma C \\ -\Sigma & A - \Lambda C \end{bmatrix} \tilde{x}_e(t) \quad (2.18)$$

이고, 여기서 $x_e(t) := (x_d^T(t), \tilde{x}^T(t))^T$ 이다. 이때 $\tilde{x}_e(t) := P x_e(t)$ 라 정의하자. 여기서 P 는 유사변환 행렬로서 다음과 같다.

$$P = \begin{bmatrix} -I_l & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

그러면 (2.18)은

$$\dot{\tilde{x}}_e(t) = \begin{bmatrix} \Phi & -\Gamma C \\ \Sigma & A - \Lambda C \end{bmatrix} \tilde{x}_e(t) \quad (2.20)$$

와 같이 변환된다. (2.14)를 (2.20)에 대입하면

$$\dot{\tilde{x}}_e(t) = A_m \tilde{x}_e(t) \quad (2.21)$$

를 얻는다. 여기서 A_m 은 위의 (2.12)에 정의되어 있다.

그런데 알고리즘 1에 의하여 A_m 은 안정행렬이므로, 임의의 $\tilde{x}_e(t_0)$ 일지라도 궁극적으로 $\tilde{x}_e(t) \rightarrow 0$ 이 된다. 이는 임의의 $x(t_0)$, $x_d(t_0)$ 에 대하여 궁극적으로 $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$, $x_d(t) \rightarrow 0$ 임을 의미한다. □

알고리즘 1에서 $r(t) = 0$ 이라면, 제어기 설계 문제는 레귤레이터 설계 문제가 된다. 이 경우 전체 시스템 방정식은 동적 관측자 방정식과 일치하게 된다. 따라서 동적 관측자 설계 문제는 시스템에 대한 레귤레이터 설계 문제로 파악할 수 있다.

관측자 기반 상태 되먹임 시스템에서는 분리 설계 가능성 및 기준 입력에서 출력까지의 전달함수 행렬의 특성 등에 대한 해석이 필요하다. 제안된 동적 관측자가 유효한 관측자가 되기 위해서는 이러한 특성에 대한 언급이 있어야 한다.

다음과 같은 상태 되먹임 제어를 고려하자.

$$u(t) = r(t) - K \hat{x}(t), \quad (2.22)$$

여기서 K 는 되먹임 이득이다. (2.22)를 (2.1) 및 (2.2)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B[r(t) - K \hat{x}(t)] \\ &= (A - BK)x(t) - BK \tilde{x}(t) + Br(t), \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= Cx(t) + D[r(t) - K \hat{x}(t)] \\ &= (C - DK)x(t) - DK \tilde{x}(t) + Dr(t). \end{aligned} \quad (2.24)$$

위의 (2.7), (2.23), 그리고 (2.24)로부터 동적 관측자 기반 상태 되먹임 시스템의 전체 동특성은

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_d(t) \\ \dot{\tilde{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & 0 & -BK \\ 0 & \Phi & -\Gamma C \\ 0 & \Sigma & A - \Lambda C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_d(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r(t),$$

$$y(t) = [C - DK \ 0 \ -DK] \begin{bmatrix} x(t) \\ x_d(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} + Dr(t)$$

와 같다. 따라서 동적 관측자에 대한 다음과 같은 정리들을 말할 수 있다.

정리 2: 동적 관측자와 상태 되먹임 제어기는 서로 독립적으로 설계 가능하며, 전체 폐루프 시스템의 고유치(eigenvalue)는 동적 관측자와 상태 되먹임 제어기의 고유치의 합이 된다.

정리 3: 기준 입력으로부터 출력으로의 전달함수 행렬에서 동적 관측자는 소거되어 영향을 미치지 않는다. 전달함수 행렬은 $G(s) = (C - DK)(sI_n - A + BK)^{-1}B + D$ 이다.

정리 1, 2, 3으로부터 제안된 동적 관측자는 관측자로서 갖추어야 할 주요 성질을 모두 충족시킨다는 것을 알 수 있다. 동적 관측자의 단점이라면 관측자의 차수가 증가하는 것이다. 그럼에도 불구하고 동적 관측자는 알고리즘 1에 제시된 바와 같이 최근에 발달된 제어기 설계 기법을 그대로 적용할 수 있으므로 여러 설계 목적에 부합하는 관측자를 설계하기가 용이하다. 이와 같은 특성은 동적 관측자의 활용도를 증대시킬 것이다.

3. Luenburger형 동적 관측자

(2.1)의 $x(t)$ 가 직접 추정이 어렵거나 응용 목적상 $x(t)$ 의 어떤 조합 형태를 필요로 한다면, $Tx(t)$ 의, T 는 비특이 상수행렬, 형태를 추정하는 관측자를 필요로 한다. 그 경우에는 Luenburger형이라 불리는 관측자 설계 기법이 사용된다. 이번 절에서는 이에 대응되는 Luenburger형 동적 관측자 설계 기법을 제시하고자 한다. 그러나 분리 설계 가능성 및 전달 함수 특성은 앞 절과 큰 차이가 없으므로 생략한다.

(2.1) 및 (2.2)에 기술된 제어 가능하고 관측 가능한 시스템을 고려하자. 일반성을 해치지 않고 C 가 완전 행랭크(full row rank) 행렬이라고 가정한다. 행의 수가 행렬랭크(rank)보다 크다면, SC 를 완전 행랭크(full row rank)로 만드는 완전 행랭크 행렬 S 가 항상 존재한다. 이 경우에는 위의 (2.2)는 이후의 논문 전개에 있어서 다음과 같이 표현되어 있다고 간주한다.

$$\bar{y}(t) = \bar{C}x(t) + \bar{D}u(t), \quad (3.1)$$

여기서 $\bar{y}(t) := Sy(t)$, $\bar{C} := SC$, 그리고 $\bar{D} := SD$ 이다.

완전 차수 Luenburger형 동적 관측자는 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$\dot{z}_d(t) = Fz_d(t) + Gy(t) + Hu(t), \quad (3.2)$$

여기서 $z_d(t) = (z_{1d}^T(t), z_{2d}^T(t))^T$, $z_{1d}(t) \in R^l$, $z_{2d}(t) \in R^n$, 이고

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

로 정의되며, F_i , G_i , 및 H_i 는 차수에 맞게 분할되어 있다고 가정한다.

정리 4: (3.2)에 기술된 동특성은 임의의 $n \times n$ 비특이 상수 행렬 T 에 대하여 다음의 조건을 만족시키는 경우 유효한 관측자가 된다. 즉, 임의의 $x(t_0)$, $z_d(t_0)$, 및 $u(t)$ 에 대하여 다음과 같은 조건을 만족시킨다면 궁극적으로

$z_{1d}(t) \rightarrow 0$ 그리고 $z_{2d}(t) \rightarrow Tx(t)$ 가 된다: 1. $TA - F_4T = G_2C$; 2. $H_2 + G_2D = TB$; 3. $G_1C = -F_2T$; 4. $H_1 + G_1D = 0$; 5. F 가 안정한 고유치만을 갖는다. 그리고 그 역도 성립한다.

증명: $\tilde{x}(t)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$\tilde{x}(t) := z_{2d}(t) - Tx(t). \quad (3.4)$$

그러면 (3.2)로부터

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1d}(t) &= F_1 z_{1d}(t) + F_2(\tilde{x}(t) + Tx(t)) \\ &\quad + G_1[Cx(t) + Du(t)] + H_1u(t) \quad (3.5) \\ &= F_1 z_{1d}(t) + F_2 \tilde{x}(t) + (G_1C + F_2T)x(t) \\ &\quad + (H_1 + G_1D)u(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \dot{z}_{2d}(t) - T\dot{x}(t) \\ &= F_3 z_{1d}(t) + (F_4T - TA + G_2C)x(t) \\ &\quad + F_4 \tilde{x}(t) + (H_2 + G_2D - TB)u(t) \quad (3.6) \end{aligned}$$

이다. 이를 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_{ed}(t) &= \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{bmatrix} z_{ed}(t) + \begin{bmatrix} G_1C + F_2T \\ F_4T - TA + G_2C \end{bmatrix} x(t) \\ &\quad + \begin{bmatrix} H_1 + G_1D \\ H_2 + G_2D - TB \end{bmatrix} u(t), \quad (3.7) \end{aligned}$$

여기서 $z_{ed}(t) := (z_{1d}^T(t), \tilde{x}^T(t))^T$ 이다. 만약 조건 1에서 5까지 만족한다면, 임의의 $z_{ed}(t_0)$, $u(t)$ 에 대하여 궁극적으로 $z_{ed}(t) \rightarrow 0$ 이 된다. 따라서 $z_{2d}(t)$ 는 $Tx(t)$ 의 추정치가 된다. 필요 조건의 증명은 [1]을 참고하면 쉽게 해결할 수 있으므로 생략한다. □

이와 같은 정리에 근거하여 이제 Luenburger형 동적 관측자의 설계 알고리즘을 제시한다.

알고리즘 2

1단계: 알고리즘 1의 1단계를 밟는다.

2단계: 주어진 $n \times n$ 특이 상수 행렬 T 에 대하여, Luenburger형 동적 관측자의 매개변수를 다음과 같이 선택한다.

$$F = \begin{bmatrix} E_1 & -E_2CT^{-1} \\ TE_3C_c & TE_4T^{-1} \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

$$G = \begin{bmatrix} E_2 \\ TE_3D_c \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

$$H = \begin{bmatrix} -E_2D \\ TE_3 \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

정리 5: (2.1) 및 (2.2)에 주어진 시스템에서, (A, B) 가 제어가능하고 (C, A) 가 관측 가능하다고 가정한다. 이때 주어진 $n \times n$ 비특이 상수 행렬 T 에 대하여, 동적 관측자가 알고리즘 2와 같이 설계되었다면, (3.2)의 상태 $z_{2d}(t)$ 는 $Tx(t)$ 에 궁극적으로 수렴하는 추정치가 된다. 또한 $z_{1d}(t)$ 는 시간이 경과함에 따라 0으로 소멸된다.

증명: $\bar{z}_{ed}(t)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$\bar{z}_{ed}(t) := Wz_{ed}(t) \quad (3.11)$$

여기서 W 는 유사변환 행렬로서 다음과 같다.

$$W = \begin{bmatrix} -I_l & 0 \\ 0 & -T^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

그러면 (3.7)은 다음과 같이 변환된다.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}_{ed}(t) &= \begin{bmatrix} F_1 & F_2T \\ T^{-1}F_3 & T^{-1}F_4T \end{bmatrix} \bar{z}_{ed}(t) \\ &\quad - \begin{bmatrix} G_1C + F_2T \\ T^{-1}(F_4T - TA + G_2C) \end{bmatrix} x(t) \quad (3.13) \\ &\quad - \begin{bmatrix} H_1 + G_1D \\ T^{-1}(H_2 + G_2D - TB) \end{bmatrix} u(t). \end{aligned}$$

이때 (3.8)-(3.10)을 (3.13)에 대입하면

$$\dot{\bar{z}}_{ed}(t) = A_m \bar{z}_{ed}(t)$$

를 얻는다. 여기서 A_m 은 (2.12)에 정의되어 있다.

그런데 알고리즘 2에 의하여 A_m 은 안정행렬이므로, 궁극적으로 $\bar{z}_{ed}(t) \rightarrow 0$ 임을 의미하며, 이는 임의의 $x(t_0)$, $z_{ed}(t_0)$ 에 대하여 시간이 경과함에 따라 $z_{2d}(t) \rightarrow Tx(t)$, $z_{1d}(t) \rightarrow 0$ 임을 뜻한다. □

위의 (3.8)-(3.10)과 같이 동적 관측자의 설계 변수들이 선택된다면, 정리 4의 모든 조건을 만족시킨다. 알고리즘 2에 의하여 Luenburger형 동적 관측자의 설계 문제는 적절한 선형 출력 되먹임 제어기 설계 문제로 전환할 수 있다.

4. 시뮬레이션 예제

다음과 같이 기술된 서보 시스템을 고려하자[6].

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4.6 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.787 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [1 \ 0] x(t).$$

이러한 시스템에 대하여 다음의 정적 관측자는 고유치가 $-50 \pm j50$ 에 위치하도록 설계되어 있다[6].

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4.6 \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.787 \end{bmatrix} u(t) \\ &\quad + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} [y(t) - [1 \ 0] \hat{x}(t)], \end{aligned}$$

여기서 관측자 이득행렬은 $L = (l_1, l_2)^T = (95.40, 4561)^T$ 이다.

이제 대상 시스템에 대하여 본 논문에서 제시된 동적 관측자를 설계하자. 알고리즘 1에 기술된 절차에 따라 우선 임의로 2차 출력 되먹임 제어를 설계하도록 한다. 정적 관측자의 성능과 공정한 비교를 위해, 안정한 극-영점 소거법을 이용하여 페루프 시스템의 특성지배(dominant) 극점은 정적 관측자의 경우와 같은 $-50 \pm j50$ 에 위치하고 나머지 극점은 -100 에 위치하도록 제어기를 설계한다. 이에 해당하는 제어기는 다음과 같다.

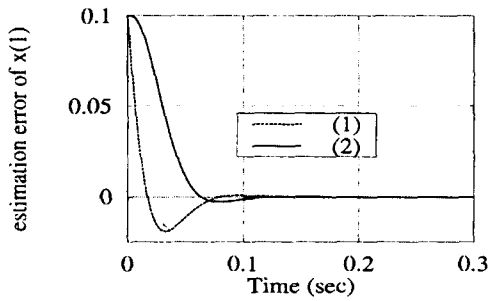
$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= \begin{bmatrix} -200 & -15000 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_c(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e(t), \\ u(t) &= [635324 \ 2922500] x_c(t), \\ e(t) &= r(t) - y(t). \end{aligned}$$

따라서 알고리즘 1의 2단계에 따라 동적 관측자는 다음과 같이 구성된다.

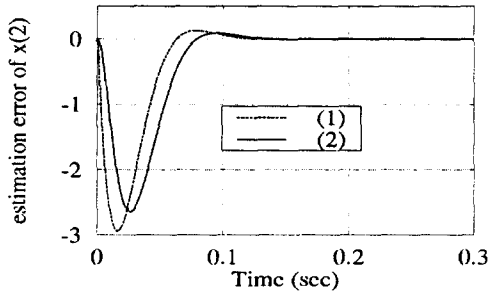
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_d(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -200 & -15000 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 500000 & 2300000 & 0 & -4.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.787 \end{bmatrix} u(t), \end{aligned}$$

$$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

추정대상 플랜트의 초기치를 $x^T(0) = (0.1, 0)$ 라 가정한 상태에서 정적 및 동적 관측자의 상태추정성능을 시뮬레이션을 통해 비교해 보았다. 각각의 관측자는 초기상태는 0이라고 가정하였다. 그림 1의 점선은 정적 관측자의 추정오차 곡선을, 실선은 동적 관측자의 추정오차 곡선을 도시한 것이다. 정적 관측자의 경우 $\tilde{x}_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t)$ 의 오버슈트가 19%에 이르고, $\tilde{x}_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$ 의 과도상태 폭이 -2.94까지 나타난다. 이에 반해 동적 관측자는 안정상태 도달시간은 거의 비슷하면서도 각각 2.75%, -2.64에 불과하다. 따라서 동적 관측자의 성능이 더욱 만족할 만 하다.



(a)



(b)

그림 1 정적 및 동적 관측자의 오차 응답 특성. (a) $\tilde{x}_1(t)$. (b) $\tilde{x}_2(t)$. ((1): 정적 관측자 ($\hat{x}^T(0) = (0, 0)$); (2): 동적 관측자 ($(x_d^T(0), \hat{x}^T(0))^T = (0, 0, 0, 0)$)

Fig. 1 Error responses of static and dynamic observers. (a) $\tilde{x}_1(t)$. (b) $\tilde{x}_2(t)$. ((1): Static observer ($\hat{x}^T(0) = (0, 0)$); (2): Dynamic observer ($(x_d^T(0), \hat{x}^T(0))^T = (0, 0, 0, 0)$)

5. 결 론

본 논문에서는 동적 관측자의 개념과 설계 지침을 기술하였으며, 표준형 및 Luenburger형 동적 관측자 모두에 대해

언급하였다. 제시된 동적 관측자는 통상적인 관측자의 확장된 형태로 볼 수 있다. 그러나 이 개념으로 인한 이득은 상당하다. 예를 들어, 그 이득가운데 하나는 관측자 설계를 선형제어기 설계 문제로 파악할 수 있다는 것이다. 이는 달리 말해 LQG/LTR, H_∞ 등 잘 발달된 기존의 선형 제어기 설계 기법들을 관측자 설계에 그대로 적용할 수 있음을 의미한다. 따라서 관측자 설계자들은 기존의 관측자 개념에서는 실현하기 수월치 않았던 문제, 예컨대 수렴 성능이 우수하면서도 알 수 없는 외란에 건설한 관측자의 설계 등 어려운 관측자 설계 문제를 수행할 수 있다. 향후 동적 관측자 개념을 확장 또는 응용하여 관측자와 관계된 여러 이론 및 응용문제에 적용할 수 있는 방안을 연구할 필요성이 있다.

감사의 글

이 논문은 성균관대학교의 1998학년도 성균학술연구비에 의하여 연구되었음.

참 고 문 헌

- [1] C. T. Chen, *Linear system theory and design*, Holt, Rinehart and Winston, 1984.
- [2] J. D. Cobb, "A unified theory of full-order and low-order observers based on singular system theory," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 39, no. 12, pp. 2497-2502, 1994.
- [3] X. Ding, L. Guo, and P. M. Frank, "Parameterization of linear observers and its application to observer design," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 39, no. 8, pp. 1648-1652, 1994.
- [4] Y. Guan and M. Saif, "A novel approach to the design of unknown input observers," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 36, no. 5, pp. 632-635, 1991.
- [5] T. Kailath, *Linear systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- [6] H. Kwakernaak and R. Sivan, *Linear Optimal Control systems*, John Wiley & Sons, NY, 1972.
- [7] R. Nikoukhah, S. L. Campbell, and F. Delebecque, "Observer design for general linear time-invariant systems," *Automatica*, vol. 34, no. 5, pp. 575-583, 1998.
- [8] J. O'Reilly, *Observer for linear systems*, New York: Academic, 1983.
- [9] J.-K. Park and C.-H. Choi, "A compensation method for improving the performance of multivariable control systems with saturating actuators," *Contr. Theory Advanced Technol.*, vol. 9, no. 1, pp. 305-323, 1993.
- [10] J.-K. Park and C.-H. Choi, "Dynamic compensation method for multivariable control systems with saturating actuators," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 40, no. 9, pp. 1635-1640, 1995.

- [11] J.-K. Park and C.-H. Choi, "Dynamical anti-reset windup method for discrete-time saturating systems," *Automatica*, vol. 33, no. 6, pp. 1055-1072, 1997.
- [12] K. R. Shouse and D. G. Taylor, "Discrete-time observers for singularly perturbed continuous-time systems," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 40, no. 2, pp. 224-235, 1995.
- [13] J. F. Tu and J. L. Stein, "Model error compensation for observer design," *Int. J. Control*, vol. 69, no. 2, pp. 329-345, 1998.
- [14] N. Viswanadham and R. Srichander, "Fault detection using unknown input observers," *Contr. Theory Advanced Technol.*, vol. 3, pp. 91-101, 1987.

저 자 소 개



박종구 (朴鍾久)

1987년 서울대 제어계측공학과 졸업. 동 대학원 석사(1989), 동 대학원 박사(1993). 1995-현재 성균관대학교 전기전자 및 컴퓨터공학부 부교수. 관심분야는 제어이론 및 응용, 컴퓨터 응용 제어 시스템, 추정이론, 가상현실 시스템 및 응용.

Tel : 0331-290-7138, Fax : 0331-290-7231

E-mail : pjg@yurim.skku.ac.kr