

# 회귀행렬 SS-FEM에 의한 비선형 광섬유의 전송신호 해석

論 文
49C-1-9

## Analysis of Signal Propagation in Nonlinear Optical Fiber using SS-FEM with Sparse Matrix

鄭白鎬\* · 李鎬俊\*\*  
(Baek-Ho Jung · Ho-Joon Lee)

**Abstract** - Signal propagation in nonlinear optical fiber is analyzed numerically by using SS-FEM (Split-Step Finite Element Method). By adopting cubic element function in FEM, soliton equation of which exact solution was well known, has been solved. Also, accuracy of numerical results and computing times are compared with those of Fourier method, and we have found that solution obtained from using FEM was very relatively accurate. Especially, to reduce CPU time in matrix computation in each step, the matrix imposed by the boundary condition is approximated as a sparse matrix. As a result, computation time was shortened even with the same or better accuracy when compared to those of the conventional FEM and Fourier method.

**Key Words** : 비선형 광섬유, 단계분할법, 유한요소법, 푸리에법, SS-FEM

### 1. 서 론

광섬유에서 전파되는 신호의 특성을 지배하는 전송방정식은 비선형 슈뢰딩거 방정식 (Nonlinear Schrödinger Equation, NLSE)이다. 이 방정식은 몇 가지 특별한 경우에만 그 엄밀해가 알려져 있다. 광섬유의 분산 및 비선형성을 나타내는 파라미터를 고려하여, NLSE로부터 직접적인 해를 구하기에는 어려움이 많으므로, 수치해석에 의존하여야 한다. 가장 많이 적용되는 수치해석 방법 중의 한가지는 단계분할법(Split-Step Method, SSM)이다 [1]. SSM은 NLSE에서 분산과 비선형의 항을 분리한 다음, 분할된 전송 구간에서 순차적으로 각 영향을 고려한다. 그리고 분산 효과를 나타내는 시간 영역의 미분 연산자 처리를 위하여, 주파수 영역의 연산자로 변환하여 계산하는 푸리에 변환이 많이 사용된다. 이 방법은 단계분할 푸리에법 (Split-Step Fourier Method, SS-FM)으로 알려져 있으며, 최근까지도 많은 시뮬레이션에 사용되고 있다 [2, 3]. SS-FM은 분산 연산자를 주파수 영역에서 처리를 하지만, 시간 영역에서 연산을 수행하는 시뮬레이션 기법도 개발되어 있다 [4, 5].

수치해석의 경우 광섬유의 파라미터가 주어진다면, 시간 영역의 표본화 개수와 전송거리에 대한 분할 간격의 선택 등이 임의적이며, 해석적인 해가 없는 경우 설정한 입력에 대한 출력 신호가 얼마나 정확한지의 여부가 문제로 남게 된다.

본 논문에서는 장거리 전송의 안정된 시뮬레이션 구현을 위하여, 고시바에 의해 적용된 SS-FEM을 이용하여 [6, 7], 전송거리의 증가에 따른 해의 수렴성을 솔리톤에 대하여 그 해석해와 비교하였다. 또한 SS-FM에 의한 수치 결과와도 그 정확성 및 계산 시간을 고찰하였다. 이미 SS-FEM을 적용한 수치해석의 결과가 발표되었지만 [8, 9], 본 논문에서는 해의 수렴성이 더 좋은 3차 요소함수를 사용하였으며, 특히 행렬 근사를 도입하여 계산시간을 단축하는 알고리즘을 제안하였다. 즉, FEM을 적용하면 행렬의 연산으로 인하여 전송구간의 분할 단계가 반복될수록 전체 계산시간이 증가하게 된다. 이 단점을 보완하기 위하여 경계조건이 적용된 최종 행렬에서 각각의 행렬 요소가 설정된 제한치 이하인 경우, 그 요소를 영으로 두어서 회귀행렬로 근사화하여 기존의 FEM에 의한 결과와 동일한 정확성을 유지하면서도 계산시간을 SS-FM의 계산시간 이하의 수준으로 감소시킬 수 있었다.

수치해석의 결과로서 전송거리를 증가시키면서 각 위치마다 해석해에 대한 수치해의 오차를 계산하였으며, 표본화 개수에 따른 수렴성 등을 고찰하였다. 또한 회귀행렬의 근사시 행렬 요소를 영으로 만드는 제한치의 변화에 따른 오차를 검토하였다. 본 논문의 순서는 다음과 같다. 2장에서 NLSE와 단계분할법을 소개하고, SS-FM과 SS-FEM 수치해석법을 논한다. 그 다음 3장에서 수치 결과를 보이고, 마지막 장에서 결론을 맺는다.

### 2. 전송방정식과 단계분할법

광섬유에서 전파되는 신호의 특성을 예측하는 지배방정식은 NLSE이다. 수치 계산된 결과의 타당성 검증은 위하여 분산과 비선형성의 두 효과를 동시에 반영한 엄밀해를 가지

\* 正 會 員 : 湖 西 大 情 報 通 信 工 學 部 專 任 講 師 · 工 博

\*\* 正 會 員 : 湖 西 大 情 報 通 信 工 學 部 教 授 · 工 博

接 受 日 字 : 1999年 10月 22日

最 終 完 了 : 1999年 11月 29日

는 솔리톤의 경우를 고려하고자 한다. 역산란법에 의한 해를 구하기 위하여 전송방정식을 정규화한 결과는 다음과 같다 [7, 10].

$$-j\frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} + |q|^2 q = 0 \quad (1)$$

여기서  $q(\xi, \tau)$ 는 신호크기이며,  $\xi$ 는 전송 방향의 위치,  $\tau$ 는 시간으로서, 모두 정규화된 파라미터이다. 식 (1)에서 좌변의 제 2항은 군속도 분산 (group velocity dispersion)에 의한 항이며, 제 3항은 비선형성에 의한 자기 위상 변조 (self phase modulation)를 나타낸다.

단계분할법을 적용하기 위하여 (1)을 비선형항과 분산항으로 나누어 쓰면

$$-j\frac{\partial q}{\partial \xi} + |q|^2 q = 0 \quad (2)$$

$$-j\frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} = 0 \quad (3)$$

와 같다. 식 (2)의 해는 근사적으로

$$q(\xi + \Delta \xi, \tau) \approx q(\xi, \tau) \exp(\hat{N}\Delta \xi) \quad (4)$$

와 같다. 여기서  $\Delta \xi$ 는 전송축상에서 거리에 대한 분할 간격이며, 지수항의 연산자는  $\hat{N} = -j|q(\xi, \tau)|^2$ 이다. 식 (3)의 해는 푸리에법에 의하여 다음과 같이 계산된다 [1].

$$q(\xi + \Delta \xi, \tau) = F^{-1}[F(q(\xi, \tau)) \exp(\hat{D}\Delta \xi)] \quad (5)$$

여기서  $\Omega$ 는 정규화 시간 파라미터  $\zeta$ 에 대응되는 주파수이며, 그리고  $\hat{D} = j\Omega^2/2$ 이다. 그리고  $F$  및  $F^{-1}$ 은 푸리에 변환 및 그 역변환을 나타낸다. 광섬유에서 분산과 비선형의 영향은 상호 작용하지만, SSM에서는 전송축상의 각 분할 단계에서 독립적으로 처리하여 그 결과를 각각의 입력으로 사용한다. 즉, (5)의 결과를 (4)의 단계 입력으로 결합하면, (1)의 해는 근사적으로 다음과 같이 표현된다.

$$q(\xi + \Delta \xi, \tau) \approx \exp(\hat{N}\Delta \xi) F^{-1}[\exp(\hat{D}\Delta \xi) F(q(\xi, \tau))] \quad (6)$$

식 (6)에 의해 해를 얻는 방법이 바로 SS-FM이다.

식 (3)에 유한요소법을 적용하기 위하여 먼저 가중함수  $N^e$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$N^e(\tau) = \sum_{i=1}^{N_e} N_i^e(\tau), \quad \tau \in \Omega_e \quad (7)$$

여기서  $N_i^e$ 는 요소  $e$ 에서  $i$ 번째 가중함수이고,  $\Omega_e$ 는 요소  $e$ 의 영역이다. 그리고  $N_e$ 는 요소  $e$ 에서 절점의 개수이다. 식 (7)을 이용하여 식 (3)에서 갤러킨 방법에 의한 FEM을 적용하면

$$-j \int_{\Omega_e} N_i^e \frac{\partial q^e}{\partial \xi} d\tau - \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \frac{dN_i^e}{d\tau} \frac{\partial q^e}{\partial \tau} d\tau = -\frac{1}{2} [N_i^e \frac{\partial q^e}{\partial \tau}]_{\Omega_e} \quad (8)$$

을 얻는다 [11].  $q^e$ 는 요소  $e$ 에서  $q(\xi, \tau)$ 이다.

전개함수를 이용하여 요소  $e$ 에서  $q^e$ 를 나타내면

$$q^e(\xi, \tau) = \sum_{j=1}^{N_e} N_j^e(\tau) q_j^e(\xi) \quad (9)$$

가 된다.  $q_j^e$ 는 요소  $e$ 에서  $j$ 번째 미지수이다. 그리고  $N_j^e(\tau)$ 는 전개함수이며,  $N_e$ 는 요소  $e$ 에서 미지수의 개수가 된다. 식 (9)를 (8)에 대입하면, 그 결과로서 다음과 같은 행렬식을 얻을 수 있다.

$$[M^e] \frac{d}{d\tau} [q^e] + [K^e][q^e] = [G^e] \quad (10)$$

식 (10)에서 각 행렬의 요소는

$$M_{ij}^e = -j \langle N_i^e, N_j^e \rangle_{\Omega_e} \quad (11)$$

$$K_{ij}^e = -\frac{1}{2} \left\langle \frac{dN_i^e}{d\tau}, \frac{dN_j^e}{d\tau} \right\rangle_{\Omega_e} \quad (12)$$

$$G_i^e = -\frac{1}{2} \left[ N_i^e \frac{\partial q^e}{\partial \tau} \right]_{\Omega_e} \quad (13)$$

와 같으며, 식 (11)과 (12)에서  $\langle \cdot \rangle$ 는 다음과 같다.

$$\langle N_i^e, N_j^e \rangle_{\Omega_e} = \int_{\Omega_e} N_i^e N_j^e d\tau \quad (14)$$

$$\left\langle \frac{dN_i^e}{d\tau}, \frac{dN_j^e}{d\tau} \right\rangle_{\Omega_e} = \int_{\Omega_e} \frac{dN_i^e}{d\tau} \frac{dN_j^e}{d\tau} d\tau \quad (15)$$

여기서 3차 요소함수를 사용하면 (14)와 (15)의 각 요소는 다음과 같다.

$$\langle N_i^e, N_j^e \rangle_{\Omega_e} = \frac{l_e}{1680} \begin{bmatrix} 128 & 99 & -36 & 19 \\ 99 & 648 & -81 & -36 \\ -36 & -81 & 648 & 99 \\ 19 & -36 & 99 & 128 \end{bmatrix}$$

$$\left\langle \frac{dN_i^e}{d\tau}, \frac{dN_j^e}{d\tau} \right\rangle_{\Omega_e} = \frac{1}{40l_e} \begin{bmatrix} 148 & -189 & 54 & -13 \\ -189 & 432 & -297 & 54 \\ 54 & -297 & 432 & -189 \\ -13 & 54 & -189 & 148 \end{bmatrix}$$

여기서  $l_e$ 는 요소  $e$ 의 길이이다. 행렬식 (10)의 공간 미분 연산자를 처리하기 위하여 다음과 같이 유한차분법 및 평균치 근사화를 이용하기로 한다.

$$\frac{d}{d\tau} q_j^e(\xi) = \frac{q_j^e(\xi + \Delta \xi) - q_j^e(\xi)}{\Delta \xi} \quad (16)$$

$$q_j^e(\zeta) = \frac{q_j^e(\zeta + \Delta\zeta) + q_j^e(\zeta)}{2} \quad (17)$$

식 (16)과 (17)을 행렬식 (10)에 대입하면

$$[A^e][q^e(\zeta + \Delta\zeta)] = [B^e][q^e(\zeta)] + [G^e] \quad (18)$$

와 같으며, 그 결과 (18)에서 새로 정의된 행렬은

$$[A^e] = [M^e] + \frac{\Delta\zeta}{2}[K^e] \quad (19)$$

$$[B^e] = [M^e] - \frac{\Delta\zeta}{2}[K^e] \quad (20)$$

이다. 식 (18)에서 전체 요소의 수  $M$ 에 대하여 행렬조합 과정을 수행하면, 그 결과는

$$[A][q(\zeta + \Delta\zeta)] = [B][q(\zeta)] + [G] \quad (21)$$

가 되고, 행렬  $[A]$ 와  $[B]$ 는  $MN_e + 1 = N + 1$ 의 차수를 가지는 정방행렬이 된다. 여기서  $N = MN_e$ 이다. 식 (21)의 행렬식을 풀면, 분할된 전송축에서  $\Delta\zeta$ 만큼 증가된 단계의 출력인 미지행렬을 얻을 수 있다. 이를 풀기 전에 적용되는 경계조건은 다음과 같다.

$$q(\zeta, \tau) = q(\zeta, \tau + T) \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} q(\zeta, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} q(\zeta, \tau + T) \quad (23)$$

여기서  $T$ 는 시간 영역의 표본화 구간이다. 이 경계조건은 신호함수  $q(\tau)$ 에 대하여 주기  $T$ 의 연속성을 고려한 결과이다. 절점수, 즉 전체 미지수를  $N + 1 = 4$ 라고 가정하면, 행렬식 (21)은 다음과 같은 형태가 된다.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(\zeta + \Delta\zeta) \\ q_2(\zeta + \Delta\zeta) \\ q_3(\zeta + \Delta\zeta) \\ q_4(\zeta + \Delta\zeta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(\zeta) \\ q_2(\zeta) \\ q_3(\zeta) \\ q_4(\zeta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \end{bmatrix} \quad (24)$$

그러므로 식 (22)에 의해  $q_1 = q_{N+1}$ 이므로, 이를 행렬식 (24)에 적용하여 다시 쓰면

$$\begin{bmatrix} A_{11} + A_{14} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} + A_{24} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} + A_{34} & A_{32} & A_{33} \\ A_{41} + A_{44} & A_{42} & A_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(\zeta + \Delta\zeta) \\ q_2(\zeta + \Delta\zeta) \\ q_3(\zeta + \Delta\zeta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} B_{11} + B_{14} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} + B_{24} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} + B_{34} & B_{32} & B_{33} \\ B_{41} + B_{44} & B_{42} & B_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(\zeta) \\ q_2(\zeta) \\ q_3(\zeta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \end{bmatrix} \quad (25)$$

이 된다. 경계조건 (23)을 적용하기 위하여 행렬식 (25)에서 1행과 4행을 합하면

$$\begin{bmatrix} A_{11} + A_{14} + A_{41} + A_{44} & A_{12} + A_{42} & A_{13} + A_{43} \\ A_{21} + A_{24} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} + A_{34} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_1(\zeta + \Delta\zeta) \\ q_2(\zeta + \Delta\zeta) \\ q_3(\zeta + \Delta\zeta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} + B_{14} + B_{41} + B_{44} & B_{12} + B_{42} & B_{13} + B_{43} \\ B_{21} + B_{24} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} + B_{34} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(\zeta) \\ q_2(\zeta) \\ q_3(\zeta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 + G_4 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix} \quad (26)$$

이 된다. 요소함수를 선택하여 경계조건 (23)을 적용하면 (13)에 의해  $[G] = 0$ 을 얻는다. 그러므로 행렬식 (26)을 (21)과 같은 형태로 다시 쓰면

$$[L_A][q(\zeta + \Delta\zeta)] = [L_B][q(\zeta)] \quad (27)$$

가 된다. 행렬  $[L_A]$  및  $[L_B]$ 는 각각 (26)의 좌변 및 우변에서 대응되는 행렬이며, 경계조건이 적용되어 재구성된 결과로서 차수가  $N = MN_e$ 인 정방행렬이다. 식 (27)의 연산에서

$$[q(\zeta + \Delta\zeta)] = [L][q(\zeta)] \quad (28)$$

로 두면,  $[L] = [L_A]^{-1}[L_B]$ 이며, 이 행렬은 분할 단계의 증가와 무관하며, 코드 수행시 초기에 1회의 계산으로 단계가 증가할 때마다 그 사용이 반복된다. 그러므로 식 (28)을 이용하여 시간영역에서 직접 분산효과를 고려한 해를 얻고, 이 결과를 식 (4)의 입력으로 사용하여 SS-FEM에 의한 최종해를 얻을 수 있다.

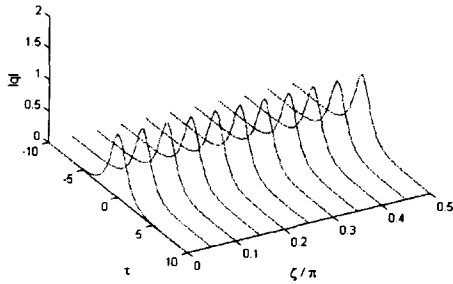
### 3. 수치해석 및 결과

지금까지 유도된 SS-FEM에 의한 공식을 적용하여 산출된 수치 결과를 보이고, 푸리에 방법과 비교하고자 한다. 특히 FEM의 적용시 행렬의 연산으로 인한 계산시간 증가의 단점을 보완하고자, 식 (28)에서 우변의 최종 행렬  $[L]$ 을 희귀행렬로 근사화시켜 계산 시간을 단축하는 과정에 대해서도 자세히 논한다.

식 (1)의 전송방정식에 대하여 입력으로 사용되는 신호함수가

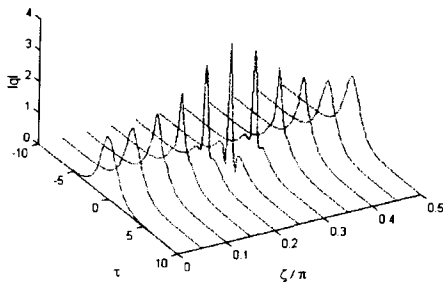
$$q(0, \tau) = A \operatorname{sech} \tau \quad (29)$$

FEM, A=1, N=180



(a)

FEM, A=2, N=180



(b)

그림 1 전송 구간  $\zeta=0\sim 0.5\pi$ 에서 SS-FEM으로 계산된 수치해와 해석해의 비교, 미지수 개수  $N=180$  (3차 요소 개수  $M=60$ ), (a)  $A=1$ , (b)  $A=2$

Fig. 1 Comparison of SS-FEM and exact solutions in  $\zeta = 0 \sim 0.5\pi$  number of unknowns  $N=180$  (number of cubic elements  $M=60$ ), (a)  $A=1$ , (b)  $A=2$

이면, 역산란법에 의한 해석 해는 이미 잘 알려져 있다. 즉, 식 (29)의 입력에 대한 식 (1)의 해는 다음과 같다 [1, 10].

$$q(\zeta, \tau) = \text{sech } \tau \exp\left(-j\frac{\zeta}{2}\right), \quad A=1 \quad (30)$$

$$q(\zeta, s) = \frac{4[\cosh(3s) + 3\exp(-j4\zeta)\cosh s]}{\cosh(4s) + 4\cosh(2s) + 3\cos(4\zeta)} \exp\left(-j\frac{\zeta}{2}\right) \quad A=2 \quad (31)$$

수치해석시 (29)를 입력으로 하였으며, 전송축의 분할간격은  $\Delta\zeta = \pi/200$ , 시간 영역의 전체 구간  $T$ 는 20으로 두었다. 3차 요소 함수를 사용하면  $N_e=3$ 이고, 요소의 수를  $M$ 이라 한다면 식 (28)에서 미지수의 개수는  $N=3M$ 이 된다. SS-FM에 의한 수치 결과의 표현시  $N$ 은 시간 영역의 표본 개수가 된다. 코드 작성시 사용한 언어는 MATLAB이며, 연산은 범용 PC를 이용하였다.

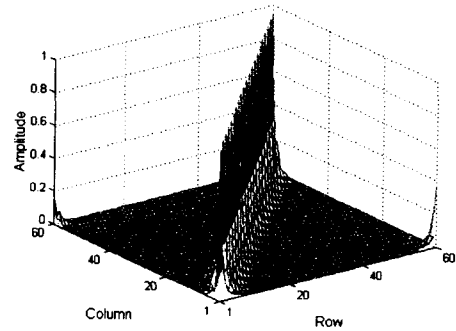


그림 2 행렬  $[L]$ 의 요소 크기 분포,  $N=60$

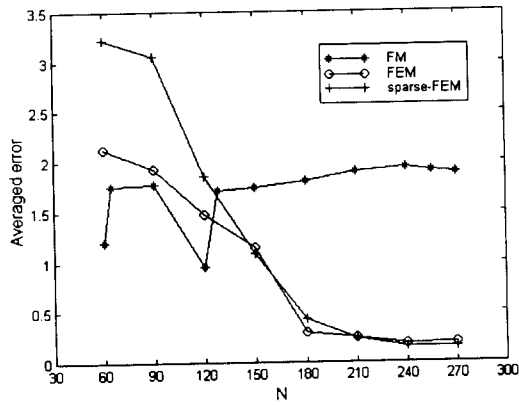
Fig. 2 Amplitude distribution of matrix elements in  $[L]$ ,  $N=60$

먼저 식 (4)와 (28)로 작성된 SS-FEM 코드의 확인 및 계산된 수치해의 정확성을 검증하기 위하여 구간  $\zeta=0\sim 0.5\pi$ 에서 계산하였으며 신호의 크기를 그림 1에 나타내었다. 이때 3차 요소의 개수를  $M=60$ 으로 하였다. 그림 1의 (a)와 (b)는 각각  $A=1$  및  $A=2$ 일 때 전송되는 펄스의 모양이며, 각 그림에서 식 (30)과 (31)에 의한 엄밀해를 동시에 나타내었으나, 상호간의 구분이 전혀 되지 않을 정도로 서로 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다.

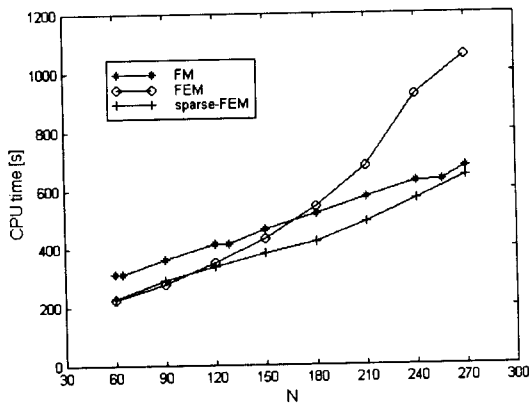
각 분할 단계에서 FEM에 의한 계산 시간은 미지수의 개수가 증가할수록, 행렬 차수의 곱에 비례한다. 따라서 계산 시간을 감축시키기 위하여, 식 (28)의 행렬  $[L]$ 을 조사해보면, 희귀행렬인  $[L_A]$ 와  $[L_B]$ 의 연산으로 구성되어 있다. 그러나  $[L_A]$ 의 역행렬은 희귀행렬이 아니고, 따라서 행렬  $[L]$  역시 희귀행렬이 아니다. 그러나  $[L]$ 은 그림 2에서 보듯이 주대각 행렬과 가장자리에 있는 일부 행렬 요소를 제외하면 그 크기는 상대적으로 매우 작음을 알 수 있다. 그러므로 각 요소의 크기가 일정한 값 이하이면 영으로 근사화하여  $[L]$ 을 희귀행렬로 둘 수 있다.

지금부터는 유한요소법, 푸리에법, 그리고 희귀행렬 근사에 의한 유한요소법에 의한 각 시뮬레이션의 결과를 상호 비교하면서 고찰하고자 한다. 계산시 해의 수렴성 및 계산 시간은 미지수의 개수에 따라 결정된다. 각 방법의 정확성과 계산시간을 살펴보기 위하여 미지수의 개수를 변화시키면서 전송거리  $200\pi$ 까지 계산하였다. 미지수의 개수는  $N$ 을 60부터 270까지 30 간격으로 하였다. 이는 FM에서 표본화 개수가 되고, FEM의 경우 3차 요소 함수를 사용할 때 요소의 수  $M$ 이 20부터 10개의 간격으로 90까지 해당된다. FM의 경우 FFT(fast Fourier transform)의 적용을 위해 표본의 개수를  $N=64, 128, 256$ 를 추가하였다.

그림 3은  $A=2$ 에 대하여 마지막 구간의 평균오차와 전체 구간의 계산시간을 보였다. 평균오차는 마지막 전송구간 직전의  $0.5\pi$ , 즉  $199.5\sim 200\pi$  동안 분할 간격이  $\Delta\zeta = \pi/200$ 이므로 100개의 단계에서 각 오차를 합하여 평균을 한 결과이다. 평균 구간을  $0.5\pi$ 로 둔 이유는 그림 1(b)와 같



(a)



(b)

그림 3 미지수의 개수에 따른 푸리에법 (FM), 유한요소법 (FEM), 그리고 회귀행렬 근사에 의한 유한요소법 (sparse-FEM)의 비교, (a) 평균오차, (b) 계산시간

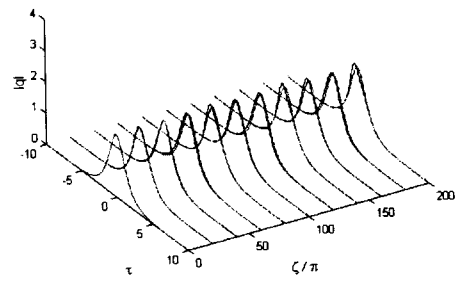
Fig. 3 Comparison of (a) averaged error and (b) computation time as a function of number of unknowns

이 신호 크기의 형태가  $0.5\pi$ 마다 반복되기 때문이다. 각 단계마다 오차를 계산하는데 사용된 식은

$$\text{Error} = \frac{\int_{-T/2}^{T/2} |q_{\text{analytic}} - q_{\text{numerical}}| dt}{\int_{-T/2}^{T/2} q_{\text{analytic}} dt} \quad (32)$$

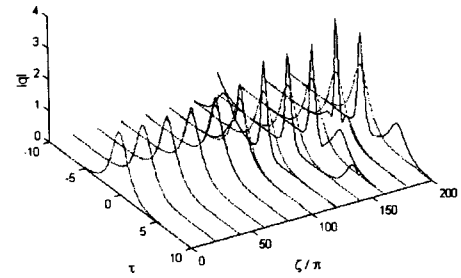
이다 [8]. 위의 각  $q$ 는 복소량의 절대값을 나타낸다. 그림 3(a)의 평균 오차를 살펴보면 FM의 경우  $N=120$ 일 때 약 0.95로서 가장 오차가 작았으며, FEM의 경우  $N=180$  이상이 되면 약 0.25 이하의 매우 낮은 오차를 보이고 있으므로 미지수의 개수 선택에 있어서 폭이 넓다. 그러므로 일반적인 광전송 시뮬레이션의 경우 미지수의 선택에 있어서 FEM이 유리함을 볼 수 있다. 회귀행렬을 적용한 경우도 거

FEM,  $A=2, N=240$



(a)

FM,  $A=2, N=120$



(b)

그림 4  $A=2$ 일 때 계산된 수치해와 해석해, (a) FEM, (b) FM  
Fig. 4 Numerical and analytic solutions,  $A=2$ , (a) FEM, (b) FM

의 동일한 오차 수준이다. 그림 3(b)에서 먼저 FM과 FEM의 계산시간을 살펴보면 FM의 경우  $N$ 의 증가에 따라 비례하여 증가하는 반면, FEM의 경우는 지수함수 형태로 증가함을 볼 수 있다. 그러나 회귀행렬 근사를 통한 FEM의 경우 FM의 경우와 증가 형태가 비슷하며, 계산시간은 오히려 그 이하로 감소함을 볼 수 있다. 이 때 회귀행렬 근사시 행렬요소의 크기가  $10^{-9}$  이하이면 영으로 두었다.  $A=1$ 일 때 (따로 보이지는 않았지만) 출력단의 평균오차는 FM의 경우  $N=150$ 까지만, FEM의 경우 모든 미지수의 개수에 대하여 0.003 이하이었다.

그림 4는 그림 3(a)에서 보듯이 가장 오차가 작은 미지수 개수의 경우, 즉 FM은  $N=120$ , FEM은  $N=240$ 에서 펄스 모양을 전송거리  $200\pi$ 까지 엄밀해와 함께 나타내었다. 그림 4(a)는 FEM에 의한 결과로서, 전송구간 끝까지 두 해가 잘 일치하고 있으며, 그림 4(b)는 FM에 의한 결과로서,  $100\pi$  전부터 엄밀해와 일치하지 않음을 볼 수 있다. 회귀행렬을 적용한 경우에도 그림 3(a)에서 볼 수 있듯이 기존 FEM과 오차가 동일하여 그림 4(a)와 똑 같은 전송파형을 얻었다.

그림 5는 그림 4의 계산과 동시에 그림 1(b)처럼 파형 변화의 공간적인 주기인  $0.5\pi$ 마다 각 단계에서 오차를 계산하여 그린 것이다. SS-FM에 의한 결과는 약  $90\pi$ 까지 매우

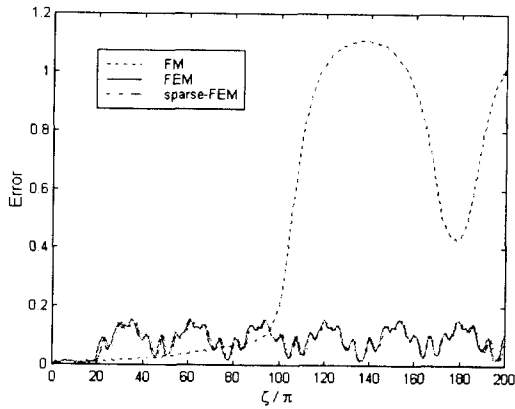


그림 5  $\zeta=200\pi$ 까지 전송 시뮬레이션에서 위치에 따른 수치 결과의 오차

Fig. 5 Errors in numerical simulation along propagation axis to  $\zeta=200\pi$

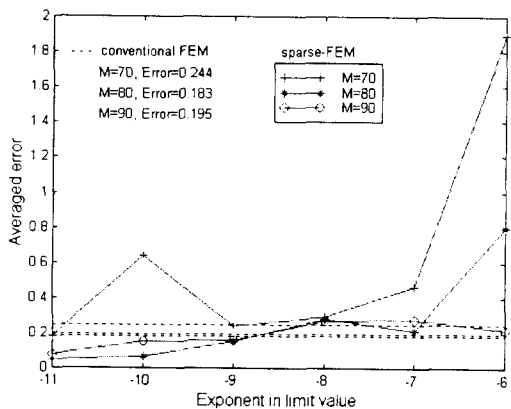


그림 6 회귀 행렬 변환시 제한치 ( $10^n$ )의 지수 ( $n$ )에 따른 평균 오차

Fig. 6 Averaged error as a function of limit value ( $10^n$ ) in sparse matrix

작은 오차를 보이지만, 그 이상이 되면 오차가 급격히 증가하게 된다. 그러나 SS-FEM에 의한 결과는 약 0~1.5 사이에서 진동하면서 거의 일정하게 유지된다. 육안으로 구별이 되지 않지만 회귀행렬을 적용한 SS-FEM 또한 기존의 FEM에 의한 방법과 동일한 오차 분포를 보인다.

회귀행렬로 근사할 때 행렬의 각 요소가 제한치 이하이면 그 요소를 영으로 두었다. 이때 제한치를 설정하는 선택의 문제가 발생하게 된다. 이에 따른 오차 범위를 조사하기 위하여 제한치를 변화시키면서  $200\pi$ 까지 전송시 오차를 계산하여 기존 FEM에 의한 결과와 비교하였다. 그림 6은 제한치를  $10^{-11} \sim 10^{-6}$ 으로 두었을 때, 지수를 정수로 택하여 그 변화에 따라 나타낸 마지막 구간  $0.5\pi$ 동안의 평균오차이다. 요소의 개수를 그림 3(a)에서 보듯이 오차가 작은 경우인

70, 80, 90으로 하였으며, 요소의 수가 80과 90인 경우, 지수  $n$ 이 -11부터 -7까지 범위에서 회귀행렬 근사에 의한 해는 기존 FEM에 의한 오차의 수준이거나 오히려 그 이하임을 볼 수 있다.

#### 4. 결 론

비선형 광섬유에서 전파되는 광신호의 예측을 위하여 NLSE를 SS-FEM에 의하여 해석하였다. 전송 거리의 증가에 따라 해의 수렴성을 검토한 결과, 정확성에 있어서 SS-FEM이 장거리 전송 시뮬레이션에 유리하였다. 수치해석시 그 정확성은 미지수의 개수 선택에도 의존하였으며, SS-FEM의 경우 계산시간은 많았지만 해의 정확성을 보장하는 미지수 선택의 범위가 넓었다. 또한 회귀행렬 근사를 통하여 기존 FEM과 비교할 때 동일 오차 수준을 유지하면서, 계산시간을 매우 단축할 수 있었다. 그리고 해가 수렴하는 미지수의 개수 범위에서 회귀행렬 근사시 행렬 요소를 영으로 두는 제한치의 설정에 따른 오차를 조사하였다.

#### 참 고 문 헌

- [1] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*. Academic Press, pp. 50-55, 142-148, 1995.
- [2] L. Bergman, J. Morookian, and C. Yeh, "An all-optical long-distance multi-Gbytes/s bit-parallel WDM single-fiber link," *J. Lightwave Technol.*, vol. 15, no. 9, 1577-1582, Sept. 1998.
- [3] S. Shen, C. C. Chang, H. P. Sardesai, V. Binrajka, and A. M. Weiner, "Effects of self-phase modulation on sub-500 fs pulse transmission over dispersion compensated fiber links," *J. Lightwave Technol.*, vol. 17, no. 3, 452-461, March 1999.
- [4] A. Carena, V. Curti, R. Gaudino, P. Poggiolini, and C. Benedetto, "A time-domain optical transmission system simulation package accounting for nonlinear and polarization-related effects in fiber," *IEEE J. Select. Areas Commun.*, vol. 15, no. 4, pp.751-765, May 1997.
- [5] O. Lenzmann, I. Koltchanov, A. Lowery, D. Breuer, and A. Richter, "Photonic multi-domain simulator," in *OFC '99*, White Paper, 1998.
- [6] K. Hayata, A. Misawa, and M. Koshiba, "Split-step finite-element method applied to nonlinear integrated optics," *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 7, no. 9, 1772-1784, Sept. 1990.
- [7] M. Koshiba, *Optical Waveguide Theory by the Finite Element Method*. KTK, pp. 230-238, 1992.
- [8] 정백호, 이호준, "단계분할 유한 요소법에 의한 광섬유의 신호 전송 예측," 1999년도 대한전기학회 하계학술대회 논문집, pp. 2441-2443, 1999. 7.
- [9] 홍순원, 이호준, "단계 분할 유한 요소법을 이용한 분산 보상 광 전송 시스템의 시뮬레이션," 대한전자공학회 논문지, 36권, 8호, pp. 751-758, 1999. 8.
- [10] J. R. Taylor, *Optical Solitons-Theory and Experiment*. Cambridge Press, pp. 73-84, 1992.
- [11] J. Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*. John Wiley & Sons, chapter 3, 1993.

저 자 소 개



정 백 호(鄭 白 鎬)

1985년 2월 경북대 전자공학과 (학사). 1989년 동 대학원 전자공학과(석사). 1997년 경북대 대학원 전자공학과(공학박). 1989년 2월~1994년 3월 국방과학연구소 연구원. 1995년 9월~1996년 10월 경북대 전자·전기공학부 조교.

1997년 9월~현재 호서대 정보통신공학부 전임강사. 주관심분야: 전자파 수치해석, 이동통신 전파환경, 비선형 광학

Tel : 0418-540-5459, Fax : 0418-540-5405

E-mail : bhjung@dogsuri.hoseo.ac.kr



이 호 준(李 鎬 俊)

1955년 8월 21일생. 1978년 2월 성균관대 전자공학과(학사). 1980년 동 대학원 전자공학과 졸업(석사). 1987년 동 대학원 전자공학과(공학박). 1980년 7월~1983년 6월 육군사관학교 전자공학과 전임강사. 1987년 3

월~현재 호서대 정보통신공학부 교수. 1991년 7월~1992년 6월 Stanford University 교환 교수. 주관심분야: 광통신시스템, 광센서, 광신호처리.

E-mail : hojoon@dogsuri.hoseo.ac.kr