

변위 불연속 방법에 의한 모드 III 꺾인균열 해석 연구

서 옥 환*

*한라대학교 기계공학부

A Study on Mode III Kinked Crack Analysis Using Displacement-Discontinuity Method

Ukhwan Sur*

*School of Mechanical Engineering, Halla University, Wonju 220-712, Korea

Abstract

An integral equation representation of cracks was presented, which differs from well-known "dislocation layer" representation. In this new representation, an integral equation representation of cracks was developed and coupled to the direct boundary-element method for treatment of cracks in plane finite bodies. The method was developed for in-plane(modes I and II) loadings only. In this paper, the method is formulated and applied to mode III problems involving smooth or kinked cracks in finite region. The results are compared to exact solutions where available and the method is shown to be very accurate despite of its simplicity.

(Received May 23, 2000)

Key Words : Stress intensity factor, Kinked crack, Boundary integral equation, Finite region, Displacement-discontinuity method

1. 서 론

최근 용접구조물의 증가로 인해 용접구조물의 설치 및 안전과 관련하여 강도계산의 필요성이 대두되고 있으며, 이 문제해결에 접근하는 방법 중에 유한영역에서의 균열문제의 해결을 위하여 잘 알려진 경계적분방정식과 연합할 균열의 적분방정식 개발에 관심이 고조되고 있다¹⁻⁴⁾.

참고문헌[1]에서 이미 개발된 균열적분방정식 표현은 미지수로서 균열선을 따라 변위 불연속(Displacement-discontinuity)들을 포함한다. 이 값들이 균열선단(Crack Tip)에서 영(0)이고 또한 꺾임에서도 연속이기 때문에 이 표현방식의 수치해석은 경계적분방정식 취급보다 복잡하지 않다.

이 논문에서는 참고문헌[1]에서 변위 불연속 방법을 이용하여 개발된 균열적분방정식에 직접 경계적분방정식 방법을 결합하여 유한영역의 꺾임을 포함하는 모드 III 균열문제의 해결에 응용되었다.

2. 이론전개(Theoretical Development)

한 점 x 에서의 응력을 알고자하는 무한의 등방(isotropic)의 탄성영역을 고려하자. 각각의 점들에서 Fig.1 에서와 같이 단위수직벡터(unit normal) n 과 \bar{n} 를 갖는 내부 표면(inner surface)을 참조하고 영향함수(influence functions), $(uR)_{33}(x, \bar{x})$, $(uc)_{33}(x, \bar{x})$, $(\pi R)_{33}(x, \bar{x})$ 그리고 $(\pi c)_{33}(x, \bar{x})$ 를 고려하자. 그리고 응력함수라 정의되는 π 는 다음과 같이 놓는다.

$$\sigma_{13} = \partial \pi_3 \quad (1)$$

$$\sigma_{23} = \partial \pi_3 \quad (2)$$

Fig. 1에서와 같이 Γ 는 균열(crack)을 나타낸다고 가정하면 양방향에 따라 변하는 표면을 갖는 외력(traction) $t_3(s)$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$t_3(s) = -(\sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2) = -\frac{d\pi_3}{ds} \quad (3)$$

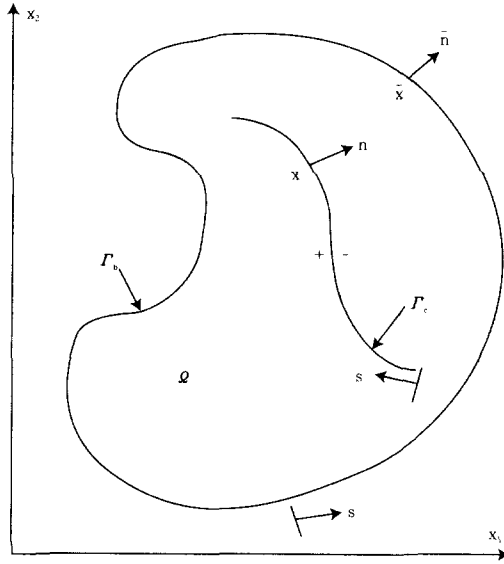


Fig. 1 Plane elastic region containing a crack

Fig. 1에서와 같이 외부경계선 Γ_b 및 내부의 Piecewise Smooth Crack Line Γ_c 를 갖는 어떤 탄성구역 Ω 가 외부경계선의 일부분 위에 외력 (traction) t_3 및 나머지 경계선 위에 변위 (displacement) u_3 를 내재하고 있다고 가정하자. 그때 직접경계적분방정식 (direct boundary integral equation) 과 참고문헌 [1]에서 개발된 적분방정식이 다음과 같이 연합된다.

$$c_3(x)u_3(x) = \oint_{\Gamma_b} (uR)_{33}(x, \bar{x})t_3(\bar{x})ds(\bar{x}) - \oint_{\Gamma_b} (uc)_{33}(x, \bar{x})u_3(\bar{x})ds(\bar{x}) + \oint_{\Gamma_c} (uc)_{33}(x, \bar{x})\Delta u_3(\bar{x})ds(\bar{x}) \quad x \text{ on } \Gamma_b \quad (4)$$

$$\pi_3(x) = \oint_{\Gamma_b} (\pi R)_{33}(x, \bar{x})t_3(\bar{x})ds(\bar{x}) - \oint_{\Gamma_b} (\pi c)_{33}(x, \bar{x})u_3(\bar{x})ds(\bar{x}) + \oint_{\Gamma_c} (\pi c)_{33}(x, \bar{x})\Delta u_3(\bar{x})ds(\bar{x}) \quad x \text{ on } \Gamma_c \quad (5)$$

여기서 $\Delta u_3 = u_3^- - u_3^+$ 는 상대적인 균열면 변위를 나타낸다.

3. 수치해법(Numerical Treatment)

Fig. 2에서와 같이 외부의 경계선위에 M_b 개 및 균열면 위 M_c 개의 직선으로 나타내어진 식 (4) 및 (5)의 수치해법이 다음과 같이 표현된다.

$$c_3(x)u_3(x) = \sum_{m=1}^{M_b} \int_m [(uR)_{33}(x, \bar{x})t_3(\bar{x}) - (uc)_{33}(x, \bar{x})u_3(\bar{x})]ds(\bar{x}) + \sum_{m=M_b+1}^{M_b+M_c} \int_m (uc)_{33}(x, \bar{x})\Delta u_3(\bar{x})ds(\bar{x}) \quad x \text{ on } \Gamma_b \quad (6)$$

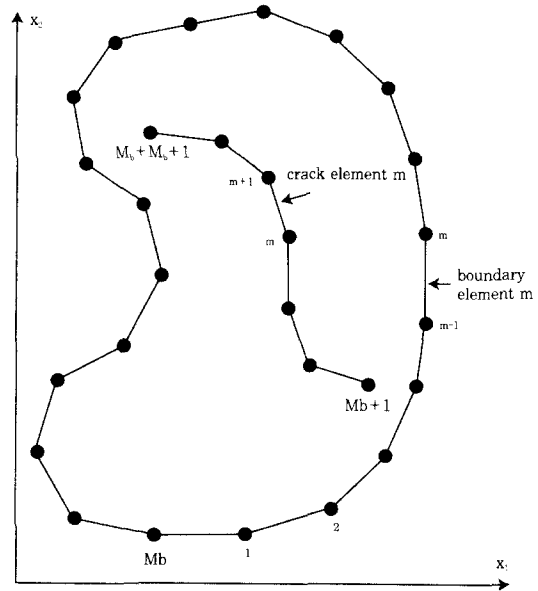


Fig. 2 Discretized plane region containing a discretized crack

$$\pi_3(x) = \sum_{m=1}^{M_b} \int_m [(uR)_{33}(x, \bar{x})t_3(\bar{x}) - (\pi c)_{33}(x, \bar{x})u_3(\bar{x})]ds(\bar{x}) + \sum_{m=M_b+1}^{M_b+M_c} \int_m (\pi c)_{33}(x, \bar{x})\Delta u_3(\bar{x})ds(\bar{x}) \quad x \text{ on } \Gamma_c \quad (7)$$

각 요소에서의 변위, 외력(traction) 그리고 변위 불연속(Displacement-discontinuity)이 선형적으로 개략된다. $u_3^{(m)}$, $t_3^{(2m)}$, $t_3^{(2m-1)}$ 은 외부경계선의 노드점 (node point) m ($m=1, \dots, M_b$), $\Delta u_3^{(m)}$ 은 균열의 노드점 m ($m=M_b+2, \dots, M_b+M_c$)의 값들이다. 또한 Δs_m^m 은 외부경계선의 요소 m 의 길이이며 Δs_c^m 은 균열선의 요소 m 의 길이임을 고려하면 식 (7) 및 (8)은 다음과 같이 정리된다.

$$c_3^{(n)}u_3^{(n)} = \sum_{m=1}^{M_b} \Delta s_m/4 \left[\int_m (1-\xi)(uR)_{33}(x^{(n)}, \xi)d\xi \right] t_3^{(2m-1)} + \sum_{m=1}^{M_b} \Delta s_m/4 \left[\int_m (1+\xi)(uR)_{33}(x^{(n)}, \xi)d\xi \right] t_3^{(2m)} - \sum_{m=1}^{M_b} \Delta s_m/4 \left[\int_m (1-\xi)(uc)_{33}(x^{(n)}, \xi)d\xi \right] u_3^{(m-1)} - \sum_{m=1}^{M_b} \Delta s_m/4 \left[\int_m (1+\xi)(uc)_{33}(x^{(n)}, \xi)d\xi \right] u_3^{(2m-1)} + \sum_{m=M_b+2}^{M_b+M_c} \Delta s_m/4 \left[\int_m (1-\xi)(uc)_{33}(x^{(n)}, \xi)d\xi \right] \Delta u_3^{(m)} + \sum_{m=M_b+1}^{M_b+M_c-1} \Delta s_m/4 \left[\int_m (1+\xi)(uc)_{33}(x^{(n)}, \xi)d\xi \right] \Delta u_3^{(m+1)} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 \pi_3^{(n)} = & \sum_{m=1}^{M_b} \Delta s_y/4 \left[\int_m (1-\xi)(\pi R)_{33}(x^{(n)}, \xi) d\xi \right] t_3^{(2m-1)} \\
 & + \sum_{m=1}^{M_b} \Delta s_y/4 \left[\int_m (1+\xi)(\pi R)_{33}(x^{(n)}, \xi) d\xi \right] t_3^{(2m)} \\
 & - \sum_{m=1}^{M_b} \Delta s_y/4 \left[\int_m (1-\xi)(\pi c)_{33}(x^{(n)}, \xi) d\xi \right] u_3^{(m-1)} \\
 & - \sum_{m=1}^{M_b} \Delta s_y/4 \left[\int_m (1+\xi)(\pi c)_{33}(x^{(n)}, \xi) d\xi \right] u_3^{(2m-1)} \\
 & + \sum_{m=M_b+2}^{M_b+M_c} \Delta s_y/4 \left[\int_m (1-\xi)(\pi c)_{33}(x^{(n)}, \xi) d\xi \right] \Delta u_3^{(m)} \\
 & + \sum_{m=M_b+1}^{M_b+M_c-1} \Delta s_y/4 \left[\int_m (1+\xi)(\pi c)_{33}(x^{(n)}, \xi) d\xi \right] \Delta u_3^{(m+1)}
 \end{aligned} \tag{9}$$

여기서 $u_3^{(n)} = u_3(x^{(n)})$ 인데 $x^{(n)}$ 은 외부경계선 노드점 $n(n=1, M_b)$ 의 위치이다.

또한 $\pi_3^{(n)} = \pi_3(x^{(n)})$ 이며 $x^{(n)}$ 은 균열의 요소중간점 ($n=M_b+1, M_b+M_c$) 의 위치이다. 식(8) 및 식(9)는 다음과 같이 Matrix Form으로 나타내어진다.

$$[UC_3]\{u\} - [Q_3]\{\Delta u\} = [UR_3]\{t\} \tag{10}$$

$$[PC_3]\{u\} - [X_3]\{\Delta u\} = [PR_3]\{t\} - \{\pi\} \tag{11}$$

여기서 $\{u\}$, $\{\Delta u\}$, 및 $\{t\}$ 의 상수 $[UC_3]$, $[Q_3]$, $[UR_3]$, $[PC_3]$, $[X_3]$ 및 $[PR_3]$ 는 식 (8) 및 (9)에서 각각의 계수 즉, 경계요소법의 수치해석 방법으로 각각의 노드위치에서 합산되어지는 값을 나타낸다.

다시쓰면

$$\begin{bmatrix} [UC_3] & -[Q_3] \\ [\Gamma_3] [PC_3] - [\Gamma_3] [X_3] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \Delta u \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [UR_3] & [0] \\ [\Gamma_3] [PR_3] & [T] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t \\ T \end{Bmatrix} \tag{12}$$

여기서 참고문헌[1]에서와 같이 균열에서의 Nodal Force Matrix는 다음과 같이 정의한다.

$$[T] = [\Gamma_3] \{ \pi \} \tag{13}$$

여기서

$$[\Gamma_3] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

잘 알려진 강체(rigid body) 이론으로부터 대각선 요소를 얻을 수 있다. 만약 강체 변위(rigid body

displacement)를 응용하면

$$UC^{(ij)} = - \sum_{j=0}^{M_b} UC^{(ij)} \tag{15}$$

식(12)을 재배열하면 다음식을 얻는다.

$$[A] \{Z\} = \{F\} \tag{16}$$

여기서 $\{Z\}$ 는 Γ_b 에서의 미지의 경계값 및 미지의 행렬(Matrix) $\{\Delta u\}$ 를 포함한다.

무차원 응력세기계수는 다음의 식으로부터 얻어진다.

$$K_{II} |_{s=0} = \sqrt{\frac{\pi}{8\varepsilon}} G \Delta u_3(\varepsilon) \tag{17}$$

$$K_{II} |_{s=l} = \sqrt{\frac{\pi}{8\varepsilon}} G \Delta u_3(l-\varepsilon) \tag{18}$$

여기서 $\varepsilon \rightarrow 0$ 이며 G 및 l 은 전단계수(shear modulus) 및 균열의 길이를 나타낸다. 외력(traction force)을 갖는 균열 즉 $\{T\} = \{0\}$ 를 고려하면 식(12)은 최종 다음식이 된다.

$$\begin{bmatrix} [UC_3] & -[Q_3] \\ [\Gamma_3] [PC_3] - [\Gamma_3] [X_3] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \Delta u \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [UR_3] & [0] \\ [\Gamma_3] [PR_3] & [T] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t \\ T \end{Bmatrix} \tag{19}$$

4. 결 과

용접과 관련된 어떤 유한영역에서의 균열문제해결을 위하여 여기서 개발된 모델을 사용하여 다음과 같은 예제를 검토하였다.

4.1 직선균열(Straight Crack)

여기서 취급된 모든 직선균열문제에 대하여 균열 20 요소 및 외부경계선은 40 요소로 모델되었다. $\sigma\sqrt{\pi a}$ 에 관하여 일반화(normalization) 된 응력세기계수가 계산되었다.

(1) 직선중앙균열(a)

높이 2h 및 넓이 2b를 갖는 직사각형의 판에 균열의 길이가 2a인 중앙직선균열(Central straight crack)을 갖으며 Fig. 3과 같이 균일분포 전단응력(uniform shear stress)인 균열면에 직각으로 판의 끝면에 작용한다. Table 1은 응력세기계수를 a/b 및 a/h의 여러 가지 비율에 대하여 참고문헌[8]과 비교하였다.

(2) 직선중앙균열(b)

높이 2h 및 넓이 2b를 갖는 직사각형의 판에 균열의

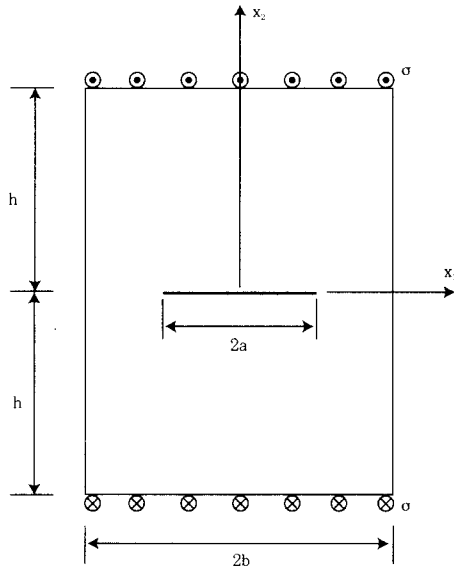


Fig. 3 Geometry and loading for a straight central crack in a finite sheet under a uniformly distributed shear stress.

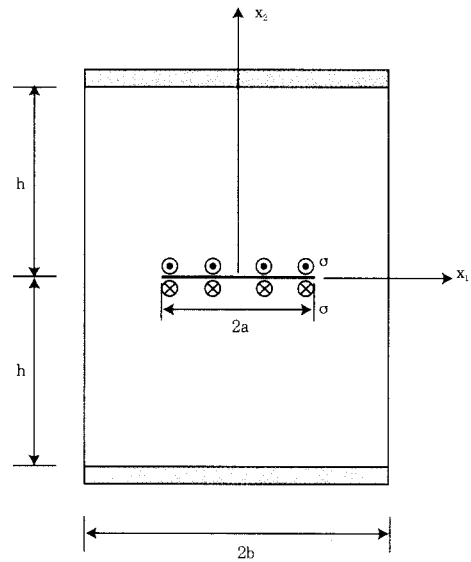


Fig. 4 Geometry and loading for a straight central crack in a finite sheet with edges parallel to the crack.

길이가 2a인 균열을 갖으며 평면에 수직인 전단응력 (antiplane shear stress)이 면의 끝에서 작용한다. Figs 4-6은 하중조건은 동일하고 경계조건만 다른 경우를 보여준다. 이 경우의 응력세기계수는 여러 가지 a/b 비율 및 a/h의 경우들에 대하여 Tables 2-4에서 참고문헌 [9]와 비교하였다.

4.2 꺾인균열(Kinked Crack)

꺾인균열 문제에서는 $\sigma\sqrt{\pi a}$ 에 대하여 일반화 (normalization) 되었으며 $G/\sigma=200$ 값을 적용하여 응력세기계수와 상대 균열면 변위를 계산하였다.

(1) V모형균열

Table 1 Stress intensity factors for a straight central crack under a uniformly distributed shear stress as shown in Fig. 3

a:b	1:1.2		1:1.4		1:1.6		1:2.0		1:∞	
	Present	Ref.[8]	Present	Ref.[8]	Present	Ref.[8]	Present	Ref.[8]	Present	Ref.[8]
1:0.25	1.897	1.900	1.780	1.782	1.771	1.773	1.770	1.772	1.770	1.772
1:0.5	1.723	1.725	1.460	1.463	1.399	1.401	1.377	1.379	1.375	1.377
1:1	1.689	1.691	1.369	1.370	1.254	1.256	1.176	1.178	1.147	1.149
1:2	1.686	1.689	1.359	1.361	1.233	1.235	1.127	1.130	1.046	1.047
1:4	1.686	1.689	1.358	1.360	1.233	1.235	1.126	1.128	1.012	1.013
1:∞	1.687	1.689	1.358	1.360	1.234	1.235	1.127	1.128	1.000	1.000

Table 2 Stress intensity factors for a straight central crack under a uniformly distributed shear stress as shown in Fig. 4

a:b	1:1.2		1:1.4		1:1.6		1:2.0		1:∞	
	Present	Ref.[9]	Present	Ref.[9]	Present	Ref.[9]	Present	Ref.[9]	Present	Ref.[9]
1:0.25	0.398	0.400	0.397	0.399	0.397	0.399	0.397	0.399	0.397	0.399
1:0.5	0.573	0.575	0.560	0.564	0.560	0.563	0.561	0.563	0.561	0.563
1:1	0.830	0.833	0.778	0.780	0.767	0.769	0.762	0.764	0.762	0.764
1:2	1.111	1.114	0.989	0.991	0.948	0.950	0.920	0.923	0.912	0.914
1:4	1.339	1.342	1.145	1.147	1.072	1.074	1.014	1.016	0.974	0.975
1:∞	1.687	1.689	1.358	1.369	1.234	1.235	1.127	1.128	1.000	1.000

Table 3 Stress intensity factors for a straight central crack under a uniformly distributed shear stress as shown in Fig. 5

a:b a:h	1:1.2		1:1.4		1:1.6		1:2.0		1:∞	
	Present	Ref.[9]	Present	Ref.[9]	Present	Ref.[9]	Present	Ref.[9]	Present	Ref.[9]
1:0.25	1.650	1.653	1.759	1.760	1.769	1.771	1.770	1.772	1.770	1.772
1:0.5	1.177	1.180	1.295	1.298	1.351	1.354	1.373	1.375	1.375	1.377
1:1	0.844	0.847	0.981	0.984	1.055	1.058	1.120	1.122	1.147	1.149
1:2	0.772	0.775	0.868	0.871	0.920	0.922	0.977	0.979	1.046	1.047
1:4	0.767	0.770	0.856	0.859	0.899	0.901	0.941	0.943	1.012	1.013
1:∞	0.768	0.770	0.857	0.859	0.900	0.901	0.942	0.942	1.000	1.000

Table 4 Stress intensity factors for a straight central crack under a uniformly distributed shear stress as shown in Fig. 6

a:b a:h	1:1.2		1:1.4		1:1.6		1:2.0		1:∞	
	Present	Ref.[9]	Present	Ref.[9]	Present	Ref.[9]	Present	Ref.[9]	Present	Ref.[9]
1:0.25	0.396	0.398	0.397	0.399	0.398	0.399	0.398	0.399	0.398	0.399
1:0.5	0.546	0.551	0.560	0.562	0.561	0.563	0.562	0.563	0.562	0.563
1:1	0.700	0.702	0.746	0.748	0.758	0.760	0.762	0.764	0.762	0.764
1:2	0.763	0.765	0.844	0.846	0.878	0.880	0.903	0.905	0.913	0.914
1:4	0.767	0.770	0.856	0.858	0.899	0.900	0.940	0.940	0.915	0.915
1:∞	0.768	0.770	0.857	0.859	0.900	0.901	0.942	0.942	1.000	1.000

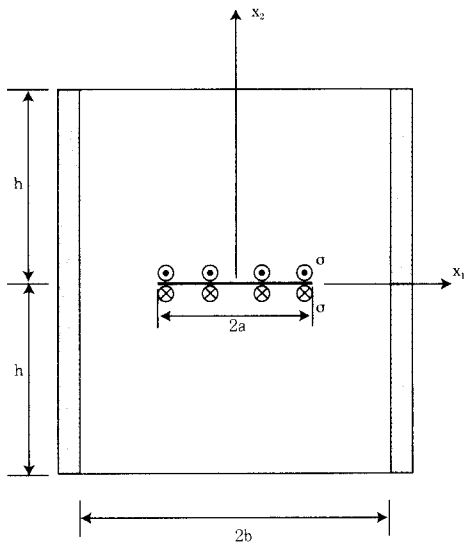


Fig. 5 Geometry and loading for a straight central crack in a finite sheet with fixed edges perpendicular to the crack.

Fig. 7은 면에 수직인 균일분포 전단응력(uniform antiplane shear stress)이 작용하는 정방형판(square plate)에서의 대칭균열(Symmetric shaped crack)을 보여준다. 균열은 40요소로 되어 있으며 외부경계선은 44요소가 되게 모델되었다. 이 문제에 대하여 응력세기계수는 여러 가지 경사각 α 에

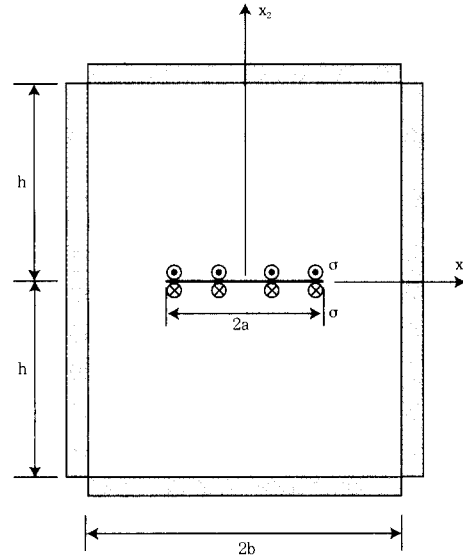


Fig. 6 Geometry and loading for a straight central crack in a finite sheet with four fixed edges.

대하여 Table 5에 표기되었다.

(2) Z모양균열

Fig. 8은 면에 수직인 균일분포 전단응력(uniform antiplane shear stress)이 작용하는 정방형판(square plate)에서의 비대칭균열(Antisymmetric shaped crack)을 보여준다. 균열은 35요소로 되어 있으며 외부경계선은 44요소가

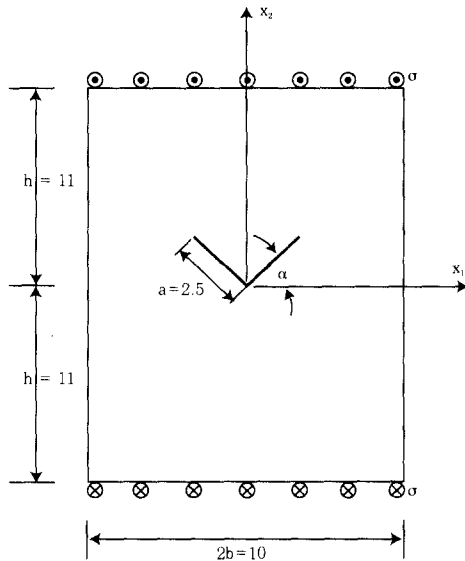


Fig. 7 Geometry and loading for a synnetruc V-shaed crack in a finite sheet under a uniformly distributed shear force.

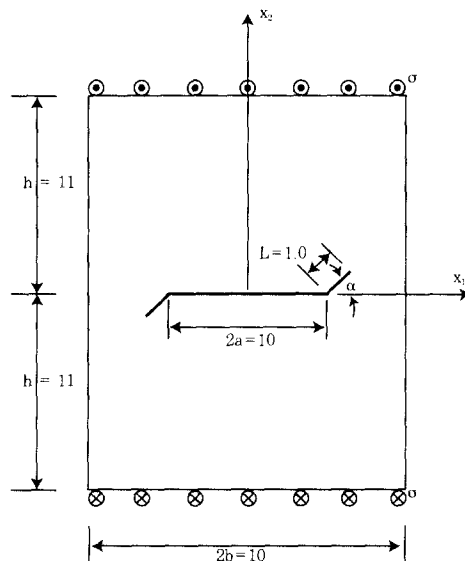


Fig. 8 Geometry and loading for a straight central crack in a finite sheet under a uniformly distributed shear stress.

되게 모델되었다. 이문제에 대하여 응력세기계수는 Table 6에 표기되었다.

5. 결 론

기계 및 구조설계에서 필수적으로 필요한 강도 계산은 용접구조물에서도 필요 불가결의 과정이 된다. 용접구조물에서의 설계 및 안전을 위해서 균열문제 특히 모드 III에 관련된 경계값 문제로 발전되었다. 참고문헌[1] 등에서 변위 불연속 방법을 이용하여 개발된 균열을 위한 적분방정식이 경계요소법(boundary element method)과 연합되어 유한영역에서의 꺾인 균열을 갖는 문제를 이 연합기술(coupled technique)을 이용하여 모드 I 및 II에 대하여 해결되었다. 이 논문에서는 참고문헌[1]에서 개발된 균열적분방정식에 직접 경계적분방정식 방법을 연합하여 유한영역의 꺾임을 포함하는 모드 III 균열문제의 해결에 응용되었다. 사용된 수치해석모델은 앞 절에서와 같이 직선균열 문제 및 특히 꺾인균열 문제에 적용되어 간단하며 결과값도 잘 일치하고 있다. 차후 이 논문에서 개발된 경계요소연합법을 이용하여 용접구조물에서의 용접강도를 계산할 수 있는 관련연구가 요구된다.

참 고 문 헌

1. U. Sur and N. J. Altiero : An alternative integral equation approach for curved and kined cracks, *Int. J. Fracture* 38 (1988), pp. 24-41
2. N. Liu and N. J. Altiero and U. Sur : An alternative integral equation approach applied to kinked cracks in finite plane bodies, *Comput. Meth. Appl. Mehc. Engng* 84 (1990), pp. 211-226
3. C.F. Sheng : *Journal of Applied Mechanics* 54 (1987), pp. 105-109
4. W.L. Zang and P. Gudmundson : *Int. J. Fracture* 38 (1988), pp. 275-294

Table 5 Stress intensity factors for a symmetric V-shaped crack under a uniformly distributed shear stress as shown in Fig. 7

α	15	30	45	60	75
$K_{III} / \sigma\sqrt{\pi a}$	2.0700	1.8743	1.5755	1.1965	0.7456

Table 6 Stress intensity factors for a antisymmetric kinked crack under a uniformly distributed shear stress as shown in Fig. 8

α	15	30	45	60	75
$K_{III} / \sigma\sqrt{\pi a}$	4.5605	4.3281	3.9757	3.5427	3.0664

5. Y.K. Chueng and Y.Z. Chen : *Engineering Fracture Mechanics* 7(1987), pp. 177-185
6. W.L. Zang and P. Gudmundson : *Advances in Fracture Research* Vol. 3, ed. by K. Salama, et al., Pergamon Press (1989), pp. 2134-2134
7. N. Liu and N. J. Altiero : Multiple cracks and branch cracks in finite plane bodies, *Mech. Res. Commun.* 18 (1991), pp. 233-244
8. S. W. Ma : A central crack in a rectangular sheet where its boundary is subjected to an arbitrary antiplane load, *Engng Fracture Mech.* 30 (1988), pp. 435-443
9. S.W. Ma : A central crack of mode III in a rectangular sheet with fixed edges, *Int. J. Fracture* 39 (1989), pp. 323-329