물리탐사
Vol. 3, No. 1, 2000, p. 13~18

# 적분방정식 전자탐사 모델링에서 Green 텐서의 특이 적분

송윤호[1] · 정승환[1]

# Singular Cell Integral of Green's Tensor in Integral Equation EM Modeling

Yoonho Song and Seung-Hwan Chung

**요 약 :** 적분방정식 전자탐사 모델링에서 종종 애매모호하게 받아 들여온 특이 요소에 대한 Green 텐서 적분을 명확히 해결하고자, 전자탐사 적분방정식에서의 특이치의 개념을 전자기 이론에서 사용되는 전기장의 적분식 표현에서의 특이치 문제와의 비교를 통해 설명하였다. 또한 적분방정식 전자탐사 모델링에서 수치해의 정확도를 좌우하는 가장 중요한 요소인 특이 적분을 3차원, 2.5차원 및 2차원, 그리고 얇은 판 적분방정식의 경우에 대해 유도하고 정리하였다.

**Abstract :** We describe the concept of the singularity in the integral equation of electromagnetic (EM) modeling in comparison with that in the integral representation of electric fields in EM theory, which would clarify the singular integral problems of the Green's tensor. We have also derived and classified the singular integrals of the Green's tensors in 3-D, 2.5-D and 2-D as well as in the thin sheet integral equations of the EM scattering problem, which have the most important effect on the accuracy of the numerical solution of the problems.

**Keywords :** integral equation, electromagnetic, Green's tensor, singular

## 서 론

적분방정식법은 전자탐사 수치 모델링의 해를 구하는데 있어서 미분연산자를 이용하는 유한차분법 및 유한요소법과 더불어 자주 사용되는 모델링 기법이다. 이 적분방정식을 이용한 전자탐사 모델링은 대상 불균질체 만을 미소 요소로 분할하기 때문에 적은 수의 불균질체에 대해서는 가장 정확하고 빠른 해를 제공한다고 알려져 있다(Hohmann, 1988). 최근에는 전체 대상 공간을 일정한 크기의 격자로 분할한 후, 비교적 정확한 적분방정식의 근사 해를 도입해 대상 공간의 전기전도도 분포를 영상화하는 신속한 역산 기법으로까지 발전하고 있다(Torres-Verdin and Habashy, 1994; Zhdanov *et al.*, 1999).

공간영역에서 대상체를 분할하는 적분방정식 수치해의 정확도는 측정점과 송신원이 동일 미소체(cell)에 위치하는 즉, 특이 요소에서의 Green 텐서의 적분값을 얼마나 정확하게 구하는지에 따라 좌우된다. 특히 Green 텐서 중 스칼라 Green 함수의 2차 미분항의 특이 적분(singular cell integral)은 그 동안의 많은 연구 결과에서도 명확한 수식적 표현이 발표되고 있지 않으며 종종 전자기학에서의 특이치 문제로 혼동되기도 한다. 따라서 본 연구에서는 적분방정식 전자탐사에서 특이 적분의 개념을 전자기학에서의 특이치 문제와 비교함으로써 명확히 하고자 하였다. 또한 지금까지 관련 논문에서 정리되어 있지 않은 3차원 스칼라 Green 함수의 2차 미분항의 특이 적분을 해석적으로 유도하여 3차원 Green 텐서의 특이 적분을 명확하게 정리하였다. 더불어 전자탐사에서 자주 접하는 2.5차원 및 2차원 문제, 그리고 얇은 판(thin sheet) 적분방정식에서의 Green 텐서의 특이 적분의 해석적 표현을 정리하여 향후 정확한 적분방정식의 수치해 계산 및 한층 더 발전된 수치해 알고리듬 유도에 도움이 되고자 하였다.

## 전자탐사 적분방정식

전체공간 $V$ 내의 임의의 점 $\mathbf{r}$에서 전자기장은 $e^{+i\omega t}$의 시간 변화를 갖는 주파수 영역에서 다음과 같은 Maxwell 방정식으로 표현된다(Ward and Hohmann, 1988).

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \hat{z}(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \tag{1}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) - \hat{y}(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}_e(\mathbf{r}) \tag{2}$$

여기서 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$와 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$는 각각 전기장과 자기장이고, $\hat{z}(\mathbf{r})$는 임피디비티(impedivity), $\hat{y}(\mathbf{r})$는 어드미티비티(admittivity), 그리고 $\mathbf{J}_e(\mathbf{r})$는 송신전류로서 각각 다음 식으로 표현된다.

$$\hat{z}(\mathbf{r}) = i\omega\mu(\mathbf{r}) \tag{3}$$

$$\hat{y}(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r}) + i\omega\varepsilon(\mathbf{r}) \tag{4}$$

*2000년 1월 15일 접수

1) 한국자원연구소 전기 · 전자탐사연구실(Geoelectric Imaging Laboratory, Korea Institute of Geology, Mining and Materials)

$$\mathbf{J}_e(\mathbf{r}) = J_e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_s)\hat{\mathbf{i}}_s \tag{5}$$

또한 여기서 $\omega$는 각 주파수, $\sigma$는 전기전도도, $\varepsilon$은 유전율, 그리고 $\mu$는 투자율로서 진공에서의 값($4\pi\times10^{-7}$ H/m)과 같다고 가정한다.

독자의 이해를 돕기 위해 지금부터는 지하구조를 유한한 수의 수평층으로 이루어진 층서구조로 가정하고 이상체는 지하에 존재한다고 하자. 물론 층서구조가 아니라고 해도 아래에 서술될 수식은 변함이 없고, 다만 Green 텐서 중 전체공간을 제외한 부분만이 달라질 뿐이므로 본 논문의 논의에는 아무런 문제가 없다. (1), (2) 식의 Maxwell 방정식에 전체공간에 걸친 적분을 적용하면, 임의의 점 $\mathbf{r}$에서의 전기장은 다음과 같은 Fredholm의 제 2 종 적분방정식으로 표현되며(Hohmann, 1975) 이의 자세한 유도는 이성곤(1998)에 잘 정리되어 있다.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_p(\mathbf{r}) - \hat{z}\int_V \underline{\underline{\mathbf{G}}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\cdot\Delta\hat{y}(\mathbf{r}')\mathbf{E}(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' \tag{6}$$

여기서 $\mathbf{E}_p(\mathbf{r})$는 이상체가 없을 때, 일반적으로 층서구조만의 1차 전기장이고 $\Delta\hat{y}(\mathbf{r}')$는 $\Delta\hat{y}(\mathbf{r}') = \hat{y}(\mathbf{r}') - \hat{y}_b$로 표현되는 이상 어드미티비티(전기전도도 또는 유전율의 차이)이다. 한편 $-1/\hat{z}$의 모멘트를 갖고 지하의 한 점 $\mathbf{r}'$에 위치한 전류 송신원에 의한 $\mathbf{r}$에서의 전기장을 나타내는 Green 텐서는 일반적으로 다음과 같이 표현될 수 있는데(Song and Lee, 1998),

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}}_j(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta_{j,k}\underline{\underline{\mathbf{G}}}^0(\mathbf{r},\mathbf{r}') + \underline{\underline{\mathbf{G}}}^1(\mathbf{r},\mathbf{r}') \tag{7}$$

여기서 $\underline{\underline{\mathbf{G}}}^0(\mathbf{r},\mathbf{r}')$는 송신원과 수신점이 동일한 층에 존재할 때 ($j=k$) 즉, 전체공간에서의 Green 텐서로서

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}}^0(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \left(\underline{\underline{\mathbf{I}}} + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)g(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{8}$$

$$g(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{9}$$

$$k = \sqrt{-\hat{z}\hat{y}_b} = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon_b - i\omega\mu\sigma_b} \tag{10}$$

과 같이 나타나며, $\underline{\underline{\mathbf{G}}}^1(\mathbf{r},\mathbf{r}')$는 지표의 영향을 포함한 층서구조에 의한 Green 텐서인데, 이는 경계면에서 전기장과 자기장의 접선성분이 연속이라는 경계조건을 적용함으로써 구해진다.

한편 (6)식 우변의 적분항 중 이상 어드미티비티와 전기장의 곱은

$$\Delta\hat{y}(\mathbf{r}')\mathbf{E}(\mathbf{r}') = \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') \tag{11}$$

로도 흔히 표현되며, 여기서 $\mathbf{J}_s(\mathbf{r}')$는 산란전류(scattering current)라고 하는데, 이는 전기장을 단위 쌍극자 전류 송신원에 의한 반응의 체적 분포에 대한 적분으로 표현하는 것과 유사하다. 즉, 전류 쌍극자에 의한 전체공간내 전기장은 벡터 및 스칼라 포텐샬을 이용해 다음과 같이 나타나는데(Van Bladel, 1991, Ch. 3),

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \hat{z}\mathbf{A} + \frac{1}{k^2}\nabla\phi \\ &= -\hat{z}\int_V g(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathbf{J}_e(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' \\ &\quad + \frac{1}{k^2}\nabla\int_V \nabla g(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\mathbf{J}_e(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'\end{aligned} \tag{12}$$

이며 우변의 첫 번째 항은 전류원에 의한 전기장 성분이고, 두 번째 항은 전하 축적에 의한 성분이다. 이는 측정점이 전류원이 분포하는 체적내부에 존재하지 않으며 또한 임의 방향의 송신원을 만족하기 위하여 스칼라 Green 함수 대신에 Green 텐서를 이용하여 표현한다면

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\hat{z}\int_V \underline{\underline{\mathbf{G}}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\cdot\mathbf{J}_e(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' \tag{13}$$

로 나타나 (6)식에서 일차장만 제외하면 동일한 형태이다.

문제는 수신점이 전류가 분포하는 체적내부에 위치할 때이다. 이 경우 (12)식은 (13)식으로 즉, 우변 두 번째항의 미분연산자가 적분항 내부로 쉽게 이동할 수 없으며, 측정점과 송신원이 일치하는 특이점($\mathbf{r}=\mathbf{r}'$)에서 (9)식에 나타낸 스칼라 포텐샬이 발산하므로 특이점을 포함하는 작은 체적을 별도로 다루는 소위 특이 적분(singular integral)이 이루어져야 한다. 이러한 특이 적분은 특히 Green 함수의 2차 미분항 즉, 전하에 의한 전기장 성분에서 세심하게 다루어져야 하는데, 이에 대해서는 Van Bladel(1961)이 처음으로 정리된 수식을 발표한 후, Yaghjian(1980) 등의 많은 논란을 거쳤으며 Van Bladel(1991, Ch. 3)에 소위 L dyadic의 개념을 이용하여 명확하게 정리되어 있다. 이러한 L dyadic은 특이점을 포함하는 체적의 크기와는 관계없이 그 형상에만 좌우되는데, 최종적으로 전류원 내부에서의 전기장은 특이 미소체의 체적이 0으로 갈 때의 극한값으로 정의된다.

한편 적분방정식 (6)과 전류분포에 의한 전기장 표현인 (12)식 또는 (13)식은 형태는 유사하지만 뚜렷한 물리적인 차이를 가지고 있다. (6)식은 (1), (2) 식에 전체공간에 걸친 적분을 적용함으로써 전기전도도 또는 유전율이 주변과 다른 불균질체가 존재할 경우에만 적분항이 존재하는 적분방정식이다. 적분방정식의 유도에 있어서 송, 수신원의 위치에 대해 전체공간 $V$ 내부라는 것 외에 어떠한 가정도 도입하지 않았으므로 Green 텐서 중 2차 미분항은, 측정점이 이상체 내부에 존재하거나 또는 외부에 존재하거나에 관계없이, 항상 적분항 내에 존재한다. 따라서 이상체 내부에서의 전기장을 구하는데 있어서, 특이점을 포함하는 미소체적의 크기가 0으로 수렴할 때, (12)식에서처럼 특이 미소체 표면에 분포하는 전하의 영향을 따로 고려할 필요가 없으므로 결과적으로 L dyadic은 포함되지 않아

야 할 것이다. 이는 L dyadic이 물리적으로 전류밀도의 divergence인 표면전하의 면적분인데(Chen, 1977), (11)식에 나타난 바와 같이 전기장과 이상 어드미티비티의 곱인 산란전류의 경우에는 그 divergence가 존재하지 않는 것으로부터도($\nabla \cdot \mathbf{J}_s = 0$) 확인된다.

그러므로 적분방정식의 수치해를 구하는 데 있어서 그 정확도를 좌우하는 Green 함수의 특이 적분은 스칼라 Green 함수 및 그의 2차 미분항의 미소체 적분으로 해결된다. 3차원 전자탐사 적분방정식의 수치해를 구하는 데 있어서 Green 함수의 2차 미분항의 특이 적분의 해석적 표현은 그간 명확히 설명되지 않고, 특이 미소체의 크기를 매우 작게 가정한 후 직류 근사($kr \approx 0$)를 동원하거나 미소 전류 쌍극자에 의한 면적분으로 해결하여 왔는데(Hohmann, 1975; 1988), 본 연구에서는 수식적으로 좀 더 명확하게 정리하였다. 특이 적분은 (7)식에 나타난 Green 텐서 중 전체공간에 대한 항에만 해당되는데, 이는 두 번째 항인 층서구조에 대한 Green 텐서는 $z$ 좌표에 해당하는 항이 0이 되지 않으므로 어떠한 경우에도 특이값을 갖지 않기 때문이다.

## 3차원 적분방정식에서의 특이 적분

한변의 길이가 $\Delta$인 정육면 미소체를 가정하자. 수치화 과정에서 정육면체가 아닌 직육면체로 불균질체를 분할하였을 경우에는 정육면체를 제외한 나머지 부분을 또 다른 미소체로 간주하면 문제없이 해결된다. 전체공간에서의 Green 텐서만 대상이기 때문에 스칼라 Green 함수는 정육면체의 중심점에 대해 대칭이다. 따라서 특이 미소체인 정육면체에 대한 스칼라 Green 함수의 적분은 이를 구형 좌표계로 대신할 수 있어서

$$\begin{aligned}
&\int_{z-\frac{\Delta}{2}}^{z+\frac{\Delta}{2}}\int_{y-\frac{\Delta}{2}}^{y+\frac{\Delta}{2}}\int_{x-\frac{\Delta}{2}}^{x+\frac{\Delta}{2}}\left\{\frac{e^{-ikR}}{4\pi R}\right\}dx'dy'dz' \\
&\cong \int_0^{R_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R^2\sin\theta\frac{e^{-ikR}}{4\pi R}d\theta d\phi dR \\
&= \int_0^{R_0} Re^{-ikR}dR \\
&= \frac{1}{k^2}[(ikR_0+1)e^{-ikR_0}-1]
\end{aligned} \tag{14}$$

이 되며(Hohmann, 1975) 여기서

$$R_0 = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\Delta \tag{15}$$

즉, 정육면체와 체적이 같은 구의 반지름이고

$$R = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2} \tag{16}$$

이다.

다음은 (8)식 우변의 두 번째 항인 스칼라 Green 함수의 2차 미분항의 적분을 해결해야 하는데 이는 앞서 말한 중심점에 대한 정육면체의 대칭성을 이용하여

$$\begin{aligned}
&\int_{z-\frac{\Delta}{2}}^{z+\frac{\Delta}{2}}\int_{y-\frac{\Delta}{2}}^{y+\frac{\Delta}{2}}\int_{x-\frac{\Delta}{2}}^{x+\frac{\Delta}{2}}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\frac{e^{-ikR}}{4\pi R}dx'dy'dz' \\
&= \int_{z-\frac{\Delta}{2}}^{z+\frac{\Delta}{2}}\int_{y-\frac{\Delta}{2}}^{y+\frac{\Delta}{2}}\left[\frac{\partial}{\partial y}\frac{e^{-ikR}}{4\pi R}\right]_{x-\frac{\Delta}{2}}^{x+\frac{\Delta}{2}}dy'dz' \\
&= 0
\end{aligned} \tag{17}$$

이 되므로 교차 미분항(cross-derivative term)들의 특이 적분은 모두 0이 됨을 알 수 있다. 이제 남은 것은 같은 좌표에 대한 2차 미분항들의 적분인데 이 또한 대칭성을 이용하면

$$\begin{aligned}
&\int_{V_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{e^{-ikR}}{4\pi R}dx'dy'dz' \\
&= \frac{1}{3}\int_{V_0}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{e^{-ikR}}{4\pi R}dx'dy'dz' \\
&= \frac{1}{3}\int_{V_0}\nabla^2\frac{e^{-ikR}}{4\pi R}dx'dy'dz'
\end{aligned} \tag{18}$$

이 되므로 역시 구형 좌표계로 치환하여 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned}
&\int_{z-\frac{\Delta}{2}}^{z+\frac{\Delta}{2}}\int_{y-\frac{\Delta}{2}}^{y+\frac{\Delta}{2}}\int_{x-\frac{\Delta}{2}}^{x+\frac{\Delta}{2}}\nabla^2\frac{e^{-ikR}}{4\pi R}dx'dy'dz' \\
&\cong \lim_{\delta\to 0}\int_{\delta}^{R_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left[R^2\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{e^{-ikR}}{4\pi R}\right)\right]R^2\sin\theta d\theta d\phi dR \\
&= 4\pi\lim_{\delta\to 0}\int_{\delta}^{R_0}\frac{\partial}{\partial R}\left[R^2\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{e^{-ikR}}{4\pi R}\right)\right]dR \\
&= \lim_{\delta\to 0}[-(ikR+1)e^{-ikR}]_{\delta}^{R_0} \\
&= \lim_{\delta\to 0}[-(ikR+1)e^{-ikR}+(ik\delta+1)e^{-ik\delta}] \\
&= -(ikR_0+1)e^{-ikR_0}+1
\end{aligned} \tag{19}$$

따라서 각 2차 미분항의 적분은

$$\begin{aligned}
\int_{V_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{e^{-ikR}}{4\pi R}d\mathbf{r}' &= \int_{V_0}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{e^{-ikR}}{4\pi R}d\mathbf{r}' \\
&= \int_{V_0}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{e^{-ikR}}{4\pi R}d\mathbf{r}' \\
&= \frac{1}{3}[-(ikR_0+1)e^{-ikR_0}+1]
\end{aligned} \tag{20}$$

이 되고 이를 (14)식에 나타난 스칼라 Green 함수의 특이 적분과 함께 정리하면 다음과 같이 Green 텐서의 3차원 특이 미

소체에 대한 적분을 간단히 나타낼 수 있게 된다.

$$\int_{V_0} \underline{\underline{\mathbf{G}}}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')d\mathbf{r}' = \frac{2}{3k^2}[(ikR_0+1)e^{-ikR_0}-1]\underline{\underline{\mathbf{I}}} \tag{21}$$

## 2.5차원 적분방정식에서의 특이 적분

지하구조를 주향방향($y$ 방향)으로 무한히 연장된 2차원 구조로 가정하자. 지하구조는 2차원이라도 송, 수신기는 유한하며 많은 경우에는 한 점에서의 쌍극자를 사용하기 때문에 이를 종종 2.5차원이라 부른다. 이 경우에 (3)식의 적분방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}_p(\mathbf{r}) - \hat{z}\int_V \underline{\underline{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\cdot\Delta\hat{y}(\mathbf{r}')\mathbf{E}(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' \\ &= \mathbf{E}_p(\mathbf{r}) - \frac{\hat{z}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_S \underline{\underline{\tilde{\mathbf{G}}}}(x-x', k_y, z;z') \right. \\ &\quad \left. \cdot\Delta\hat{y}(x',z')\tilde{\mathbf{E}}(x',k_y,z')dx'dz'\right\}e^{ik_y y}dk_y\end{aligned} \tag{22}$$

여기서 '~'는 $y$ 방향으로 Fourier 변환된 공간파수(spatial wavenumber) 영역에서의 양을 나타낸다. 수치적으로는 미리 정해진 공간파수($k_y$)들에 대해 적분방정식을 푼 후 역 Fourier 변환을 통해 실제 공간에서의 전기장 분포를 구해내게 되는데, 공간파수 영역에서의 적분방정식은 (22)식으로부터 다음과 같이 나타난다.

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}(x,k_y,z) &= \tilde{\mathbf{E}}^p(x,k_y,z) \\ &\quad -\hat{z}\int_S \underline{\underline{\tilde{\mathbf{G}}}}(x-x',k_y,z;z')\cdot\Delta\hat{y}(x',z')\tilde{\mathbf{E}}(x',k_y,z')dx'dz'\end{aligned} \tag{23}$$

따라서 2.5차원에서의 Green 텐서는 $y$ 방향으로 Fourier 변환된 형태인데, 먼저 공간파수 영역에서의 스칼라 Green 함수는 공간파수 영역에서의 변수분리법을 사용한 Ward and Hohmann (1988)과 Erdelyi(1954, p. 17)를 이용하면

$$\begin{aligned}\tilde{g}(x-x',k_y,z-z') &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-u|z-z'|}}{2u}e^{ik_x(x-x')}dk_x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-u|z-z'|}}{u}\cos\{k_x(x-x')\}dk_x \\ &= \frac{1}{2\pi}K_0(\gamma\rho)\end{aligned} \tag{24}$$

$$u = \sqrt{\lambda^2-k^2} = \sqrt{k_x^2+k_y^2-k^2} \tag{25}$$

$$\gamma = \sqrt{k_y^2-k^2} \tag{26}$$

$$\rho = \sqrt{(x-x')^2+(z-z')^2} \tag{27}$$

이 되며 여기서 $K_0(\gamma\rho)$는 제1종 0차 modified Bessel 함수이다. 따라서 2.5차원 적분방정식에서의 전체공간 Green 텐서는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\underline{\underline{\tilde{\mathbf{G}}}}^0(x-x',k_y,z;z') = \left(\underline{\underline{\mathbf{I}}}+\frac{1}{k^2}\tilde{\nabla}\tilde{\nabla}\right)\frac{K_0(\gamma\rho)}{2\pi} \tag{28}$$

$$\tilde{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + ik_y\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} \tag{29}$$

2.5차원에서는 대상체를 $x-z$ 단면에 관하여 분할하므로 Green 텐서의 적분도 분할된 미소체의 $x-z$ 단면에서 수행된다. 따라서 특이 적분 또한 $\rho=0$을 포함하는 미소체 단면에 대한 적분을 말하게 되며 즉, (24), (28) 식에 나타난 modified Bessel 함수 및 그 1, 2차 미분 값의 면적분을 해결하는 문제가 된다. 앞에서와 마찬가지로 특이 미소체의 단면을 한변의 길이가 '$\Delta$'인 정사각형으로 가정하자. 먼저 2.5차원 스칼라 Green 함수의 특이 면적분은 역시 대칭성을 이용해 극좌표계로 치환할 수 있으므로 Bessel 함수의 미분 공식(Abramowitz and Stegun, 1964, Ch. 9)과 부분 적분을 이용하면

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{S_0}K_0(\gamma\rho)dx'dz' &\cong \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\rho_0}K_0(\gamma\rho)\rho d\rho d\theta \\ &= \frac{1}{\gamma^2} - \frac{\rho_0}{\gamma}K_1(\gamma\rho_0)\end{aligned} \tag{30}$$

이고

$$\rho_0 = \frac{\Delta}{\sqrt{\pi}} \tag{31}$$

로서 미소 정사각형과 동일한 면적을 갖는 원의 반지름이다.

다음으로 스칼라 Green 함수의 2차 미분항의 특이 적분을 해결해야 하는데, 주의할 점은 $y$에 대한 미분이 공간파수 영역에서는 단지 $ik_y$를 곱해주는 문제로 바뀌기 때문에 3차원에서와는 달리 1차 미분항의 특이 적분도 함께 고려해야 한다는 것이다. 또한 앞서의 3차원과는 달리 정사각형의 중심에 대한 대칭성도 $x$와 $z$ 방향으로만 성립한다. 먼저 $x$와 $z$에 대한 2차 미분항의 특이 면적분을 생각하면 다음과 같은 스칼라 Green 함수의 정의로부터(Ward and Hohmann, 1988)

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_1^2\right)g(x-x',y-y',z-z') \\ &\quad = -\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')\end{aligned} \tag{32}$$

$y$에 대한 Fourier 변환과 면적분을 차례로 적용하면

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-k_y^2+k_1^2\right)\tilde{g}(x-x',k_y,z-z') = -\delta(x-x')\delta(z-z') \tag{33}$$

$$\int_{z-\frac{\Delta}{2}}^{z+\frac{\Delta}{2}}\int_{x-\frac{\Delta}{2}}^{x+\frac{\Delta}{2}}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-k_y^2+k_1^2\right)\tilde{g}(x-x', k_y, z-z')dx'dz' = -1 \tag{34}$$

이 되며 (30)식과 역시 정사각형 미소 단면에 대한 대칭성을 이용하면

$$\int_{z-\frac{\Delta}{2}}^{z+\frac{\Delta}{2}}\int_{x-\frac{\Delta}{2}}^{x+\frac{\Delta}{2}}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\tilde{g}(x-x', k_y, z-z')dx'dz'$$
$$= \int_{z-\frac{\Delta}{2}}^{z+\frac{\Delta}{2}}\int_{x-\frac{\Delta}{2}}^{x+\frac{\Delta}{2}}(k_y^2-k_1^2)\tilde{g}(x-x', k_y, z-z')dx'dz'-1$$
$$\cong -\gamma\rho_0 K_1(\gamma\rho_0) \tag{35}$$

$$\int_{S_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{g}ds' = \int_{S_0}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\tilde{g}ds'$$
$$= -\frac{\gamma\rho_0}{2}K_1(\gamma\rho_0) \tag{36}$$

가 됨을 알 수 있다.

(30)식과 (36)식을 정리하면 Green 텐서 요소들의 특이 적분은

$$\int_{S_0}\tilde{G}_{xx}ds' = \int_{S_0}\tilde{G}_{zz}ds'$$
$$= \frac{1}{\gamma^2}\left[1-\gamma\rho_0\left\{1+\frac{\gamma^2}{2k^2}\right\}K_1(\gamma\rho_0)\right] \tag{37}$$

$$\int_{S_0}\tilde{G}_{yy}ds' = \frac{1}{k^2}[\gamma\rho_0 K_1(\gamma\rho_0)-1] \tag{38}$$

으로 나타난다. 전체공간 Green 텐서의 다른 항들 즉, 교차 미분항의 특이 면적분은 대칭성에 의해서 모두 0이 됨은 물론이다.

## 2차원 적분방정식에서의 특이 적분

2차원 문제란 앞서 서술한 2.5차원 문제에서 송신원 또한 무한히 긴 전선 등에 의한 것으로, $y$ 방향에 따른 어떠한 전자기장의 변화도 발생하지 않으며, 이에 대해 적분방정식을 유도하면 (23)식에 $k_y=0$을 대입한 것과 같다. 즉,

$$\mathbf{E}(x,z) = \mathbf{E}^p(x,z)-\hat{z}\int_S \underline{\underline{\mathbf{G}}}(x-x', z;z')\cdot\Delta\hat{y}(x',z')\mathbf{E}(x',z')dx'dz' \tag{39}$$

으로 나타나며 Green 텐서 또한 (28)식에서 $k_y=0$로 하면

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}}^0(x-x', z;z') = \left(\underline{\underline{\mathbf{I}}}+\frac{1}{k^2}\nabla_s\nabla_s\right)\frac{K_0(ik\rho)}{2\pi} \tag{40}$$

$$\nabla_s = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} \tag{41}$$

와 같게 된다. 그러므로 전체공간 Green 텐서의 특이 적분 또한

$$\int_{S_0}G_{xx}ds' = \int_{S_0}G_{zz}ds'$$
$$= \frac{1}{k^2}\left\{\frac{ik\rho_0}{2}K_1(ik\rho_0)-1\right\} \tag{42}$$

$$\int_{S_0}G_{yy}ds' = \frac{1}{k^2}\{ik\rho_0 K_1(ik\rho_0)-1\} \tag{43}$$

으로 정리된다. 교차 미분항을 포함하는 다른 요소들은 역시 0이 됨은 물론이다. 시간 변화율을 본 논문에서와 같이 $e^{+i\omega t}$가 아니라 $e^{-i\omega t}$를 사용한 연구들에서는(Torres-Verdin and Habashy, 1994), (42)식과 (43)식에서 약간의 부호 변화와 더불어 modified Bessel 함수 대신 Hankel 함수로 나타나는데, 이는 Bessel 함수의 정의상 (Abramowitz and Stegun, 1964, Ch. 9) $ik\rho_0$의 부호의 차이일 뿐이다.

## 얇은 판(thin sheet) 적분방정식에서의 특이 적분

얇은 판은 3차원 구조의 전자탐사 반응을 단지 2차원의 산란전류에 의한 반응으로 대체할 수 있기 때문에, 주향이나 심도연장에 비해 그 두께가 매우 얇은 파쇄대의 3차원 반응을 비교적 적은 기억용량과 빠른 시간내에 정확하게 계산할 수 있는 장점이 있다. 얇은 판의 전자탐사 반응에 대한 적분방정식의 유도는 지금까지의 3차원 또는 2차원의 경우와 약간 다른 과정을 거치나 결과적인 수식은 다음과 같이 대동소이하게 된다(Weidelt, 1981).

$$\mathbf{E}_S(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_S^p(\mathbf{r})-\hat{z}\int_S \underline{\underline{\mathbf{G}}}_S(\mathbf{r},\mathbf{r}')\cdot\tau(\mathbf{r}')\mathbf{E}_S(\mathbf{r}')dS' \tag{44}$$

여기서 아래 첨자 $S$는 얇은 판상에서의 양을 나타내며 판의 두께를 $t$라 할 때 이상 어드미턴스(admittance)는

$$\tau(\mathbf{r}') = \Delta\{\sigma(\mathbf{r}')+i\omega\varepsilon(\mathbf{r}')\}t \tag{45}$$

과 같다(Song and Lee, 1998). (44)식에서 중요한 점은 전기장은 얇은 판의 주향 및 경사방향의 두 성분만 갖고 또 Green 텐서도 통상적인 3×3이 아닌 2×2로 표현된다는 점이다. 즉 얇은 판의 주향방향을 $\hat{\mathbf{a}}$, 경사방향을 $\hat{\mathbf{b}}$ 라 할 때 Green 텐서는

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}}_S^0(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \left(\underline{\underline{\mathbf{I}}}+\frac{1}{k^2}\nabla_S\nabla_S\right)g(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{46}$$

$$\nabla_S = \frac{\partial}{\partial a}\hat{\mathbf{a}}+\frac{\partial}{\partial b}\hat{\mathbf{b}}$$
$$= \left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{a}}$$

$$+\left(-\sin\alpha\cos\beta\frac{\partial}{\partial x}+\cos\alpha\cos\beta\frac{\partial}{\partial y}+\sin\beta\frac{\partial}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{b}},$$

표현되며 여기서 $\alpha$는 주향, $\beta$는 경사를 나타내는 각도이다 (Song and Lee, 1998).

얇은 판에서의 특이 적분은 미소면에서의 Green 텐서 적분이며 역시 미소면을 한변의 길이가 $\Delta$인 정사각형으로 가정하면 대칭성에 의하여

$$\begin{aligned}\int_{S_0} g(\mathbf{r}-\mathbf{r}')dS' &= \int_{b-\frac{\Delta}{2}}^{b+\frac{\Delta}{2}}\int_{a-\frac{\Delta}{2}}^{a+\frac{\Delta}{2}}\frac{e^{-ik\rho}}{4\pi\rho}da'db' \\ &\cong \int_0^{\rho_0}\int_0^{2\pi}\frac{\rho e^{-ik\rho}}{4\pi\rho}d\theta d\rho \\ &= \frac{i}{2k}(e^{-ik\rho_0}-1) \qquad (47)\end{aligned}$$

$$\rho = \sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2} \qquad (48)$$

과 같이 스칼라 Green 함수의 적분이 해결된다.

2차 미분항의 특이 적분 중, 교차 미분항에 대한 것은 대칭성에 의해 역시 0이 되며 나머지 2차 미분항의 특이 적분은 다음과 같이 해결된다.

$$\begin{aligned}\int_{S_0}\frac{\partial^2 g}{\partial a^2}dS' &= \int_{S_0}\frac{\partial^2 g}{\partial b^2}dS' \\ &= \frac{1}{2}\int_{b-\frac{\Delta}{2}}^{b+\frac{\Delta}{2}}\int_{a-\frac{\Delta}{2}}^{a+\frac{\Delta}{2}}\left(\frac{\partial^2}{\partial a^2}+\frac{\partial^2}{\partial b^2}\right)g\,da'db' \\ &\cong \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\rho_0}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{e^{-ik\rho}}{4\pi\rho}\right)d\rho d\theta \\ &= -\frac{(1+ik\rho_0)e^{-ik\rho_0}}{4\rho_0} \qquad (49)\end{aligned}$$

따라서 얇은 판의 적분방정식 해에서 전체공간 Green 텐서의 특이 적분은 다음과 같이 정리된다.

$$\int_{S_0}\underline{\underline{\mathbf{G}}}_S^0(\mathbf{r},\mathbf{r}')dS' = \frac{1}{4k^2\rho_0}\left\{ik\rho_0(e^{-ik\rho_0}-2)-e^{-ik\rho_0}\right\}\underline{\underline{\mathbf{I}}} \qquad (50)$$

## 결 론

전자탐사 적분방정식에서 특이 적분의 기본적인 개념을 설명하고 그 동안 명확하게 설명되지 않았던 3차원 스칼라 Green 함수의 2차 미분항의 특이 적분을 해석적으로 나타내었다. 전자탐사 적분방정식의 수치해를 구하는 과정에 대한 명확한 개념 확보를 위하여 2.5차원, 2차원 및 얇은 판 적분방정식의 특이 적분 또한 동일한 맥락에서 분류하고 해석적 표현을 정리하였다. 본 연구의 결과가 앞으로 전자탐사 적분방정식의 수치해를 구하는데 있어서 정확한 계산 결과의 도출에 도움이 될 것으로 기대하며 한층 더 발전된 수치화 알고리듬 개발의 밑거름이 되길 바란다.

## 감사의 글

본 연구는 과학기술부 지정 “99 국가지정연구실 사업”으로 선정되어 그 연구비 지원에 의해 이루어진 결과의 일부임을 밝힌다. 또한 수식의 검증을 도와주신 설순지 박사께 감사드린다.

## 참고문헌

이성곤, 1998, Born 근사를 이용한 3차원 전자탐사 모델링: 공학박사 학위논문, 서울대학교.

Abramowitz, M., and Stegun, I. A., 1964, *Handbook of mathematical functions*: National Bureau of Standards.

Chen, K.-M., 1977, A simple physical picture of tensor Green's function in source region: *Proc. IEEE*, **65**, 1201-1204.

Erdelyi, A., 1954, *Tables of integral transforms*: McGraw-Hill Book Co.

Hohmann, G. W., 1975, Three-dimensional induced polarization and electromagnetic modeling: *Geophysics*, **40**, 309-324.

Hohmann, G. W., 1988, Numerical modeling for electromagnetic methods of geophysics, *in* Nabighian, M. N., ed., *Electromagnetic methods in applied geophysics, Volume 1, Theory*: Soc. Expl. Geophys.

Song, Y., and Lee, K. H., 1998, A wide-band integral equation solution for EM scattering by thin sheets: *68th Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts*, 436-439.

Torres-Verdin, C., and Habashy, T. M., 1994, Rapid 2.5-D forward modeling and inversion via a new non-linear scattering approximation: *Radio Sci.*, **29**, 1051-1079.

Van Bladel, J., 1961, Some remarks on Green's dyadic for infinite space: *IRE Trans. Ant. Prop.*, **9.**, 503-506.

Van Bladel, J., 1991, *Singular electromagnetic fields and sources*: IEEE Press.

Ward, S. H., and Hohmann, G. W., 1988, Electromagnetic theory for geophysical applications, *in* Nabighian, M. N., ed., *Electromagnetic methods in applied geophysics, Volume 1, Theory*: Soc. Expl. Geophys.

Weidelt, P., 1981, Report on dipole induction by a thin plate in a conducting halfspace with an overburden: *Fed. Inst. Earth Sci. and Mate.*

Yaghjian, A. D., 1980, Electric dyadic Green's function in the source region: *Proc. IEEE*, **68**, 248-263.

Zhdanov, M. S., Dmitriv, V. I., Hursan, G., and Fang, S., 1999, Quasi-analytical approximation and series in 3-D electromagnetic modeling: *2nd Internat. Symp. Three-dimensional electromagnetics, Salt Lake City, Utah, Oct. 26-29*, 16-20.