베어링-축 조립체에서 축의 셰이크다운에 관한 연구

박흥근*· 오윤찬*· 박진무**
(1999년 9월 8일 접수)

Shakedown Analysis of Shaft in Bearing-Shaft Assembly

Heung-Keun Park, Yoon-Chan Oh and Jin-Moo Park

Key Words: Shakedown(셰이크다운), Contact(접촉), Finite Element Method(유한요소법), Residual Stress(잔류응력), Plastic Deformation(소성변형), Crack Driving Force(크랙구동력)

Abstract

Under repeated rolling, initial plastic deformation introduces residual stresses which render the steady cyclic state purely elastic. This is called the process of shakedown. Many studies have been done about the shakedown in semi-infinite half space using calculated Hertizian pressure. In this paper shakedown processes in a shaft are studied by finite element analyses of a two dimensional(plane strain) model with elastic-linear-kinematic-hardening-plastic material subjected to repeated, frictionless rolling contact. Symmetric and non-symmetric pressure distributions are obtained using a simplified model of the bearing-shaft assembly. The rolling contact is simulated by repeatedly translating both pressure distributions along the surface of the shaft. By the influence of the non-symmetric pressure, larger residual radial tensile stress is generated in the immediate subsurface layer, which may make a crack propagate; and, the subsurface undergoes a zigzag plastic deformation during the shakedown process, which may lead to a crack initiation.

1. 서 론

셰이크다운이란 구조물이 소성하중영역에서 반복하중을 받을 때, 반복소성변형에 수반하는 잔류응력의 영향에 의해 그 응답이 탄성적으로 된다는 현상을 말한다. 이 현상은 반복하중이 작용하는 구조물이 건전하게 기능하기 위한 하나의 조건이며, 강도설계의 하나의 요건이다.

초기 셰이크다운 이론은 골격구조물이나 압력용기와 같은 반복하중을 받는 경우에 대한 해석이 주를 이루었으나, Merwin과 Johnson[1]이 반복접촉하중을 받는 탄-완전소성 재료에 대한 해석을 수행한 이후 유한요소해석 기법의 도움으로 많은 연구가 진행되고 있다.[2,3] 하지만 기존의 연구들은 반-무한공간에 하나의 계산된 압력만이 가해졌을 경우의 최종 셰이크다운 상태의 고찰이 주를 이루고 있으며, 한정된 영역에서의 재료의 거동에 대하여 고찰된 바는 거의 없다.

따라서 본 연구에서는 보다 실제적인 경우의 한 예로서, 니들 로울러 베어링과 조립되어 운동을 하는 축이 겪게되는 셰이크다운에 대하여 2차원 유한요소해석을 통하여 해석을 수행하였다. 비록 접촉으로 인한 재료의 변형이 크지 않다면 Hertz의 압력분포와 실제의 압력분포는 큰 차이를 보이지 않지만,[4] 크기와 형상이 다른 압력을 얻어내기 위하여 베어링-축 조립체의 단순모델을 구성하였으며, 이로부터 소성변형을 유발하는 두 개의 압력을 구하였다. 셰이크다운 탄성한계내의 대칭 및 비대칭 압력을 축 표면의 일정영역에 반복적으로 이동시킴으로서,[5] 재료가 셰이크다운에 도달하기까지의 거동을 고찰하였다.

해석 결과 기존의 반-무한공간에 대한 해석과는 상당한 차이점을 발견할 수 있었다.

* 회원, 고려대학교 대학원 기계공학과
E-mail : idandy@mail.com
TEL : (02)929-1718 FAX : (02)926-9290
** 회원, 고려대학교 기계공학과

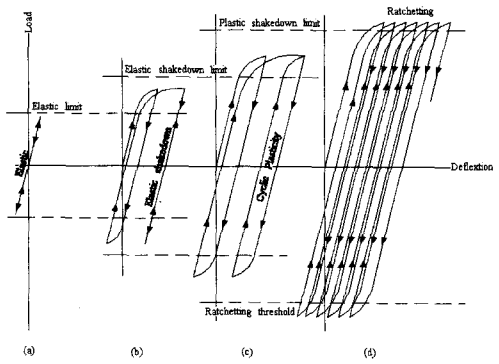

Fig. 1 Structural response to cyclic loading

2. 셰이크다운 개요

구름 베어링 및 철로 등 구름접촉의 실제 적용 사례에서는 과도한 반복적인 하중이 가해지게 된다. 만일 첫 번째 경로에서 탄성한계를 초과하는 하중이 가해지면 국부적인 소성변형이 발생하게 되고 이 영역 주변에 잔류응력이 유발된다. 두 번째 경로에서 재료는 접촉으로 인한 응력과 이전 단계에서 생성된 잔류응력의 복합적인 응력상태에 놓이게 된다. 일반적으로 이와 같은 잔류응력은 두 번째 경로에서의 항복 유발 가능성을 줄여 준다. 따라서 몇 번의 경로로서 그 이후의 변형을 완전 탄성으로 만들 수 있는 잔류응력을 형성할 수 있다. 이것이 반복되는 하중 하에서의 셰이크다운 과정이며, 초기의 소성변형이 유발한 잔류응력이 정상주기상태(steady cyclic state)를 완전 탄성상태로 만든다.[6] Fig. 1은 반복하중을 받는 재료의 거동을 나타낸다.

이상과 같이 과도한 접촉하중을 받는 경우, 마모를 촉진시키고 표면의 특성을 저하시키는 반복적인 소성변형을 피함으로써 적절한 설계치를 유도할 수 있다. 이는 재료내부의 일부영역에서 소성변형을 유발하는 탄성한계보다는 점진적인 붕괴를 유발할 수 있는 셰이크다운 탄성한계가 공학적으로 더욱 중요할 수 있음을 시사한다.

이들 이론은 초기의 소성거동을 고려하지 않으면서도 정상상태를 곧바로 설명할 수 있으며, 재료의 거동이 탄성영역에 국한되므로 이론적 또는 수치적으로의 접근이 용이하다.[7]

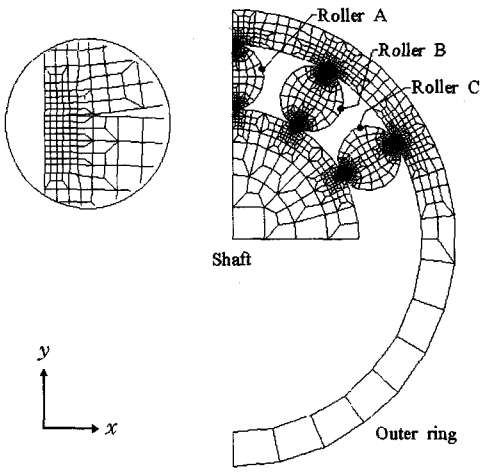

Fig. 2 FE model of Bearing-Shaft Assembly

Table 1 ELKP parameters

Parameter	Value
E (elastic modulus)	207 GPa
σ_k (kinematic yield strength)	1050 MPa
k_k (kinematic shear yield strength)	606 MPa
M (plastic modulus)	188 GPa

3. 베어링-축 조립체 해석

3.1 해석모델 및 경계조건

외벽에 고정된 두께 1.6 ㎜의 외부 링과 지름 3 ㎜의 니들로울러 12개로 구성된 베어링이 지름 12 ㎜의 축과 초기공차 없이 조립되어 있는 상태에서, 축이 일정방향으로 편심되어 운동하는 상태를 해석모델로 설정하였다. 접촉면에서의 마찰을 무시한 순수구름운동(pure rolling)상태를 가정하였다.

해석은 상용 유한요소 프로그램인 ABAQUS/Standard Version 5.4를 사용하였다. 2차원 4절점 요소(4-node Plane Strain Element)를 사용하여 2,139(Shaft 673, Roller 990, Outer ring 476)개의 요소와 2,328(Shaft 725, Roller 1071, Outer ring 532)개의 절점으로 구성하였으며, Fig. 2에 도시된 바와 같다. 재료는 SAE 52100 Bearing steel을 사용하였으며, 물성치[8]는 Table 1과 같다.

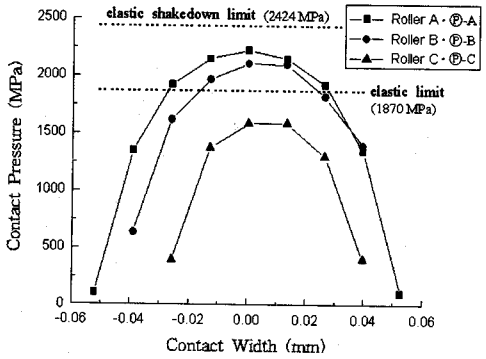

Fig. 3 Pressure distribution at the contact area

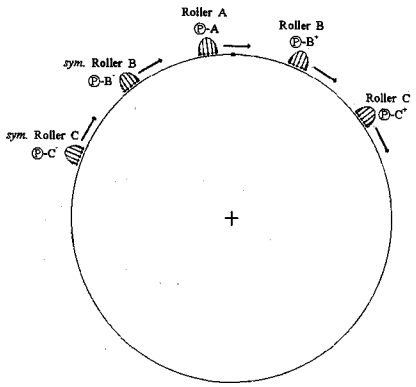

Fig. 4 Pressure distribution around the shaft

각 로울러의 원주방향 운동은 구속하였으며, 축 및 외부 링과의 접촉면에서의 미끄럼은 허용하였다. 외부 링의 외측은 반경방향 운동을 구속하였다. Roller A 및 B와의 접촉영역에서 축의 소성변형을 유발하기 위하여, 축을 수직 방향으로 0.009 ㎜ 이동하였고, 이때 단위 길이당 축에 걸리는 하중은 523.5 N이다.

3.2 접촉면에서의 압력 분포

해석결과 얻은 압력분포를 Fig. 3에 도시하였다. Roller A에 의한 압력(Ⓟ-A) 및 Roller B에 의한 압력(Ⓟ-B)은 각각 2223 ㎫ 및 2107 ㎫의 최대압력을 가지므로 소성영역에 있는 반면, Roller C에 의한 압력(Ⓟ-C)은 최대압력이 1585 ㎫로서 탄성영역에 있다. 또한 Roller A에 의한 압력은 접촉중심선에 대하여 대칭인 반면, Roller B, C에 의한 압력은 비대칭성을 갖는다.

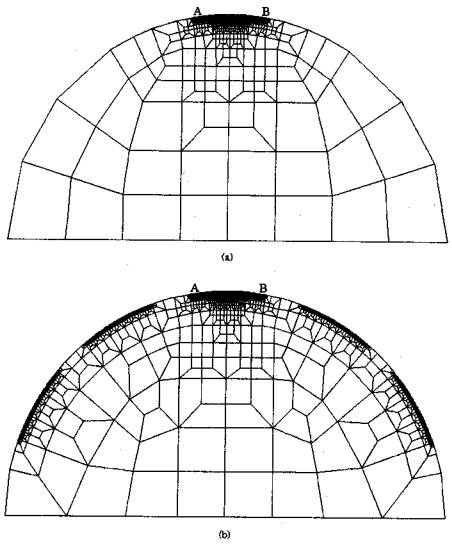

Fig. 5 FE model of shaft
(a) Model A - subjected to 1 pressure at a path
(b) Model B - subjected to 5 pressures at a path

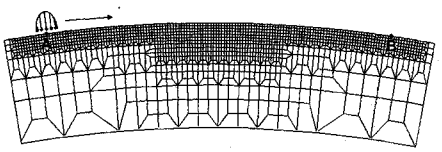

Fig. 6 Detail mesh and Pressure distribution

4. 축의 셰이크다운

축에서의 셰이크다운 현상을 고찰하기 위하여, Fig. 4와 같이 3절에서 얻은 접촉압력들을 고정된 축 표면을 따라 이동시킴으로서, 베어링과 조립되어 운동하는 축의 상태를 구현하였다.

4.1 해석 모델

기존의 반 무한평면에 대한 연구에서와 달리, 본 연구에서는 정확한 경계조건의 설정이 쉽지 않다. 따라서 초기 압자 및 관심영역 주변의 영향과 관심영역 이외의 영역에서 동시에 가해지는 하중이 미치는 영향을 고찰하기 위하여, Fig. 5와 같은 두 가지의 모델을 구성하였다.

초기에 하중을 받지 않은, 축의 임의의 영역이 순차적으로 로울러와 접촉하는 상황을 묘사하기 위하여 Fig. 6과 같이 각 압력을 A지점에 가하여

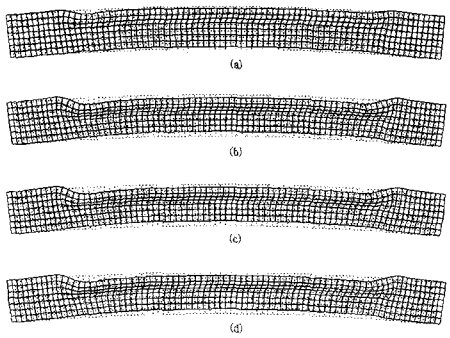

Fig. 7 Deformed shape after each path (× 3500)
(a) Ⓟ-$B^{+(1)}$ (b) Ⓟ-$B^{+(1)}$ ⇒ Ⓟ-$A^{(1)}$
(c) Ⓟ-$B^{+(1)}$ ⇒ Ⓟ-$A^{(1)}$ ⇒ Ⓟ-$B^{-(1)}$
(d) Ⓟ-$B^{+(1)}$ ⇒ Ⓟ-$A^{(1)}$ ⇒ Ⓟ-$B^{-(1)}$ ⇒ Ⓟ-$B^{+(2)}$

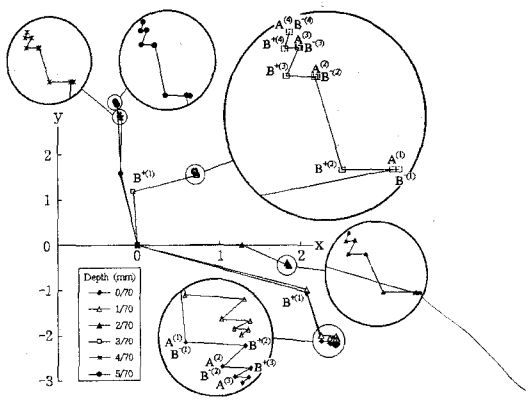

Fig. 8 Displacement w.r.t original position after each path during 4 cycles ($\times 10^{-6}$㎜)

B지점까지 이동시킨 후 제거시켰다. 30° 간격으로 배치된 로울러들에 비하여, 제안된 모델들의 관심영역(영역AB)은 동시에 두 개의 압력을 받을 만큼 크지 않으므로, 하나의 압력이 완전히 제거된 후에 다음 압력을 가하였다.

우선 초기 압자 및 관심영역 주변의 영향을 고찰하기 위하여 Model A의 상단 7.5° 를 영역AB로 설정하였다. 영역AB에 대하여 Ⓟ-B^{+} ⇒ Ⓟ-A ⇒ Ⓟ-B^{-}를 한 주기로 하여 반복적으로 4주기 동안 가하였다.

처음 몇 번의 경로 후에 변형된 형상을 3500배로 확대하여 Fig. 7에 도시하였다. 표면 바로 밑 영역에서의 소성변형으로 인하여 표면층이 로울러 진행방향으로 변형하는 현상이 나타났으며, 표면층이 축의 중심으로 변형됨과 동시에 축의 중심영역 또한 표면쪽으로 변형됨을 알 수 있다. 이는 반-무한평면의 경우에는 나타나지 않는 현상이며, 축의 경우 표면의 탄성띠와 중심영역 사이에 형성된 소성영역의 잔류응력이 주변의 탄성영역과 상호 작용을 하면서 경계층에서의 응력이 소거되는 과정 중에 유발된 것으로 볼 수 있다.

Fig. 8은 4주기 동안 각 경로에 의해 형성된, 관심영역의 중심선상에 위치한 절점들의 소성변위를 도시한 것이다. 처음 주기에서 Ⓟ-B^{+}와 Ⓟ-A가 상대적으로 매우 큰 변형을 유발하였다. 반면에 Ⓟ-B^{-}는 모든 주기에서 변형을 거의 유발하지 못했다. 표면층의 경우 Ⓟ-B^{+}가 진행방향으로의 추가 변형을 유발하는 반면, 연속되는 압력 A는 오히려 변형량을 감소시킴으로서 지그재그의 변형을 하고 있음을 발견할 수 있다. 이는 비록 Ⓟ-B^{+}의 중심 최대압력은 Ⓟ-A보다 작지만 대칭이 아니며, 진행방향 압력이 후방 압력보다 크기 때문에 로울러의 구름에 의해 표면이 진행방향으로 변형하는 것과 부합하기 때문이다. 또한 형성된 변형을 Ⓟ-A가 감소시키는 것은 Ⓟ-A의 대칭성으로 인하여 응력의 재분포를 유발함으로서 변형량의 균형을 맞춘 결과이다. 최대 상당응력이 발생하는 2/70 ㎜ 이하의 절점에서는 표면층과 반대의 경향을 가진 변형을 함을 알 수 있다.

앞의 해석을 통하여 일반적인 경향을 분석하였다. 그러나 Fig. 7에서 볼 수 있듯이 관심영역의 중심 부위가 초기 압자영역 및 하중을 받지 않은 주변영역의 영향을 받고 있을 가능성이 있다. 따라서 관심영역을 확장시켜가면서 반복적으로 해석을 수행하여, 초기모델의 약 2배 정도인 16° 의 해석영역을 선정하였다.

다음으로 축의 관심영역에 하나의 압력이 가해질 때, 그 주변 로울러들에 의해 동시에 가해지는 압력들의 영향을 평가하기 위한 해석을 수행하였다. Model A에 Ⓟ-A만을 가한 경우와 Model B에 Ⓟ-A를 중심으로 5개의 압력을 동시에 가한 경우의 절점변위를 비교한 Table 2에서 볼 수 있듯이 1% 내외의 미소한 차이를 나타냈다. 경로 후 형성된 잔류응력 또한 매우 유사한 분포를 보였다. 결국 주변 로울러의 영향은 무시할 수 있음을 알 수 있다.

따라서 추후의 해석은 16° 의 해석영역을 갖는 Model A에 대하여 수행하였다.

4.2 대칭 압력에 의한 셰이크다운

축의 관심영역에 대칭성을 갖는 최대압력인 Ⓟ-A만을 가한 후의 해석결과이다. 반-무한평면이 2~3회 반복하중 후에 셰이크다운에 도달하는 것과 달리 Ⓟ-A가 19회 반복된 후에 셰이크다운에 도달하였다. 이는 앞서 제시된 바와 같이 반-무한평면의 경우 표면층의 압착에 대한 주변 탄성영역의 구속이 약한 반면, 축의 경우는 소성영역이 주위의 탄성영역의 구속을 많이 받기 때문이다.

셰이크다운 과정의 잔류응력성분 변화를 Fig. 9에 도시하였다. 원주방향 잔류응력은 반경방향 잔류응력 및 전단 잔류응력의 약 10배의 크기를 가지며, 재료가 탄성거동을 하는데 중요한 역할을 한다. 그러나 보다 급격한 변화를 겪게되는 반경방향 및 전단 잔류응력이 셰이크다운에 많은 영향을 미치고 있음을 알 수 있다.

Fig. 10은 표면으로부터 0.1 ㎜ 이내의 절점들의 초기 위치로부터의 변위를 나타낸 것이다. 3개의 압력을 가한 초기모델에 의한 해석 결과에서 지그재그 형태의 변형을 한 것과 달리, 셰이크다운에 도달하기까지 일정한 방향으로의 변형을 볼 수 있다.

4.3 대칭 및 비대칭 압력에 의한 셰이크다운

축의 관심영역에 비대칭 압력 Ⓟ-B^+ 및 대칭 압력 Ⓟ-A를 반복적으로 가한 후의 해석 결과이다. 초기모델 해석결과로부터 Ⓟ-B^-는 셰이크다운에 거의 영향을 미치지 않는다는 사실을 알 수 있으므로 본 해석에서는 제외시켰다.

Fig. 11에 셰이크다운 과정 중 재료내부의 응력분포변화를 도시하였다. Ⓟ-A만 가한 경우와 전반적인 경향은 같지만, 반경방향 잔류응력 및 전단 잔류응력의 경우는 Ⓟ-B^+의 영향을 많이 받는

Table 2 Comparison of displacement ($\times 10^{-6}$㎜)

Depth(㎜)	Model A		Model B	
	δx	δy	δx	δy
0	3.21	-1.73	3.19	-1.70
1/70	3.21	-1.68	3.18	-1.66
2/70	2.78	-0.232	2.76	-0.220
3/70	1.16	1.84	1.15	1.84
4/70	-0.0199	3.06	-0.0283	3.05
5/70	-0.0726	3.29	-0.0759	3.26
6/70	-0.0750	3.33	-0.0786	3.29
0.1	-0.0772	3.37	-0.0812	3.33

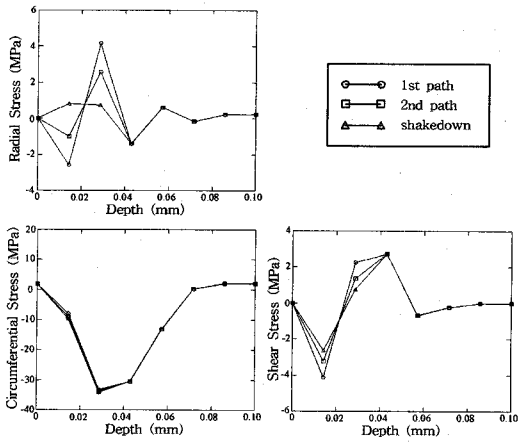

Fig. 9 Change of residual stress distribution during shakedown (Ⓟ-A only)

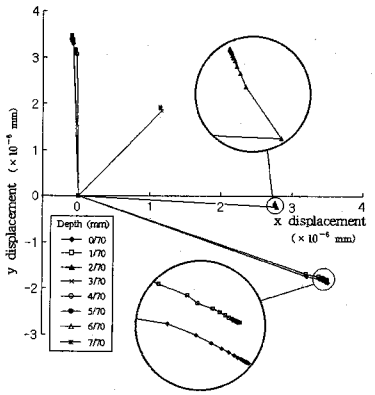

Fig. 10 Displacement w.r.t original position after each path during shakedown (Ⓟ-A only)

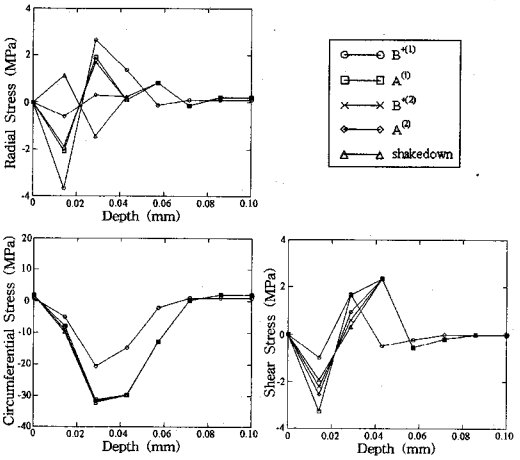

Fig. 11 Change of residual stress distribution during shakedown (Ⓟ-B^+ & Ⓟ-A)

것으로 나타났다. 특히 반경방향 잔류응력은 Ⓟ-A만을 가한 경우보다 복잡한 양상을 보이며, 초기의 Ⓟ-B^+에 의해 보다 큰 압축 잔류응력층이 표면 가까이에 형성되지만, 최종상태의 인장 응력성분은 보다 얇은 층을 형성함을 알 수 있다. 원주방향의 경우, 비록 초기에는 Ⓟ-B^+에 의해 작은 압축응력이 형성되지만, 전반적으로 비대칭 압력에 거의 영향을 받지 않고 셰이크다운 하에서의 응력 또한 매우 유사한 분포를 나타낸다. 전단 잔류응력의 경우, Ⓟ-B^+에 의해 감소되는 반면 Ⓟ-A로 인하여 증가됨으로서 셰이크 다운에 도달하기 이전에 증감이 반복적으로 이루어진다.

Fig. 12는 표면에 가까운 절점 4개의 변위를 도시한 것이다. 전반적으로 표면 영역의 중심축으로의 변형과 중심축의 표면 영역으로의 변형은 Ⓟ-A만에 의한 결과와 비슷한 경향을 보인다. 그러나 두 영역의 경계에서는 반경방향으로의 변형 외에 원주방향으로의 지그재그 형태의 변형을 동반함을 알 수 있다. 즉 비대칭 압력인 Ⓟ-B^+에 의해 표면층이 진행방향으로 이동하는 반면, 깊이 2/70 ㎜ 이하의 절점들은 반대방향으로 이동한다. 대칭 압력인 Ⓟ-A는 이와 반대의 거동을 유발한다. 따라서 표면 바로 밑의 영역에서는 각 주기마다 연속되며 엇갈리는 지그재그 형태의 소성변형을 하게된다. 이런 현상은 Ⓟ-B^+의 영향을 받는 초기에 나타나며, 그 이후로는 대칭 압력에 의한 결과와 같이 일정방향으로 연속된 변형을 하는 경향을 보인다.

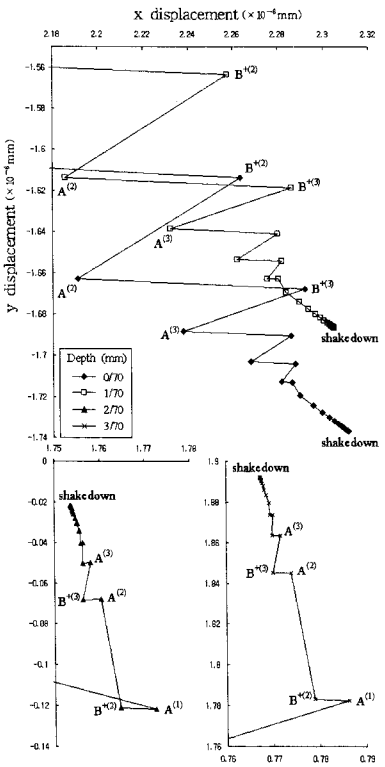

Fig. 12 Displacement w.r.t original position after each path during shakedown (Ⓟ-B^+ & Ⓟ-A)

5. 고 찰

하나의 대칭 압력만을 가한 경우와 대칭 및 비대칭 압력을 순차적으로 가한 경우의 해석을 통하여 압력분포가 셰이크다운 과정 및 최종 상태에 미치는 영향을 알 수 있었다. 두 경우 모두 기존의 반-무한평면에서의 해석과는 달리 반경방향 잔류응력이 형성됨을 알 수 있었으며, 셰이크다운 과정중의 응력 및 변형에 많은 영향을 미치고 있음을 알 수 있었다. 최종 셰이크다운 상태에서의 응력 상태를 Fig. 13에 도시하였다.

기존 셰이크다운 이론 및 유한요소 해석을 통한 대부분의 연구가 반-무한평면에 적용되었기 때문에 유한 경계를 가진 구조물의 실제 응력 상태, 특히 반경방향 잔류응력의 분포를 정확하게 묘사할 수 없었다. 그러나 Voskamp 등[9]은 반복하중을 받는 베어링의 실험을 통하여 반경방향 잔류응력의 존재를 확인한 바 있다. 셰이크다운을 통해 형성된 잔류응력은 하중조건, 물성치 및 모델형상에 따라 큰 차이를 보임으로 직접적인 비교는 어렵지만, 본 해석결과와 비슷한 경향을 보임을 알 수 있었다. 또한 본 해석에서의 소성변위가 매우 작은 값을 갖지만, 이는 모델의 크기와 하중분포가 작기 때문이며 유한요소해석의 결과로부터 얻은 경향은 타당하다고 볼 수 있다.

잔류응력이 반복하중을 받는 구조물의 수명에 상당한 영향을 준다는 것은 잘 알려져 있는 사실이다. 표면 가까이에 형성되는 반경방향의 인장 잔류응력의 경우, 크랙 구동력(crack driving force)의 Mode Ⅰ (opening mode) 성분을 유발함과 동시에 크랙면의 마찰계수를 감소시킴으로서 Mode Ⅱ (sliding mode) 성분을 증가시켜 결국 재료 내부의 미세한 균열의 성장을 유도할 수 있으므로 바

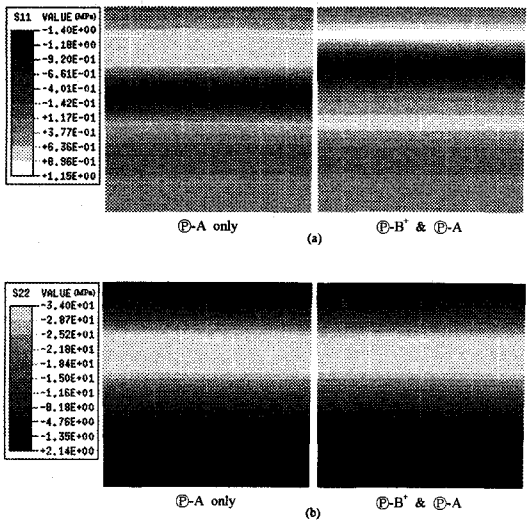

Fig. 13 Comparison of shakedown state
(a) radial residual stress
(b) circumferential residual stress

람직하지 않은 결과를 초래할 수도 있다.[10,11] 특히 비대칭 압력의 영향으로 다소 큰 반경방향 인장 잔류응력이 표면 가까운 층에 형성됨을 알 수 있다. 또한 Fig. 12에서 보여지듯이 비대칭 압력의 영향으로 인하여 지그재그 형태의 반복된 소성변형을 함으로써 재료 내부에 개재물이 존재할 경우 균열의 발생을 유도할 수도 있다.[12]

셰이크다운 이전의 축은 1050 ㎫의 항복응력을 갖고 있었다. 그러나 셰이크다운을 통하여 Ⓟ-A만 가한 경우 1196 ㎫, Ⓟ-B⁺와 Ⓟ-A를 순차적으로 가한 경우 1200 ㎫의 항복응력을 갖는 완전 탄성상태를 얻을 수 있었다.

대칭 압력에 의한 셰이크다운 과정중의 축 표면에 근접한 위치에서의 응력-변형률 선도를 Fig. 14에 도시하였다. 처음 주기에서 소성변형이 유발된 후 미미한 변화를 보이며, 최종 셰이크다운 하에서는 탄성거동을 함을 알 수 있다.

초기 압자 주변 영역에서의 재료 거동에 대한 추가 해석 결과, 초기 압자로 형성된 잔류응력 및 변형으로 인하여 과도한 잔류응력 및 소성변형이 유발되었다. 이는 한정된 영역에서의 셰이크다운 해석에 있어 초기 압자에 의한 영향을 완전히 배재할 수 없음을 나타내는 것이다.

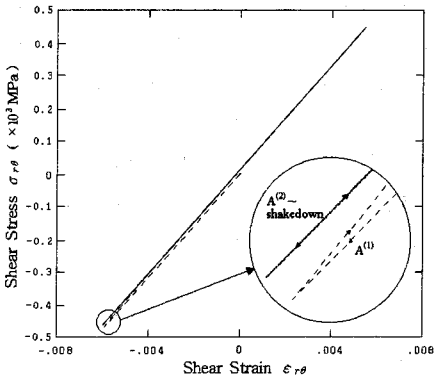

Fig. 14 Shear stress - strain curve during shakedown at a depth of 0.026㎜

6. 결 론

한정 영역에서의 대칭 및 비대칭 압력에 의한 셰이크다운 현상을 고찰하기 위하여 베어링-축 조립체의 2차원 단순모델을 설정, 유한요소해석을 통하여 다음과 같은 결과를 얻었다.

(1) 반복 하중 하에서 형성된 재료내부의 국부적인 소성변형으로 인한 잔류응력의 영향으로 재료의 완전 탄성거동을 얻어낼 수 있었다.

(2) 한정 영역의 영향으로 반경방향의 인장 잔류응력이 표면에 매우 가까운 영역에 존재함으로서 재료의 안정적인 거동에 영향을 미칠 수 있음을 알 수 있었다.

(3) 비대칭 압력의 영향으로 표면에 매우 가까운 영역에서 지그재그 형태의 반복된 소성변형이 발생하며, 재료내부에 개재물이 존재할 경우 균열의 발생을 유도할 수 있음을 보여주었다.

(4) 압력들의 조합에 따라 축의 셰이크다운 과정에 많은 영향을 미칠 수 있음을 알 수 있었다.

본 연구를 통하여 조립상태에서의 축의 셰이크다운 현상에 대한 고찰 및 실제 하중이 재료의 거동에 미치는 영향 등을 이해할 수 있었다. 또한 실제 구조물에 셰이크다운 이론을 적용할 경우, 셰이크다운 과정에 대한 고찰 및 기존의 파괴역학적 관점에서의 연구[13,14]와의 접목을 통한 신뢰성 차원에서의 연구가 매우 중요한 요소가 될 수 있음을 보여주었다.

참고문헌

(1) Merwin, J.E. and Johnson, K.L., 1963, "An Analysis of Plastic Deformation in Rolling Contact," *Proc. Institution of Mechanical Engineers*, Vol. 177, pp. 670~690.

(2) Kral, E.R. and Komvopoulos, K., 1996, "Three-Dimensional Finite Element Analysis of Surface Deformation and Stresses in an Elastic-Plastic Layered Medium Subjected to Indentation and Sliding Contact Loading," *J. of Applied Mechanics*, Vol. 63, pp. 365~375.

(3) Wong, S.K., Kapoor, A. and Williams, J.A., 1997, "Shakedown Limits on Coated and Engineered Surface," *Wear*, Vol. 203, pp. 162~170.

(4) Bhargava, V., Hahn, G.T. and Rubin, C.A., 1985, "An Elastic-Plastic Finite Element Model of Rolling Contact, Part 1: Analysis of Single Contact," *J. of Applied Mechanics*, Vol. 52, pp. 67~74.

(5) Bhargava, V., Hahn, G.T. and Rubin, C.A., 1985, "An Elastic-Plastic Finite Element Model of Rolling Contact, Part 2: Analysis of Repeated Contacts," *J. of Applied Mechanics*, Vol. 52, pp. 75~82.

(6) Johnson, K.L., 1987, *Contact Mechanics*, Cambridge University Press.

(7) Williams, J.A., Dyson, I.N. and Kapoor, A., 1999, "Repeated Loading, Residual Stresses, Shakedown, and Tribology," *J. of Materials Research*, Vol. 14, pp. 1548~1559.

(8) Hahn, G.T., Bhargava, V., Rubin, C.A., Chen, Q. and Kim, K., 1987, "Analysis of the Rolling Contact Residual Stresses and Plastic Deformation of SAE 52100 Steel Ball Bearings," *J. of Tribology*, Vol. 109, pp. 618~625.

(9) Voskamp, A.P. and Mittemeijer, E.J., 1997, "State of Residual Stress Induced by Cyclic Rolling Contact Loading," *Material Sciences and Technology*, Vol. 13, pp. 430~438.

(10) Lei, T.S., Bhargava, V., Hahn, G.T. and Rubin, C.A., 1986, "Stress Intensity Factors for Small Cracks in the Rim of Disks and Rings Subjected to Rolling Contacts," *J. of Tribology*, Vol. 108, pp. 540~544.

(11) O'Regan, S.D., Hahn, G.T. and Rubin, C.A., 1985, "The Driving Force for Mode II Crack Growth under Rolling Contact," *Wear*, Vol. 101, pp. 333~346.

(12) Suh, N.P., 1977, "An Overview of the Delamination Theory of Wear," *Wear*, Vol. 44, pp. 1~16.

(13) 이강용, 김준엽, 1997, "구름 및 미끄럼 접촉하의 중공원판의 표면 하층균열에 대한 J-적분," 대한기계학회논문집(A), 제21권, 제7호, pp. 1149~1155.

(14) Komvopoulos, K. and Cho, S.-S., 1997, "Finite Element Analysis of Subsurface Crack Propagation in a Half-space due to a Moving Asperity Contact," *Wear*, Vol. 209, pp. 57~68.