

보강된 구조물의 기하학적 비선형 해석을 위한 편심 응축 셀 요소

이 원 재* · 이 병 채**

(1999년 8월 31일 접수)

An Eccentric Degenerated Shell Element for the Geometrically Nonlinear Analysis of Stiffened Structures

Won Jae Lee and Byung Chai Lee

Key Words : Eccentric Shell(편심 셀), Stiffened Structure(보강된 구조)

Abstract

An eccentric degenerated shell element with geometric non-linearity for the precise and efficient analysis of stiffened shell structures is developed. To deal with the eccentricity, we define the eccentric shell and the master shell that constitute one combined shell. It is assumed that the sections remain plane after deformation. The internal force vector and the tangent stiffness matrix based on the virtual work principle in the natural coordinate system are derived. To enhance the robustness of the element, assumed strain method for transverse shear and membrane strains is used. Through numerical experiments the effectiveness of the proposed element is demonstrated.

1. 서 론

셀 구조는 막 거동과 휨 거동의 복합을 통해 하중을 지지, 전달하는 구조로써 많은 공학 구조에 사용되고 있다. 이러한 셀 구조물은 재료 자체의 정적 강도에 비하여 상대적으로 낮은 좌굴 응력을 갖는다. 따라서 구조물 자체의 무게에 대한 부담을 줄임과 동시에 좌굴 하중의 향상과 강성의 증가를 위하여 보강 부재(stiffener)를 부착하는 것이 일반적이다.

보강된 구조물의 해석을 위하여 오래 전부터 많은 연구가 진행되어 왔으며 최근에 이르러 유한 요소법이 주로 이용되고 있다. 선형 좌굴 해석을 통해서도 좌굴을 고려할 수 있으나, 보통 좌굴 하중이 과도하게 추산되므로 실용적인 설계를 위해서는 비선형 해석을 통해 좌굴 하중을 구하거나 실험 또는 경험식을

이용한다. 또, 일부 부재의 좌굴 후에도 상당한 구조 강성이 남아 있는 경우가 많아 좌굴 후 거동 해석도 요구되고 있는 실정이다.

보강된 구조물의 유한 요소 모델링 기법은 크게 다음의 몇 가지로 나눌 수 있다. 첫번째는 보강 부재를 독립된 부재로 보지 않고 이것의 강성 효과를 판(skin)인 셀에 흡수시켜 보강된 셀의 강성에 상당하는 등가의 셀로 대체하는 방법이 있다. Boot and Moore⁽¹⁾은 보강된 판을 2차원의 연속체로 대체할 수 있는 일반적인 조건을 조사하였다. 그러나 이러한 방법은 보강 부재의 크기, 형태 그리고 방향 등에 제약을 받는다.

두번째는 편심 보강된 판을 보 요소를 이용하여 해석하는 방법이 있다. 이것은 주로 고유치 해석을 통한 진동 문제나 선형 좌굴 문제에 적용되어 왔다. 보강 부재의 국부적인 거동보다는 구조물 전체의 전반적인 거동에 관심이 있는 경우는 보 요소를 이용하는 것이 해석의 자유도를 크게 줄임과 동시에 비교적 만족할 만한 정확성을 보여 주므로 이러한 방법도 하나의 선택이 될 수 있다.^(2,3)

* 한국과학기술원 기계공학과 박사과정

** 회원, 한국과학기술원 기계공학과

Email: bclee@sys713.kaist.ac.kr

TEL : (042)869-3031 FAX : (042)869-3095

세번째는 가장 보편적인 방법으로 보강 부재를 판이나 셸 요소를 이용하여 해석하는 것이다. 이 경우 보강 부재의 국부적인 거동을 잘 묘사할 수 있으므로 선형 해석은 물론 특히 비선형 해석에 적합한 방법이라 할 수 있다. Jiang 등⁽⁴⁾은 hat 형 보강 부재가 부착된 판에 대해 고유치 해석을 수행했는데, 셸 요소의 유효 단면적을 사용하는 경우와 강체 보 요소(rigid beam)로 연결하여 해석하는 방법을 3차원 고체 요소의 결과와 비교하였다. Bushnell⁽⁵⁻⁷⁾은 복합 재료를 다룰 수 있는 비선형 셸 요소를 이용하여 보강된 구조물의 좌굴 해석을 수행하고, 좌굴 하중에 대해 최적화를 시도 하였다.

본 논문에서는 세번째 방법을 대상으로 특히 보강된 구조물에서의 단면 편심을 요소 내에서 처리하여 편리하고 정확한 해석이 가능하도록 한다. 단면 편심의 영향을 알아보기 위하여 Fig. 1에 L형 보강 부재로 보강된 판의 단면과 이러한 구조물을 셸 요소를 이용하여 해석하는 경우의 유한 요소 모델을 나타내었다. 그림과 같이 일반적으로 판과 보강 부재가 겹쳐진 부분은 유효 단면적을 갖는 하나의 셸로써 대체되게 되는데, 유효 단면적은 보통 판의 단면적과 보강 부재의 단면적을 합한 것을 쓰게 된다. 그림에서 알 수 있듯이 해석 대상 구조물과 유한 요소 모델과는 단면적 및 중첩된 부분 등으로 인하여 약간의 차이를 갖게 되나 현재까지도 이의 영향에 대한 연구는 거의 이루어지지 않은 것으로 보인다. 보강 부재의 단면과 위치를 제대로 묘사해 주지 못할 경우 물리적으로 볼 때 단면적, 단면 2차 모멘트 그리고 중심면의 위치가 정확히 예측되지 않으므로 구조물 전체의 강성은 실제의 강성과 다르게 계산되기 마련이다.

Stiffener 등⁽⁸⁾은 스트링거(stringer)로 보강된 복합재료 비틀림 박스(composite wing torsion box)의 기하학적 비선형 해석을 수행하였다. 그들은 보강 부재의 편심을 무시한 방법은 하중-변위 곡선을 통해 매우 큰 오차를 줄 수 있다는 것을 지적하였으며 T 형 보강 부재의 편심을 모델링하기 위해 다음의 두 가지 방법을

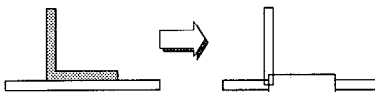


Fig. 1 Shell modeling for the L type Stiffener

시도하였다. 그 첫번째 방법은 보강 부재의 기하학적 형상에 맞도록 셸 요소를 구성하고 강체 보 요소를 이용하여 판과 보강 부재를 결합시키는 것이다. 두번째 방법으로 적층 셸 요소에서 강성이 없는 더미층(dummy layer)을 가상적으로 도입하여 편심 효과를 기술 할 수 있도록 하였다.

그들은 전자의 방법이 실제 모델에 물리적으로 맞다고 말하고, 수치 실험을 통하여 후자는 간단한 기술적 방법으로 전자와 거의 같은 결과를 줌을 보였다. 그러나 여기서 한가지 주의할 만한 것은 내력(internal force vector)과 강성 행렬이 두께 방향으로 수치 적분되는 형태의 요소는 전술한 바와 같이 가상적인 더미 층을 도입함으로써 편심을 고려할 수 있으나, 합응력(stress resultant) 형태로 수식화하여 수치적인 두께 적분을 피하는 요소의 경우는 단순히 그렇게 할 수는 없다는 점이다. 그 이유는 이러한 수식화에서는 변형률과 응력을 막, 굽힘 그리고 두께 방향 전단 성분으로 나누게 되는데, 단순히 더미층을 도입하게 되면 위의 변형률에 오류가 생기기 때문이다.

본 논문에서는 이와 같이 단면 특성의 오차가 구조물 전체의 거동에 큰 오차를 줄 수 있다는 사실을 감안하여 보강 부재의 단면 편심을 고려할 수 있도록 요소 수준에서 편심이 고려되는 응축 셸 요소(degenerated shell element)를 개발하고, 수치 실험을 통해 평판의 좌굴 해석에서의 편심에 대한 영향을 알아보는 것을 목표로 하였다. 셸 요소는 자연 좌표계 상에서 covariant Green Lagrangian 변형률과 contravariant 2nd Piola Kirchhoff 응력의 단면 합력을 이용하여 수식화 하였다.^(9,10) 이런 형태의 요소는 수식이 비교적 간단하고 수치적으로 매우 효율적이다.

2. 편심 응축 셸 요소의 정식화

2.1 요소의 형상 및 변위장

응축 셸 요소는 특별한 셸 이론에 구애됨이 없이 다음과 같이 일반적인 셸의 기본 가정을 따른다. 변형 전 중심면에 수직인 직선은 변형 후에도 직선을 유지하고, 중심면에 수직으로 작용하는 응력에 의해 생성된 변형 에너지는 무시한다. 즉, 중심면에 수직인 응력 성분은 없다고 가정한다.

$$\mathbf{u} = \mathbf{y}_o - \mathbf{Y}_o + (z+e)(\mathbf{e}_3 - \mathbf{E}_3) \quad (5)$$

$$= \mathbf{v}_o + (z+e) \mathbf{a} \quad (6)$$

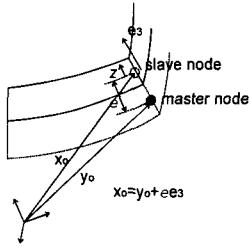


Fig. 2 Kinematics of the eccentric shell

셀의 운동학적 가정에 따라 변형전 및 변형후의 임의의 점의 위치 벡터는 중심면의 절점과 방향 벡터(director)로써 정해 진다.

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_o + z\mathbf{E}_3 \quad (1)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_o + z\mathbf{e}_3 \quad (2)$$

여기서 z 는 셀 두께를 따르는 좌표를, 하첨자 'o'는 셀의 중심면에서의 값을, \mathbf{E}_3 와 \mathbf{e}_3 는 각각 변형전 및 변형후의 절점의 방향 벡터를 의미한다.

단면의 편심을 고려하기 위해 Fig. 2에서 보는 바와 같이 편심 셀과 마스터 셀(master shell)이 하나의 복합된 셀(combined shell)을 이룬다고 가정하면 앞에서의 셀의 기본적인 가정에 따라 편심 셀 내부의 임의의 위치는 마스터 셀의 자유도를 이용하여 나타낼 수 있다. 즉, 편심 셀은 다음의 가정을 따른다. 첫번째는 셀 단면의 크기가 길이나 폭에 비해 작으므로 편심된 요소의 중심면의 변위는 마스터 셀의 중심면의 변위로 선형 근사할 수 있다는 가정이고, 두번째는 편심 셀과 마스터 셀은 완전히 결합되어 있다는 가정이다. 단, 여기서의 마스터 셀은 가상적인 것으로써 반드시 있어야 할 필요는 없다. 따라서 e 를 편심량이라 하면 변형 전 및 변형 후의 위치 벡터는 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y}_o + (z+e) \mathbf{E}_3 \quad (3)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{y}_o + (z+e) \mathbf{e}_3 \quad (4)$$

여기서 \mathbf{Y}_o 및 \mathbf{y}_o 는 마스터 셀의 절점까지의 위치 벡터이다.

식 (1)~식 (4)로부터 편심 셀 요소의 변위장은 다음과 같다.

2.2 유한 회전의 기술

요소의 변위장인 식 (6)으로부터 셀의 변형은 절점의 병진 변위 \mathbf{v}_o 와 방향 벡터의 변화를 의미하는 벡터 \mathbf{a} 로 나타낼 수 있다. 셀과 같은 구조 요소의 경우 회전 자유도가 있는 것이 편리하므로 \mathbf{a} 는 병진 변위로 나타낼 수 있어도 회전 자유도에 의한 강제 회전으로 나타내는 것이 더 자연스럽다. 또한 좌굴 해석과 같은 기하학적 비선형 해석의 경우 강제 회전은 미소하다고 가정할 수 없으므로 \mathbf{a} 는 3차원 상에서의 유한 회전 \mathbf{R} 을 통해 나타내어야만 한다. 여기서 \mathbf{R} 은 회전 벡터(rotational vector)를 ψ 라 할 때 Rodrigues의 식에 의해 다음과 같이 표현된다.⁽¹¹⁾

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{\sin \psi}{\psi} \tilde{\psi} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \psi}{\psi} \right)^2 \tilde{\psi}^2 \quad (7)$$

여기서 \mathbf{I} 은 단위 행렬을 나타내고, $\tilde{\psi}$ 는 회전 벡터 ψ 에 대한 스킴대칭 텐서(skew symmetric tensor)를 의미한다. 또한, $\psi = \sqrt{\psi \cdot \psi}$ 이다.

절힌 구조를 해석하기 위하여 각 절점에서 다음과 같이 회전 행렬 \mathbf{R}_o 를 이용하여 국지 좌표계를 정의할 수 있다. 여기서 $[\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}]$ 는 국지 좌표계를 나타내는 방향 여현 행렬이고 $\mathbf{R}, \mathbf{E} = \{0 \ 0 \ 1\}^T$ 그리고 \mathbf{e} 는 다음과 같이 각각 국지 좌표계에서 본 회전 행렬, 변형전 방향 벡터 그리고 변형후 방향 벡터를 나타낸다.

$$\mathbf{R}_o = [\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}] \quad (8)$$

$$\mathbf{R}_o \mathbf{E} = \mathbf{E}_3 \quad (9)$$

$$\mathbf{R}_o \mathbf{e} = \mathbf{e}_3 \quad (10)$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{R} \mathbf{E} \quad (11)$$

식 (11)의 국지 좌표계에 대한 방향 벡터의 변분은 다음과 같이 나타낼 수 있다.⁽¹¹⁾

$$\delta \mathbf{e} = \delta \mathbf{R} \mathbf{E} \quad (12)$$

$$= \mathbf{R} \delta \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{E} \quad (13)$$

여기서, θ 는 국지 좌표계에서의 회전 자유도 벡터이고 방향 벡터 방향의 성분은 없으므로 이것의 전체 좌표계로의 변환은 다음의 행렬 $\bar{\mathbf{R}}_o$ 를 이용한다.

$$\bar{\mathbf{R}}_o = [\hat{x}, \hat{y}, 0] \quad (14)$$

$$\delta \mathbf{e}_3 = -\mathbf{R}_o \bar{\mathbf{R}}_o' \delta \theta_g \quad (15)$$

여기서 θ_g 는 전체 좌표계에서의 회전 자유도 벡터이다. 따라서 절점 I에서 식 (15)의 유한 요소로 근사된 형태는,

$$\delta \mathbf{e}_3' = \mathbf{A}' \delta \theta_g' \quad (\text{no sum on I}) \quad (16)$$

여기서 $\mathbf{A}' = [-\mathbf{R}_o \bar{\mathbf{R}}_o']_{\text{at node I}}$ 이다.

또한 기하 강성 행렬을 얻기 위해 식 (13)를 증분 회전 자유도 $\Delta \theta$ 에 대해 선형화 시켜보면,

$$\Delta \delta \mathbf{e}_3 = \mathbf{R} \Delta \tilde{\theta} \tilde{\mathbf{E}} \quad (17)$$

$$= -\mathbf{R} \mathbf{E} (\tilde{\theta} \cdot \Delta \theta) \quad (18)$$

식 (18)을 식 (15)과 같이 전체 좌표계로 나타내고, 여기에 임의의 벡터 \mathbf{x} 를 내적하면,

$$\mathbf{x} \cdot \Delta \delta \mathbf{e}_3 = \delta \theta_g' \cdot [-(\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_3) \bar{\mathbf{R}}_o \bar{\mathbf{R}}_o'] \Delta \theta_g \quad (19)$$

따라서 절점 I에서 식 (19)의 유한 요소로 근사된 형태는,

$$[\mathbf{x} \cdot \Delta \delta \mathbf{e}_3]' = \delta \theta_g' \cdot \mathbf{T}'(\mathbf{x}) \Delta \theta_g' \quad (\text{no sum on I}) \quad (20)$$

여기서 $\mathbf{T}'(\mathbf{x}) = [-(\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_3) \bar{\mathbf{R}}_o \bar{\mathbf{R}}_o']_{\text{at node I}}$ 이다.

2.3 변형률의 정의

임의의 점의 위치벡터 \mathbf{x} 와 변위 벡터 \mathbf{u} 를 자연 좌표 (ξ, η) 의 함수라 할 수 있으므로 변형 전과 변형 후의 코베리언트 기저 벡터는 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{G}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^\alpha} = \mathbf{e}_\alpha + z \mathbf{E}_{3,\alpha} \quad (21)$$

$$\mathbf{G}_3 = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \zeta} = \mathbf{E}_3 \quad (22)$$

$$\mathbf{g}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^\alpha} = \mathbf{e}_\alpha + z \mathbf{e}_{3,\alpha} \quad (23)$$

$$\mathbf{g}_3 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \zeta} = \mathbf{e}_3 \quad (24)$$

그리고 하첨자 쉼표의 α 해당 물리량의 ξ^α 방향 편미분을 의미한다. 위의 기저 벡터의 메트릭(metric)을 이용하여 코베리언트 Green 변형률은 다음과 같이 정의된다.

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta}) \quad (25)$$

$$\varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2}(g_{\alpha 3} - G_{\alpha 3}) \quad (26)$$

셀 요소는 특성상 다른 길이에 비하여 두께가 작다는 가정이 포함된다. 따라서 효율적인 수식화를 위해 식 (25)~식 (26)에서, 평면상의 변형률의 경우 z 의 2차 항을 무시하고, 두께 방향 전단 변형률의 경우 z 의 1차 항을 무시한다. 따라서 평면상의 변형률은 두께 방향으로 선형 분포되며, 두께 방향 전단 변형률은 일정한 값으로 분포된다. 또한 단면 합력을 이용하기 위해 평면상의 변형률을 막 변형률 항과 굽힘 변형률 항으로 나누면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = (\varepsilon_m)_{\alpha\beta} + z(\varepsilon_b)_{\alpha\beta} \quad (27)$$

여기서,

$$(\varepsilon_m)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_\alpha \cdot \mathbf{u}_{o,\beta} + \mathbf{E}_\beta \cdot \mathbf{u}_{o,\alpha} + \mathbf{u}_{o,\alpha} \cdot \mathbf{u}_{o,\beta}) \quad (28)$$

$$(\varepsilon_b)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_\alpha \cdot \mathbf{a}_{,\beta} + \mathbf{E}_\beta \cdot \mathbf{a}_{,\alpha} + \mathbf{E}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{u}_{o,\beta} + \mathbf{E}_{3,\beta} \cdot \mathbf{u}_{o,\alpha} + \mathbf{u}_{o,\alpha} \cdot \mathbf{a}_{,\beta} + \mathbf{u}_{o,\beta} \cdot \mathbf{a}_{,\alpha}) \quad (29)$$

또한 두께 방향 전단 변형률은,

$$(\varepsilon_s)_{\alpha 3} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_\alpha \cdot \mathbf{a} + \mathbf{u}_{o,\alpha} \cdot \mathbf{e}_3) \quad (30)$$

위의 변형률을 마스터 요소의 자유도로 나타내면 다음과 같다.

$$(\varepsilon_m)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_\alpha \cdot \mathbf{v}_{o,\beta} + \mathbf{E}_\beta \cdot \mathbf{v}_{o,\alpha} + \mathbf{v}_{o,\alpha} \cdot \mathbf{v}_{o,\beta} + \frac{1}{2}e(\mathbf{E}_\alpha \cdot \mathbf{a}_{,\beta} + \mathbf{E}_\beta \cdot \mathbf{a}_{,\alpha} + \mathbf{v}_{o,\alpha} \cdot \mathbf{a}_{,\beta} + \mathbf{v}_{o,\beta} \cdot \mathbf{a}_{,\alpha}) + \frac{1}{2}e^2 \mathbf{a}_{,\alpha} \cdot \mathbf{a}_{,\beta}) \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
 (\epsilon_b)_{\alpha\beta} = & \frac{1}{2}(\mathbf{E}_\alpha \cdot \mathbf{a}_{,\beta} + \mathbf{E}_\beta \cdot \mathbf{a}_{,\alpha} + \mathbf{E}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{v}_{o,\beta} + \mathbf{E}_{3,\beta} \cdot \mathbf{v}_{o,\alpha} \\
 & + \mathbf{v}_{o,\alpha} \cdot \mathbf{a}_{,\beta} + \mathbf{v}_{o,\beta} \cdot \mathbf{a}_{,\alpha}) \quad (32) \\
 & + \frac{1}{2}e(\mathbf{E}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}_{,\beta} + \mathbf{E}_{3,\beta} \cdot \mathbf{a}_{,\alpha} + 2\mathbf{a}_{,\alpha} \cdot \mathbf{a}_{,\beta})
 \end{aligned}$$

$$(\epsilon_s)_{\alpha 3} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_\alpha \cdot \mathbf{a} + \mathbf{v}_{o,\alpha} \cdot \mathbf{e}_3 + e\mathbf{a}_{,\alpha} \cdot \mathbf{e}_3) \quad (33)$$

2.4 유한 요소 수식화

본 논문의 요소는 기하학적 비선형 정식화를 위해 total Lagrangian 방법을 사용한다. 이 경우 외력에 의한 가상 일을 δW 라 하면 가상 일의 정리는 다음과 같이 표현된다.

$$\int_{\Omega} S^y \delta \epsilon_y dV_o - \delta W = 0 \quad (34)$$

여기서 S^y 는 2nd Piola Kirchhoff 응력 \mathbf{S} 의 콘트라베리언트(contravariant) 성분이며 $\delta \epsilon_y$ 는 virtual Green 변형률 $\delta \mathbf{E}$ 의 코베리언트 성분이다.

효율적인 수식화를 위하여 셀 두께 방향에 작용하는 단면 합력을 정의하면 다음과 같다.

$$\mathbf{N} = \int \{ S^{11} \ S^{22} \ S^{12} \}^t dz \quad (35)$$

$$\mathbf{M} = \int z \{ S^{11} \ S^{22} \ S^{12} \}^t dz \quad (36)$$

$$\mathbf{Q} = \int \{ S^{13} \ S^{23} \}^t dz \quad (37)$$

여기서, \mathbf{N} , \mathbf{M} 그리고 \mathbf{Q} 는 각각 막 합력, 굽힘 모멘트 그리고 두께 방향 전단 합력이다. 식 (35)~식 (37)을 이용하여 식 (34)을 나타내면 다음과 같다.

$$\int_{\Omega} (\mathbf{N} \cdot \delta \epsilon_m + \mathbf{M} \cdot \delta \epsilon_b + \mathbf{Q} \cdot \delta \epsilon_s) dA_o - \delta W = 0 \quad (38)$$

여기서 $\delta \epsilon_m$, $\delta \epsilon_b$ 그리고 $\delta \epsilon_s$ 는 각각 막 변형률 벡터, 굽힘 변형률 벡터 그리고 두께 방향 전단 변형률 벡터의 변분이고 각각의 벡터는 다음과 같이 정의된다.

$$\epsilon_m = \{ (\epsilon_m)_{11} \ (\epsilon_m)_{22} \ 2(\epsilon_m)_{12} \}^t \quad (39)$$

$$\epsilon_b = \{ (\epsilon_b)_{11} \ (\epsilon_b)_{22} \ 2(\epsilon_b)_{12} \}^t \quad (40)$$

$$\epsilon_s = \{ 2(\epsilon_s)_{13} \ 2(\epsilon_s)_{23} \}^t \quad (41)$$

식 (38)을 선형화 함으로써 유한 요소 행렬식을 유도할 수 있다. 이것은 합력 성분의

선형화에 의한 재료 강성 행렬(material tangent stiffness)과 변형률 성분의 선형화에 의한 기하 강성 행렬(geometric tangent stiffness)로 나누어 지는데, 재료 강성 행렬을 얻기 위한 구성 방정식은 다음과 같다.

$$\delta \mathbf{N} = \left[\int_{\Omega} \mathbf{C}_o dz \right] \delta \epsilon_m + \left[\int_{\Omega} z \mathbf{C}_o dz \right] \delta \epsilon_b \quad (42)$$

$$\delta \mathbf{M} = \left[\int_{\Omega} z \mathbf{C}_o dz \right] \delta \epsilon_m + \left[\int_{\Omega} z^2 \mathbf{C}_o dz \right] \delta \epsilon_b \quad (43)$$

$$\delta \mathbf{Q} = \left[\int_{\Omega} \mathbf{C}_s dz \right] \delta \epsilon_s \quad (44)$$

셀의 기본적인 가정에 따라 방향 벡터 방향의 응력은 무시된다($S^{33} = 0$). 따라서 재료 텐서 \mathbf{C}_o 와 \mathbf{C}_s 는 평면 응력 상태의 등방성 재료 구성 방정식으로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{C}_o = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} G^{11}G^{11} & \nu G^{11}G^{22} + (1-\nu)G^{12}G^{12} & \\ & G^{22}G^{22} & \\ \text{symm.} & & \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$\mathbf{C}_s = \frac{E}{2K(1+\nu)} \begin{bmatrix} G^{11} & G^{12} \\ \text{symm.} & G^{22} \end{bmatrix} \quad (46)$$

여기서 E 는 탄성 계수(Young's modulus), ν 는 푸와송 비 그리고 K 는 전단 수정 계수로 $K=1.2$ 이다.

본 논문에서는 등방성 재료만 다루었으나 복합 적층 모델의 해석을 위한 직교 이방성 재료는 자연 좌표계와 국지 좌표계의 텐서 변환을 통해 구할 수 있다.^(10,12)

변형률-변위 관계 행렬을 \mathbf{B} 행렬로 정의하면, 막 변형률에 대해서는 식 (31)을, 굽힘 변형률에 대해서는 식 (32)을, 그리고 두께 방향 전단 변형률에 대해서는 식 (33)을 이용하여 구할 수 있다. 첨자 I 를 요소의 절점 번호라 하고 표준 형상 함수를 N_I 라 하면 요소의 절점 I 에 대응되는 변형률-변위 행렬은 다음과 같다.

$$(\mathbf{B}_m)_I = \begin{bmatrix} N_{I,1} \mathbf{e}'_1 & eN_{I,1} \mathbf{e}'_1 \mathbf{A}' \\ N_{I,2} \mathbf{e}'_2 & eN_{I,2} \mathbf{e}'_2 \mathbf{A}' \\ N_{I,1} \mathbf{e}'_2 + N_{I,2} \mathbf{e}'_1 & eN_{I,1} \mathbf{e}'_2 \mathbf{A}' + eN_{I,2} \mathbf{e}'_1 \mathbf{A}' \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$(\mathbf{B}_b)_I = \begin{bmatrix} N_{1,1}e'_{3,1} \\ N_{1,2}e'_{3,2} \\ N_{1,1}e'_{3,2} + N_{1,2}e'_{3,1} \\ N_{1,1}e'_1\mathbf{A}' + eN_{1,1}e'_{3,1}\mathbf{A}' \\ N_{1,2}e'_2\mathbf{A}' + eN_{1,2}e'_{3,2}\mathbf{A}' \\ N_{1,1}e'_2\mathbf{A}' + eN_{1,1}e'_{3,2}\mathbf{A}' + N_{1,2}e'_1\mathbf{A}' + eN_{1,2}e'_{3,1}\mathbf{A}' \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$(\mathbf{B}_s)_I = \begin{bmatrix} N_{1,2}e'_3 & N_{1,1}e'_2\mathbf{A}' + eN_{1,2}e'_3\mathbf{A}' \\ N_{1,1}e'_3 & N_{1,1}e'_2\mathbf{A}' + eN_{1,2}e'_3\mathbf{A}' \end{bmatrix} \quad (49)$$

변형률-변위 행렬인 식 (47)~식 (49)를 이용하여 가상 일인 식 (38)의 합력 성분을 선형화 함으로써 다음과 같이 강성 행렬의 재료 부분을 얻을 수 있다.

$$(\mathbf{K}_M)_{IJ} = \int_{A_0} \mathbf{B}'_I \mathbf{D} \mathbf{B}_J dA_0 \quad (50)$$

여기서, $\mathbf{B}_I = \begin{Bmatrix} (\mathbf{B}_m)_I \\ (\mathbf{B}_b)_I \\ (\mathbf{B}_s)_I \end{Bmatrix}$ 이고, 식 (50)에서 재료

상수를 나타내는 행렬 \mathbf{D} 는 식 (42)~식 (44)로부터 두께 방향으로 해석적으로 적분하여 사용 한다.

강성 행렬의 기하 부분은 가상일인 식 (38)의 변형률 부분을 선형화 함으로써 얻어질 수 있다. 이것은 편의상 막 변형률 항과 굽힘 변형률 항 그리고 두께 방향 전단 변형률 항으로 나누어 나타냈다. 막 변형률의 선형화로부터 나오는 기하 강성 행렬은 다음과 같다.

$$\int_{A_0} (\mathbf{N} \cdot \Delta \delta \boldsymbol{\varepsilon}_m) dA_0 = \sum_{I,J=1}^4 \{ \delta v_{ol}, \delta \theta_{gl} \}' (\mathbf{K}_m)_{IJ}^{geom} \begin{Bmatrix} \Delta v_{ol} \\ \Delta \theta_{gl} \end{Bmatrix} \quad (51)$$

여기서,

$$(\mathbf{K}_m)_{IJ}^{geom} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{vv}^m & \mathbf{K}_{v\theta}^m \\ \mathbf{K}_{\theta v}^m & \mathbf{K}_{\theta\theta}^m \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (52)$$

$$\mathbf{K}_{vv}^m = \begin{bmatrix} N_{11}N_{1,1}N_{J,1} + N_{22}N_{1,2}N_{J,2} \\ + N_{12}(N_{1,1}N_{J,2} + N_{1,2}N_{J,1}) \end{bmatrix} \mathbf{1} \quad (53)$$

$$\mathbf{K}_{v\theta}^m = e \begin{bmatrix} N_{11}N_{1,1}N_{J,1} + N_{22}N_{1,2}N_{J,2} \\ + N_{12}(N_{1,1}N_{J,2} + N_{1,2}N_{J,1}) \end{bmatrix} \mathbf{A}' \quad (54)$$

$$\mathbf{K}_{\theta v}^m = e \begin{bmatrix} N_{11}N_{1,1}N_{J,1} + N_{22}N_{1,2}N_{J,2} \\ + N_{12}(N_{1,1}N_{J,2} + N_{1,2}N_{J,1}) \end{bmatrix} \mathbf{A}' \quad (55)$$

$$\mathbf{K}_{\theta\theta}^m = e^2 \begin{bmatrix} N_{11}N_{1,1}N_{J,1} + N_{22}N_{1,2}N_{J,2} \\ + N_{12}(N_{1,1}N_{J,2} + N_{1,2}N_{J,1}) \end{bmatrix} \mathbf{A}' \mathbf{A}' + e \delta_{IJ} (N_{11}N_{1,1} + N_{12}N_{1,2}) \mathbf{T}'(\mathbf{e}_1) + e \delta_{IJ} (N_{22}N_{1,2} + N_{12}N_{1,1}) \mathbf{T}'(\mathbf{e}_2) \quad (56)$$

굽힘 변형률의 선형화로부터 나오는 기하 강성 행렬은 다음과 같다.

$$\int_{A_0} (\mathbf{M} \cdot \Delta \delta \boldsymbol{\varepsilon}_b) dA_0 = \sum_{I,J=1}^4 \{ \delta v_{ol}, \delta \theta_{gl} \}' (\mathbf{K}_b)_{IJ}^{geom} \begin{Bmatrix} \Delta v_{ol} \\ \Delta \theta_{gl} \end{Bmatrix} \quad (57)$$

여기서,

$$(\mathbf{K}_b)_{IJ}^{geom} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K}_{v\theta}^b \\ \mathbf{K}_{\theta v}^b & \mathbf{K}_{\theta\theta}^b \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (58)$$

$$\mathbf{K}_{v\theta}^b = \begin{bmatrix} M_{11}N_{1,1}N_{J,1} + M_{22}N_{1,2}N_{J,2} \\ + M_{12}(N_{1,1}N_{J,2} + N_{1,2}N_{J,1}) \end{bmatrix} \mathbf{A}' \quad (59)$$

$$\mathbf{K}_{\theta v}^b = \begin{bmatrix} M_{11}N_{1,1}N_{J,1} + M_{22}N_{1,2}N_{J,2} \\ + M_{12}(N_{1,1}N_{J,2} + N_{1,2}N_{J,1}) \end{bmatrix} \mathbf{A}' \quad (60)$$

$$\mathbf{K}_{\theta\theta}^b = 2e \begin{bmatrix} M_{11}N_{1,1}N_{J,1} + M_{22}N_{1,2}N_{J,2} \\ + M_{12}(N_{1,1}N_{J,2} + N_{1,2}N_{J,1}) \end{bmatrix} \mathbf{A}' \mathbf{A}' + \delta_{IJ} M_{11} N_{1,1} \mathbf{T}'(\mathbf{e}_1 + e \mathbf{e}_{3,1}) + \delta_{IJ} M_{22} N_{1,2} \mathbf{T}'(\mathbf{e}_2 + e \mathbf{e}_{3,2}) \quad (61)$$

두께 방향 전단 변형률의 선형화로부터 나오는 기하 강성 행렬은 다음과 같다.

$$\int_{A_0} (\mathbf{Q} \cdot \Delta \delta \boldsymbol{\varepsilon}_s) dA_0 = \sum_{I,J=1}^4 \{ \delta v_{ol}, \delta \theta_{gl} \}' (\mathbf{K}_s)_{IJ}^{geom} \begin{Bmatrix} \Delta v_{ol} \\ \Delta \theta_{gl} \end{Bmatrix} \quad (62)$$

여기서,

$$(\mathbf{K}_s)_{IJ}^{geom} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K}_{v\theta}^s \\ \mathbf{K}_{\theta v}^s & \mathbf{K}_{\theta\theta}^s \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (63)$$

$$\mathbf{K}_{v\theta}^s = [Q_{23}N_{1,2}N_J + Q_{13}N_{1,1}N_J] \mathbf{A}' \quad (64)$$

$$\mathbf{K}_{\theta v}^s = [Q_{23}N_J N_{J,2} + Q_{13}N_J N_{J,1}] \mathbf{A}' \quad (65)$$

$$\mathbf{K}_{\theta\theta}^s = e [Q_{23}(N_1 N_{J,2} + N_{1,2} N_J)] \mathbf{A}' \mathbf{A}' + e [Q_{13}(N_1 N_{J,1} + N_{1,1} N_J)] \mathbf{A}' \mathbf{A}' + \delta_{IJ} Q_{23} N_1 \mathbf{T}'(\mathbf{e}_2) + \delta_{IJ} Q_{23} N_{1,2} \mathbf{T}'(e \mathbf{e}_3) + \delta_{IJ} Q_{13} N_1 \mathbf{T}'(\mathbf{e}_1) + \delta_{IJ} Q_{13} N_{1,1} \mathbf{T}'(e \mathbf{e}_3) \quad (66)$$

식 (47)~식 (49)에 의해 구성되는 셀 요소는 두께 방향 전단 변형 구속 현상을 보인다. 본 논문에서는 두께 방향 전단 변형 구속을 제거하기 위하여 대체 변형률법⁽¹³⁾을 이용하였다. 이것은 가정된 변위장에 의해 구성된 두께 방향 전단 변형률장 보다 낮은 차수의 변형률장을 가정하여 두께 방향 전단 강성 행렬의 계산시 사용하는 방법으로 Fig. 3의 선택 점(sampling points)을 이용하여 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$(\epsilon_s)_{13} = \frac{1}{2}(1-\eta)(\epsilon_s)_{13}^A + \frac{1}{2}(1+\eta)(\epsilon_s)_{13}^C \quad (67)$$

$$(\epsilon_s)_{23} = \frac{1}{2}(1-\xi)(\epsilon_s)_{23}^D + \frac{1}{2}(1+\xi)(\epsilon_s)_{23}^B \quad (68)$$

보통의 4절점 요소는 막 거동 성능이 좋지 않으므로 타당한 결과를 얻기 위해서는 상당히 조밀한 체눈(mesh)을 구성해야 한다. 막 변형 성능을 개선시키기 위해 비적합 변위형과 같이 자유도를 추가하는 등의 방법 등은 잘 알려진 방법이나 본 논문에서는 참고문헌⁽¹⁴⁾의 막 변형률에 대한 대체 변형률법을 이용하여 체눈에 대한 요소의 수렴 성능을 향상시켰다. 대체 변형률법은 요소의 성능 개선을 위한 계산 노력이 다른 방법에 비하여 매우 적으므로 경제성이 중요한 비선형 해석에서 더욱 유용하다. 식 (31)의 막 변형률은 다음과 같이 대체된다.

$$(\epsilon_m)_{11} = \frac{1}{2}(1-\eta)(\epsilon_m)_{11}^A + \frac{1}{2}(1+\eta)(\epsilon_m)_{11}^C \quad (69)$$

$$(\epsilon_m)_{22} = \frac{1}{2}(1-\xi)(\epsilon_m)_{22}^D + \frac{1}{2}(1+\xi)(\epsilon_m)_{22}^B \quad (70)$$

$$(\epsilon_m)_{12} = \frac{1}{4}((\epsilon_m)_{12}^A + (\epsilon_m)_{12}^B + (\epsilon_m)_{12}^C + (\epsilon_m)_{12}^D) \quad (71)$$

3. 수치 예제 및 고찰

3.1 이중 T형 외팔 보의 처짐 해석

Voros⁽¹⁵⁾의 문헌에 있는 이중 T형 단면을 갖는 외팔 보의 선형 정적 처짐 해석을 수행하였다. 해석 대상은 Fig. 4과 같이 한쪽 끝 단이 고정 지지 된 길이 $L=14.4m$ 인 외팔 보로써 단면은 웨브(web)의 높이 $h=1.13m$, 웨브의 두께 $t_w=0.3m$ 그리고 평판의 두께 $t_h=0.14m$ 의 형상을 갖고 있다. 한쪽의 T형 웨브의 끝에 집중 하중 $F=1000N$ 이 작용하고 있으며 재료 상수는 탄성

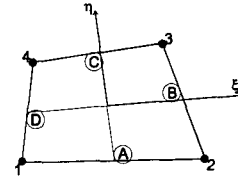


Fig. 3 Sampling Points

계수 $E=210,000Pa$, 푸와송 비 $\nu=0.15$ 이다.

위와 같이 웨브가 있는 형상을 셀 요소를 이용하여 해석하기 위해서는 보통은 Fig. 5(b)와 같은 해석 모델을 구성하게 된다. 본 논문에서는 이런 방법을 일반 셀 모델이라 지칭하였다. 그러나 이 경우 웨브의 높이가 실제보다 작아지게 되므로 굽힘 강성 또한 작아지고 따라서 Fig. 5(c)와 같이 웨브의 높이를 셀 요소가 중첩된 만큼($t_h/2$) 더해 주는 것이 필요하다. 이 방법을 보정 셀 방법이라 하였다. Fig. 5(d)는 본 논문의 편심 셀을 사용한 해석 모델을 나타내었다.

해석 체눈으로서 그림에서 L , h 그리고 w 방향에 대해 각각 $(4 \times 2 \times 2)$ 과 $(8 \times 4 \times 4)$ 을 선택하였다. 하중 작용점의 변위를 Table 1(a)에 나타내었고 참고 해로써 비적합 변위형이 추가된 8절점 고체 요소를 이용한 해석 결과를 Table 1(b)에 나타내었다. 일반 셀 방법은 유연한 쪽으로 비교적 큰 오차를 줄을 알 수 있다. 보정 셀과 편심 셀의 경우는 고체 요소의 결과와 비슷하고 특히 편심 셀이 가장 근접한 결과를 줌으로써 편심 셀은 단면의 특성을 잘 묘사한다고 볼 수 있다.

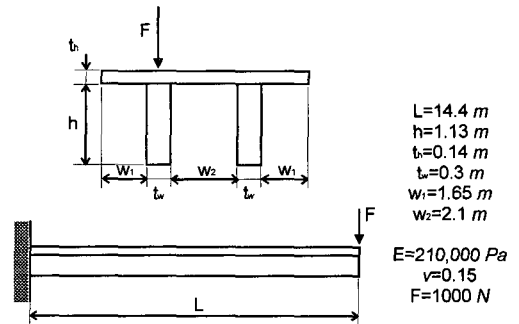


Fig. 4 Cantilever beam with double T section

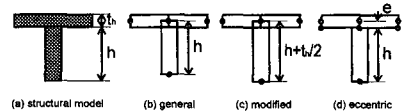


Fig. 5 Web modeling with shell element

Table 1 Tip Displacement

(a) Shell element			
Mesh density $N_f \times (2N_{w1} + N_{w2}) \times N_h$	General	Compensated	Eccentric
4 2 2 2	0.003159	0.002737	0.002775
8 4 4 4	0.003246	0.002812	0.002853
(b) Solid element			
Mesh density $N_f \times (2(N_{w1} \times N_h) + (N_{w2} \times N_{fb})) \times (N_h \times N_w)$	Solid element		
4 2 1 2 1 2 1	0.002707		
8 4 2 4 2 4 2	0.002835		
16 8 4 8 4 8 4	0.002880		

3.2 편심 하중이 작용하는 U 단면의 기둥

Fig. 6은 한쪽이 고정 지지된 U 단면 기둥에 편심 하중이 작용하는 문제이다. 기둥의 형상은 그림과 같이 웨브의 두께 $t_1=0.4106in$, 웨브의 너비 $w=4.867in$, 플랜지(flange)의 두께 $t_2=0.3012in$ 그리고 플랜지의 높이 $h=1.8494in$ 이다. 기둥의 길이는 $L=60in$ 이고 웨브의 끝단에서 하중 $F=4000lb$ 가 압축력으로 작용하고 있다. 기둥의 재료 상수는 탄성 계수 $E=30 \times 10^6 psi$ 이고 푸와송 비 $\nu=0.3$ 이다.

단면의 형상을 정확히 묘사하기 위하여 Fig. 7와 같이 단면에서 9개의 요소에 대한 마스터 절점을 적절히 편심시켜 위치시켰다. 또한 길이 방향으로서는 각각 8과 16개로 등분하여 해석하였다. 해석은 기하학적 비선형 해석으로 하중을 2단계로 나누어 가해주었다.

변형 형상을 Fig. 7에 나타내고, Fig. 6의 u 방향 변위를 참고문헌⁽¹⁶⁾의 Euler 기둥의 식에 의한 해와 비교하여 Table 2에 나타내었다. Euler 기둥의 식은 다음과 같다.

$$u = e \left[\sec \left(L \sqrt{\frac{F}{EI}} \right) - 1 \right] \quad (72)$$

선형 해석과 달리 비선형 해석의 경우 하중의 편심으로 유발되는 굽힘 효과는 변형이 진행될수록 커지므로 단면의 편심을 정확히 예측하지 못하면 비교적 큰 오차가 유발된다. 결과로부터 제안된 방법은 강체 보 요소를 추가하는 등의 다른 부가적인 방법 없이 보강 부재의 단면 형상을 정확히 반영하고 편심 하중을 그대로 고려할 수 있음을 알 수 있다.

Table 2 Lateral displacement of U-section column

Exact $u=0.1264$	
Mesh density in length	Normalize result
8	0.991
16	1.000

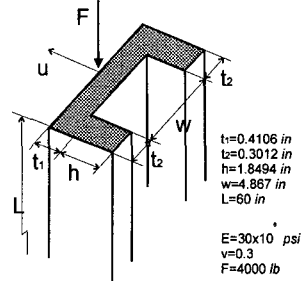


Fig. 6 Euler's column with U-section

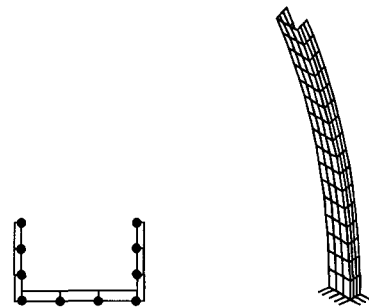


Fig. 7 Section modeling and deformed shape

3.3 L형 보강 부재로 보강된 평판

Fig. 8과 같이 L형 보강 부재로 보강된 평판이 축 압축 하중을 받아 좌굴에 이르는 문제를 해석하였다. 평판의 형상은 그림으로부터, 길이 $0.240m$, 너비 $0.120m$ 이고 두께 $0.00125m$ 이다. 평판과 같은 두께를 갖는 L 형의 보강 부재는 너비와 높이가 각각 $0.016m$ 이다. 평판의 재료는 알루미늄으로써 탄성 계수 $E=70GPa$ 이고 푸와송 비 $\nu=0.33$ 이다.

하중은 양 끝 단이 모두 같은 변위로 줄어드는 압축 하중을 받는다고 가정한 후 유효 단면적을 이용한 일반 셀 요소의 방법과 본 논문에서 제안한 편심 셀 요소를 사용하여 해석한 방법의 결과를 서로 비교하였다. 또한 각각의 모델을 ABAQUS로 해석하되 편심 셀을 모델링하기 위하여 Stifinger 등⁽¹⁰⁾의 방법과 같이 강체 보 요소를 이용하여 판과 보강 부재를 결합하는 방법을 따랐다.

유한 요소 모델은 Fig. 9과 같이 총 912개의 요소를 갖도록 구성하였으며 이것에 대하여

모든 방향으로 1/2배의 체적을 갖는 모델을 해석하여 수렴성을 검토하였다. 본 논문의 편심 셀을 이용한 해석과 ABAQUS의 강체 보 요소를 이용한 해석의 결과를 Fig. 10에 하중에 대한 하중 작용선의 변위로 나타내었다. 강체 보 요소를 이용한 ABAQUS의 결과가 약간 유연한 결과를 주는 경향이 있으나 비교적 잘 일치하고 있다. Fig. 11에 보강 부재의 편심을 고려한 모델과 이것을 무시한 모델 사이의 차이를 나타내었다. 편심을 무시한 결과는 편심을 고려한 결과에 비하여 좌굴 점에서의 하중은 약 5% 정도 큰 값이 얻어지고, 하중 방향 변위는 약 16% 정도 커짐을 볼 수 있다.

Fig. 12은 평판의 중심점(Fig. 9의 점 A)에서의 하중에 대한 면 외 방향 처짐 곡선이다. 여기서 주목할 만한 것은 편심을 고려한 모델과 무시한 모델과는 변형 형상이 틀리다는 것이다. Fig. 13에서와 같이 자유단의 중심점(Fig. 8의 점B)에서의 하중에 대한 면 외 방향 처짐 곡선의 경우에도 비슷한 결과를 얻었다. 좌굴 하중에서의 변형 모습인 Fig. 9에서 두 모델의 변형 모드가 서로 틀림을 확인할 수 있다. 여기서 그림은 변위의 크기를 2배 확대하여 나타낸 것이다.

강체 보 요소를 이용하여 해석하는 경우는 추가적인 자유도와 계산 노력이 필요한 것은 물론이거니와 이것의 물성치에 따라서는 수치적으로 불안정한 결과를 줄 수도 있다는 사실을 감안하면 본 논문과 같이 요소 내에서 편심을 고려하는 방법이 수치적으로 경제적이고 강건한 방법임을 알 수 있다.

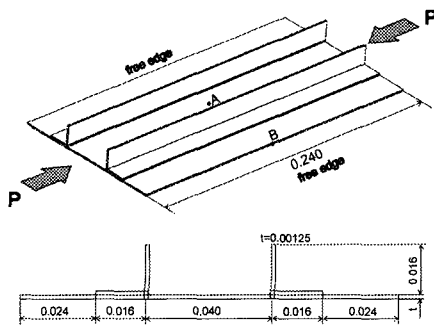


Fig. 8 Plate stiffened with L-type stiffeners

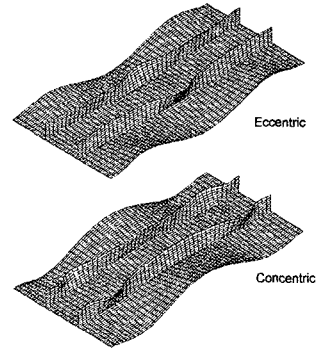


Fig. 9 Deformed Shape at Buckling Point

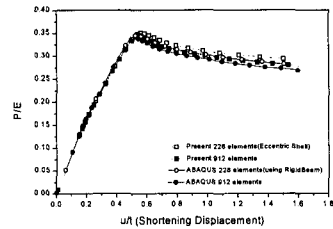


Fig. 10 Convergence test(Load-shortening curve)

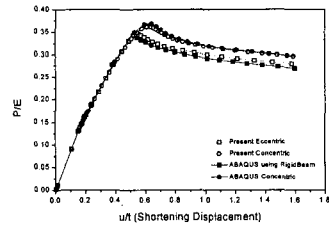


Fig. 11 Load-shortening curve

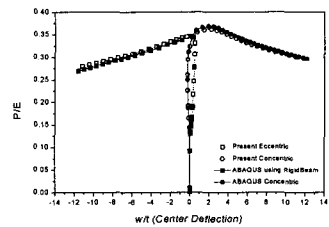


Fig. 12 Load-deflection curve at the point A

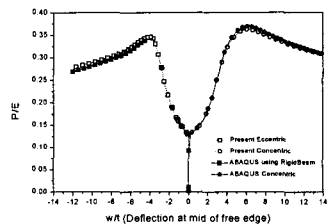


Fig. 13 Load-deflection curve at the point B

4. 결 론

보강된 구조물의 정확한 해석을 위하여 본 연구에서는 쉘 해석에서의 단면 편심에 대한 연구를 시도하여 요소 수준에서 편심이 고려되는 기하학적 비선형 편심 응축 쉘 요소를 개발하였다.

요소의 편심을 고려하기 위하여 편심 쉘과 마스터 쉘이 하나의 복합된 쉘을 이룬다고 가정하였고, 직선 단면이 직선을 유지한다는 응축 쉘의 기본적인 가정과 대회전을 처리하는 방법에 일관 되도록 수식을 전개 하였다. 따라서 편심 쉘 요소 내부의 임의 절점의 위치는 마스터 쉘의 자유도로써 나타낼 수 있다.

자연 좌표계상에서 구성된 가상일로부터 내력 벡터와 강성 행렬을 유도하였다. 결과로 얻어지는 강성 행렬은 막 변형 구속 현상과 두께 방향 전단 변형 구속 현상이 나타나게 되고 이것은 해석 체눈을 세분화 시켜야 한다는 것을 의미하므로 비선형에서의 효율성을 위해 대체 변형률법을 도입하여 체눈에 대한 수렴성을 향상시켰다.

수치 예제로써 선형 탄성 문제, 해석 해가 있는 오일러 기둥의 해석 그리고 L형 보강 부재로 보강된 평판의 좌굴 해석을 통하여 본 논문에서 제안한 요소는 구조물의 단면 특성을 편리하고 정확하게 예측할 수 있음을 보였다. 특히 평판의 좌굴 문제에서는 두께가 다른 특성 길이에 비하여 매우 작더라도 보강 부재의 편심을 고려한 모델과 이것을 무시한 모델은 좌굴 하중의 크기는 물론이고 좌굴 모드도 서로 틀려짐을 확인할 수 있었다.

참고문헌

- (1) Boot, J. C. and Moore, D. B., 1988, "Stiffened Plates Subjected to Transverse Loading," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 24, No. 1, pp. 89~104.
- (2) Holopainen, T. P., 1995, "Finite Element Free Vibration Analysis of Eccentrically Stiffened Plates," *Computers & Structures*, Vol. 56, No. 6, pp. 993~1007.
- (3) Gruttmann, F., Sauer, R. and Wagner, W., 1998, "A Geometrical Nonlinear Eccentric 3D Beam Element with Arbitrary Cross Sections," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 160, pp. 383~400.
- (4) Jiang, W., Bao, G. and Roberts, J. C., 1997, "Finite Element Modelling of Stiffened and Unstiffened Orthotropic Plates," *Computers & Structures*, Vol. 63, No. 1, pp. 105~117.
- (5) Bushnell, D., 1987, "Theoretical Basis of the PANDA Computer Program for Preliminary Design of Stiffened Panels under Combined in-plane Loads," *Computers & Structures*, Vol. 27, No. 4, pp. 541~563.
- (6) Bushnell, D., 1987, "Nonlinear Equilibrium of Imperfect, Locally Deformed Stringer Stiffened Panels under Combined in-plane Load," *Computers & Structures*, Vol. 27, No. 4, pp. 519~539.
- (7) Bushnell, D., 1993, "Optimization of Composite, Stiffened, Imperfect Panels under Combined Loads for Service in the Post Buckling Regime," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 103, pp. 43~114.
- (8) Stiftinger, M. A., Skrna-Jakl, I. C. and Rammerstorfer, F. G., 1995, "Buckling and Postbuckling Investigations of Imperfect Curved Stringer-Stiffened Composite Shells. Part B: Computational Investigation," *Thin-Walled Structures*, Vol. 23, pp. 339~350.
- (9) Parish, H., 1991, "An Investigation of a Finite Rotation Four Node Assumed Strain Shell Element," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 31, pp. 127~150.
- (10) Brank, B., Peric, D. and Damjanic, F. B., 1995, "On Implementation of a Nonlinear Four Node Shell Finite Element for Thin Multilayered Elastic Shells," *Computational Mechanics*, Vol. 6, pp. 341~359.
- (11) Cardona, A. and Geradin, M., 1988, "A Beam Finite Element Nonlinear Theory with Finite Rotations," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 26, pp. 2404~2438.
- (12) Lee, S. J. and Kanok-Nukulchai, W., 1998, "A Nine-Node Assumed Strain Finite Element for Large Deformation Analysis of Laminated Shells," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 42, pp. 777~798.
- (13) Dvorkin, E. N. and Bathe, K. J., 1984, "A Continuum Mechanics Based Four Node Shell Element for General Nonlinear Analysis," *Engineering Computations*, Vol. 1, pp. 77~88.
- (14) Choi, C. K. and Paik, J. G., 1996, "An Efficient Four Node Degenerated Shell Element for Geometrically Nonlinear Analysis," *Thin-Walled Structures*, Vol. 24, pp. 261~283.
- (15) Voros, G. M., 1988, "A Special Purpose Element For Shell-Beam Systems," *Computers & Structures*, Vol. 29, No. 2, pp. 301~308.
- (16) Timoshenko, S. and MacCullough, G. H., 1940, *Elements of Strength of Materials*, Chap. XI, 2nd ed., D. Van Nostrand Company, INC. .