

충돌시 마찰을 고려한 구속 다물체계의 충돌해석

박정훈* · 유흥희** · 황요하***
(1999년 8월 30일 접수)

Dynamic Analysis of Constrained Multibody Systems Undergoing Collision with Friction

Jung Hun Park, Hong Hee Yoo and Yoha Hwang

Key Words: Collision(충돌), Impact(충격), Friction Force(마찰력), Stiction(고착), Coefficient of Restitution(반발계수), Static Coefficient of Friction(정적 마찰계수), Rigid Body(강체), Partial Velocity Matrix(편속도 행렬), Constrained Multibody Systems(구속 다물체계)

Abstract

This paper presents a new method for the dynamic analysis of constrained multibody systems undergoing abrupt collision with friction force. The proposed method considers stiction and sliding, which means zero and non-zero relative velocity at two contact points on the two colliding bodies respectively. When collision occurs, friction force at collision affects not only lateral motion but also vertical motion on the contact plane. Three numerical examples are given to show the effects of friction force at the collision between two rigid bodies.

1. 서론

두 물체의 충돌시 짧은 시간 동안에 매우 큰 충격력이 충돌하는 물체에 작용하며 짧은 시간에 속도와 각속도의 급격한 변화를 초래한다. 충돌은 차량간의 충돌, 야구 방망이와 야구공의 충돌 등 어렵지 않게 주위에서 흔히 볼 수 있는 현상이다. 두 물체의 충돌 후 물체의 속도변화와 같은 계의 거동은 충돌점이 형성하는 평면에 수직 방향으로 작용하는 충격력뿐만 아니라 접선방향으로 작용하는 마찰력에 의해 영향을 받는다.

두 물체가 충돌하는 경우에 대한 기존의 연구는 참고문헌 (1~5)에 나타나 있다. 강체 충돌의 경우 두 강체가 충돌하는 짧은 시간에 작용하는

충격력을 충격함수로⁽¹⁻⁴⁾ 사용하여 짧은 시간 간격에 대해 운동방정식을 적분하여 충돌하는 순간에서의 속도 변화량을 계산하였다. Haug 등과⁽²⁾ Park 등은⁽⁴⁾ 구속 다물체계의 충돌해석을 수행하였다. Haug 등은 구속 다물체계의 충돌시 마찰이 작용하지 않는 계의 충돌해석을 위해 일반좌표 분할법을 이용하여 구한 운동방정식을 적분하여 충돌에 의한 속도변화와 충격량을 계산하였다. 이 방법은 두 물체간의 충돌을 검사하기 위해 짧은 최대 적분시간 간격을 유지하거나 넓은 최대 적분시간 간격을 유지하면서 충돌발생 시 최대 적분시간 간격을 줄이는 방법을 사용하였다. 짧은 최대 적분시간 간격을 유지할 경우 계산상 효율성이 저하되고 넓은 최대 적분시간 간격을 유지하면서 충돌발생 시 최대 적분시간 간격을 줄이는 경우 적분 알고리즘이 복잡해진다. Park 등은 편속도행렬을⁽⁶⁾ 이용하여 운동방정식을 유도하고 충돌시 마찰이 작용하지 않는 경우에 대한 구속 다물체계의 충돌해석을 수행하였다. 이 방법은 넓은 최대 적분시간 간격을 유지함으로써 계산상 효율성을 높였고 Haug 등이 제안한

* 회원, 한양대학교 기계설계학과 대학원

** 회원, 한양대학교 기계공학부

E-mail : hhyoo@email.hanyang.ac.kr

TEL : (02)2290-0446 FAX : (02)2293-5070

*** 회원, 한국과학기술연구원 트라이볼로지 연구센터

복잡한 적분 알고리즘 대신 충돌 가능성이 큰 점들(4) 정의하고 이 점들간의 거리를 시간에 대해 내삽하여 충돌시간을 예측하였다. 또한 예측된 충돌시간에서 충돌점을 계산하기 위해 접촉 구속조건을 사용하는 대신 최적화 방법을 도입하여 충돌점을 구하는 해석 방법을 제안하였다. 이와 더불어 해석의 편의를 위해 두 물체가 충돌시 서로 간섭량을 계산하여 충격력을 선형 및 비선형 스프링으로 모델링하는(5) 경우가 있다. 이 경우 충돌에 의한 계의 속도 증분을 구하기 위한 별도의 계산이 필요 없다. 하지만 충돌지점과 충격력 크기의 정확한 계산이 어렵고 충돌하는 두 물체간의 반발계수(coefficient of restitution)를 고려하기 곤란한 단점을 지닌다. 기존의 연구를 통해 제안된 해석 방법들은 두 강체간의 충돌시 충돌점에 작용하는 마찰력에 의한 속도변화를 고려할 수 없다. 실제 충돌하는 계의 거동은 마찰에 의해 영향을 받는다. 충돌시 마찰력이 작용할 경우 충돌점에서의 상대속도가 0이 되는 고착(stiction)현상과(2,7) 상대속도가 발생하는 미끄럼 현상이 고려되어야 하고 이로 인해 해석의 번거로움이 야기된다.

본 연구에서는 Park 등에(6) 의해 제안된 다물체 동역학 해석방법을 이용하여 마찰력이 작용하는 경우에 대한 강체로 구성된 다물체계의 충돌 해석방법을 제시한다. 제안된 해석방법은 충돌 발생 시 고착현상과 미끄럼 현상에 의한 속도 증분치 계산, 수직방향 충격량 그리고 접선방향의 충격량을 계산한다. 세 개의 예제에 대해 충돌시 충돌점에 작용하는 마찰력이 고려될 경우 마찰력이 계의 거동에 미치는 영향을 보였다.

2. 본 론

2.1 충돌시 마찰을 고려한 속도증분치 계산

방정식 유도의 편의성을 위해 충격력에 의한 일반 작용력을 따로 고려하고 이를 편속도행렬을 이용한 동역학 해석방법에 적용하면 운동방정식은(4) 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} B^T M \\ \Phi_q \end{bmatrix} \ddot{q} = \begin{bmatrix} B^T (Q_N^C + Q_T^C + Q^0) \\ r \end{bmatrix} \quad (1)$$

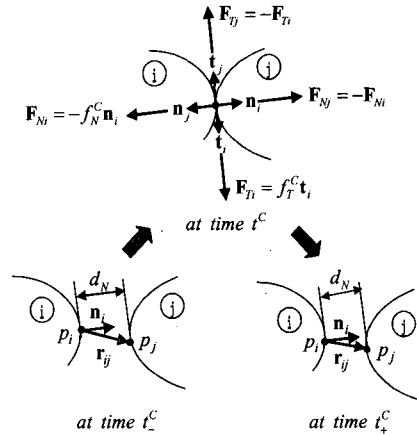


Fig. 1 Impact sequence between two bodies

위 식에서 B , M , \ddot{q} , Q_N^C , Q_T^C 그리고 Q^0 는 각각 편속도행렬, 질량행렬, 가속도, 두 강체간의 충돌점에서 수직방향 충격 하중에 의한 일반력 벡터, 충돌점에서 마찰력과 같은 접촉력에 의한 접선방향 충격하중에 의한 일반력벡터 그리고 충격하중을 제외한 외력에 의한 일반력 벡터를 나타낸다. 두 물체가 충돌하는 경우 충돌하는 두 강체상의 충돌점에 충격력이 작용한다. Fig. 1은 두 강체 i 와 j 가 충돌직전 시간 t^c , 충돌하는 순간에서의 시간 t^c , 그리고 충돌 직후의 시간 t_+^c 에서의 강체들을 보여준다. 그림에서 점 P_i 와 P_j 는 각각 강체 i 와 강체 j 상의 충돌점을 의미하고 f_N^C 와 f_T^C 는 각각 두 강체에 작용하는 수직방향과 접선방향 충격하중을 의미한다. n_i 와 n_j 는 각각 충돌하는 순간 두 강체상의 충돌점 P_i 와 P_j 가 형성하는 접평면에 수직인 단위벡터를 나타내고 두 강체가 충돌하는 순간 두 물체가 접촉하게 되므로 수직인 두 벡터 n_i 와 n_j 는 서로 평행해야(4) 한다. t_i 와 t_j 는 충돌시 충돌점 P_i 와 P_j 가 형성하는 접평면에 평행한 접선 단위벡터를 의미한다. r_{ij} 는 점 P_i 에 대한 점 P_j 의 상대 위치벡터를 나타내고 d_N 은 r_{ij} 와 n_i 의 내적(dot product)을 의미한다. Fig. 1에 보여진 바와 같이 두 강체가 서로 충돌

할 경우 점 P_i 와 점 P_j 에 가해지는 충격력은 크기는 동일하고 작용방향은 반대가 된다. 두 강체상의 충돌점 P_i 와 P_j 에 작용하는 수직방향 충격하중을 각각 F_{Ni} , F_{Nj} 라 하면 F_{Ni} 와 F_{Nj} 는 다음과 같이 표현된다.

$$F_{Ni} = -n_j f_N^C \quad (2)$$

$$F_{Nj} = -F_{Ni} \quad (3)$$

시간 t^C 에서 두 강체가 서로 충돌할 경우 충격력 f_N^C 는 다음과 같이 충격함수 $\delta(t-t^C)$ 로 표현될 수 있다.

$$f_N^C = p_N^C \delta(t-t^C) \quad (4)$$

여기서 p_N^C 는 두 강체 i 와 j 상의 충돌점에서 수직방향으로 가해진 충격량의 크기를 나타낸다. 두 강체 i 와 j 상의 충돌점 P_i 와 P_j 에 작용하는 접선방향 충격하중을 각각 F_{Ti} , F_{Tj} 라 하면 F_{Ti} , F_{Tj} 는 다음과 같이 표현된다.

$$F_{Ti} = t_j f_T^C \quad (5)$$

$$F_{Tj} = -F_{Ti} \quad (6)$$

여기서

$$t_i = \frac{\dot{r}_{ij} - v_n n_i}{|\dot{r}_{ij} - v_n n_i|} \quad (7)$$

$$v_n \equiv n_i^T \dot{r}_{ij} \quad (8)$$

위 식에서 시간 t^C 에서 두 강체가 서로 충돌할 경우 접선방향 충격력 f_T^C 는 다음과 같이 충격함수 $\delta(t-t^C)$ 로 표현될 수 있다.

$$f_T^C = p_T^C \delta(t-t^C) \quad (9)$$

여기서 p_T^C 는 두 강체 i 와 j 상의 접촉점에서 접선방향 접촉력에 의한 충격량을 나타내고 마찰

력이 작용할 경우 p_T^C 는 다음과 같이 계산된다.

$$p_T^C = \mu p_N^C \frac{v_T}{|v_T|} \quad (10)$$

여기서

$$v_T \equiv t_i^T \dot{r}_{ij} \quad (11)$$

수직방향 충격하중 F_{Ni} , F_{Nj} 와 접선방향 충격하중 F_{Ti} , F_{Tj} 에 의한 일반력벡터 Q_N^C , Q_T^C 는 가상일원리에 의해 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \delta W &= \delta r_{P_i}^T F_{P_i}^C + \delta r_{P_j}^T F_{P_j}^C \\ &+ \delta r_{P_i}^T F_{P_i}^C + \delta r_{P_j}^T F_{P_j}^C \\ &= \delta q^T (Q_N^C + Q_T^C) \end{aligned} \quad (12)$$

여기서

$$Q_N^C = (d_N^q)^T f_N^C \quad (13)$$

$$Q_T^C = -(d_T^q)^T f_T^C \quad (14)$$

$$d_N^q \equiv n_i^T (r_{ij})_q \quad (15)$$

$$d_T^q \equiv t_i^T (r_{ij})_q \quad (16)$$

$$(r_{ij})_q \equiv \frac{\partial r_{ij}}{\partial q} \quad (17)$$

위 식들에서 r_{P_i} , r_{P_j} 그리고 r_{ij} 는 각각 점 P_i 와 점 P_j 의 위치벡터와 점 P_i 로부터 점 P_j 로의 위치벡터를 의미한다. 계의 속도 변화량은 식 (1)을 적분해 구할 수 있다. 먼저 식 (1)의 좌변 첫째 항을 부분적분을 이용하여 적분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta t^C \rightarrow 0} \int_{t^C}^{t_+^C} B^T M \dot{q} dt \\ &= B^T \left\{ M \dot{q} \Big|_{t^C}^{t_+^C} - \lim_{\Delta t^C \rightarrow 0} \int_{t^C}^{t_+^C} \dot{M} \dot{q} dt \right\} \\ &= B^T M \Delta \dot{q} \end{aligned} \quad (18)$$

여기서 t^C 는 $t^C < t^C < t_+^C$ 를 만족하고 Δt^C 는

$t_+^C - t_-^C$ 를 의미하고 속도 증분 $\Delta \dot{\mathbf{q}}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\Delta \dot{\mathbf{q}} \equiv \dot{\mathbf{q}}(t_+^C) - \dot{\mathbf{q}}(t_-^C) \quad (19)$$

충격력을 제외한 외력에 의한 일반 작용력 $\mathbf{B}^T \mathbf{Q}^0$ 는 일반좌표와 일반속력만의 함수이므로 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{\Delta t^C \rightarrow 0} \int_{t_-^C}^{t_+^C} \mathbf{B}^T \mathbf{Q}^0 dt = 0 \quad (20)$$

식 (4)와 식 (9)로부터 수직방향 충격량 f_N^C 와 접선방향 충격량 f_T^C 는 충격함수로 나타낼 수 있으므로 $\mathbf{B}^T \mathbf{Q}_N^C$ 와 $\mathbf{B}^T \mathbf{Q}_T^C$ 를 적분하면 다음 같이 표현된다.

$$\lim_{\Delta t^C \rightarrow 0} \int_{t_-^C}^{t_+^C} \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_N^C dt = \mathbf{B}^T (d_N^q)^T p_N^C \quad (21)$$

$$\lim_{\Delta t^C \rightarrow 0} \int_{t_-^C}^{t_+^C} \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_T^C dt = -\mathbf{B}^T (d_T^q)^T p_T^C \quad (22)$$

가속도 구속방정식은 다음 식으로 처리된다.

$$\lim_{\Delta t^C \rightarrow 0} \int_{t_-^C}^{t_+^C} \Phi_q dt = \lim_{\Delta t^C \rightarrow 0} \int_{t_-^C}^{t_+^C} \boldsymbol{\gamma} dt \quad (23)$$

위 식에서 Φ_q 는 일반좌표만의 함수로 표현되고 $\boldsymbol{\gamma}$ 는 일반좌표와 일반속력만의 함수이므로 우변은 0이 된다. 따라서 식 (23)으로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\Phi_q \Delta \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (24)$$

식 (18)~식 (24)로부터 속도변화량을 구하기 위한 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{M} \\ \Phi_q \end{bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{q}} \\ & = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T ((d_N^q)^T p_N^C - (d_T^q)^T p_T^C) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (25)$$

충돌하는 구속 다물체계의 거동을 표현하기 위해 n 개의 좌표를 사용할 경우 식 (25)에서 풀어야 하는 일반좌표 수만큼의 방정식의 개수 n 에 비해 n 개의 $\Delta \dot{\mathbf{q}}$ 와 두 개의 충격량 p_N^C 와 p_T^C 로 모두 $n+2$ 개의 미지수가 존재한다. 따라서 식 (25)를 풀기 위해서는 두 개의 방정식을 더 필요로 한다. 마찰력이 작용할 경우 p_T^C 는 식 (10)에 의해 p_N^C 로 표현될 수 있고 나머지 한 개의 방정식은 다음과 같은 반발계수 e 를 도입함으로써 구할 수 있다.

$$e \equiv -\frac{v_N(t_+^C)}{v_N(t_-^C)} \quad (26)$$

또는

$$v_N(t_+^C) = -e v_N(t_-^C) \quad (27)$$

식 (26)과 식 (27)에서 식 (8)에 정의된 v_N 은 연쇄법칙에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$v_N = \mathbf{n}_i^T (\dot{\mathbf{r}}_{ij})_q \dot{\mathbf{q}} \quad (28)$$

위 식에서 $(\dot{\mathbf{r}}_{ij})_q$ 는 holonomic계에 대해 아래 식을⁽⁸⁾ 만족한다.

$$(\dot{\mathbf{r}}_{ij})_q = (\mathbf{r}_{ij})_q \quad (29)$$

식 (15)와 식 (29)를 이용하여 식 (28)을 식 (27)에 대입하면 식 (27)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$d_N^q \dot{\mathbf{q}}(t_+^C) = -e d_N^q \dot{\mathbf{q}}(t_-^C) \quad (30)$$

위 식의 양변에 $d_N^q \dot{\mathbf{q}}(t_-^C)$ 를 빼면 다음과 같이

출 수 있다.

$$d_N^q \Delta \dot{q} = -(1+e) d_N^q \dot{q}(t_-^C) \quad (31)$$

속도 증분치 $\Delta \dot{q}$ 를 구하기 위해 식 (22)와 식 (29)은 다음과 같은 선형방정식으로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} B^T M B^T \left\{ \frac{\mu v_T}{|v_T|} (d_T^q)^T - (d_N^q)^T \right\} \\ \Phi_q & 0 \\ d_N^q & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \dot{q} \\ p_N^C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(1+e) d_N^q \dot{q}(t_-^C) \end{Bmatrix} \quad (32)$$

두 강체가 충돌시 충돌점에서 접선방향 접촉력에 의해 상대운동이 존재하지 않는 현상을 고착(stiction)이라 한다. 고착이 발생 시 다음과 같은 구속방정식을 만족해야 한다.

$$\begin{aligned} v_T(t_+^C) &= v_T(t_-^C) + t \Delta \dot{r}_{ij} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

또는

$$d_T^q \Delta \dot{q} = -d_T^q \dot{q}(t_-^C) \quad (34)$$

두 강체가 충돌하는 순간 고착이 발생할 경우 계의 속도 증분을 계산하기 위해 접촉력에 의한 충격력 p_T^C 를 구해야 한다. 식 (25), 식 (31), 그리고 식 (34)에 의해 $\Delta \dot{q}$, p_N^C 그리고 p_T^C 를 구하기 위한 선형 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} B^T M - B^T (d_N^q)^T B^T (d_T^q)^T \\ \Phi_q & 0 & 0 \\ d_N^q & 0 & 0 \\ d_T^q & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \dot{q} \\ p_N^C \\ p_T^C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(1+e) d_N^q \dot{q}(t_-^C) \\ -d_T^q \dot{q}(t_-^C) \end{Bmatrix} \quad (35)$$

2.2 수치해석 알고리즘

step 1: 적분을 수행하면서 매 충돌 검사시간마다 충돌이 발생하는지를 검사하고 충돌이 발생할 경우 step 2를 수행하고 충돌이 발생하지 않을 경우 적분을 계속 수행한다.

step 2: 충돌이 발생하는 시간 t^C 에서 식 (35)를 풀어 $\Delta \dot{q}(t^C)$, p_N^C 그리고 p_T^C 를 구한다. p_N^C 와 p_T^C 가 아래식을 만족하면 step 3을 수행한다.

$$p_T^C \leq \mu_s p_N^C \quad (36)$$

여기서 μ_s 는 정지 마찰계수를 의미한다. p_N^C 와 p_T^C 가 식 (36)을 만족하지 않으면 식 (32)를 풀어 $\Delta \dot{q}(t^C)$ 와 p_N^C 를 계산하고 step 3을 수행한다.

step 3: step 2에서 구한 $\Delta \dot{q}$ 로부터 시간 t_+^C 에서의 속도를 아래식으로부터 구한 후 step 4를 수행한다.

$$\dot{q}(t_+^C) = \dot{q}(t_-^C) + \Delta \dot{q}(t^C) \quad (37)$$

step 4: 적분시간이 적분 시간구간을 넘으면 해석을 종료한다. 적분시간이 적분구간 내에 있을 경우 step 1을 다시 수행한다.

3. 수치예제

수치해석을 수행하기 위해 DE 적분기⁽¹⁰⁾ 사용되었고 절대 오차와 상대 오차는 1.0×10^{-4} 이 사용되었다.

3.1 지면과 충돌하는 공

Fig. 2는 지면과 충돌하는 공을 보여준다. 그림에서 \hat{n}_1 과 \hat{n}_2 는 각각 지면에 고정된 절대 좌표계의 단위벡터들을 의미한다. 계에 작용하는 외력으로는 중력이 \hat{n}_2 의 반대방향으로 작용하고 중력가속도는 9.81 m/sec^2 의 크기를 갖는다. Table 1은 해석에 사용된 공의 관성 특성치

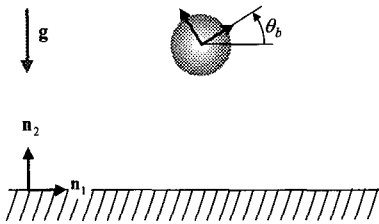


Fig. 2 Ball colliding with ground

Table 1 Inertia properties and Initial values of example 1

Inertia properties	
m_b, J_b	1.0 [kg], 0.4 [kg·m ²]
Initial values	
r_b, θ_b	[0.000 10.000] ^T [m], 0.000 [rad]
$\dot{r}_b, \dot{\theta}_b$	[0.000 0.000] ^T [m/sec], 1.000 [rad/sec]

와 위치 및 속도의 초기치를 나타낸다. 표에서 m_b 와 J_b 는 각각 공의 질량과 질량 관성모멘트를 의미하고 r_b, \dot{r}_b, θ_b 그리고 $\dot{\theta}_b$ 는 각각 공의 위치, 속도, 자세각 그리고 각속도를 의미한다. 공의 경계곡선은 질량중심을 원점으로 하고 0.2 m의 반경을 갖는 원의 방정식으로 표현된다. 공과 지면과의 충돌시 반발계수는 0.8이 사용되었고 충돌시 충돌점에 작용하는 마찰력을 고려하기 위해 마찰계수와 정지마찰계수는 각각 0.3과 0.35가 사용되었다. Fig. 3은 충돌시 마찰을 고려한 경우와 고려하지 않은 경우 공의 질량중심의 궤적을 보여준다. 해석결과로부터 시간 1.41초와 3.68초에서 충돌이 발생함을 알 수 있고 마찰을 고려하지 않은 경우 공의 횡방향 변위가 발생하지 않는 반면 마찰력을 고려한 경우 공의 횡방향 상대속도에 의해 마찰력이 작용하고 공의 횡방향 변위가 발생함을 알 수 있다. Fig. 4는 시간에 따른 공의 횡방향 속도(v_x)와 공의 각속도(ω)의 궤적을 보여준다. 해석결과로부터 충돌시 마찰을 고려할 경우 고려하지 않은 경우에 비해 시간 1.41초에서 횡방향 속도와 각속도의 변화가 발생함을 알 수 있다. 시간 1.41초에서 공이 지면과 충돌하고 충돌시 식 (36)을 만족하는 고착이 발생하여 공과 지면의 충돌 후 충돌 점에서의 상대속

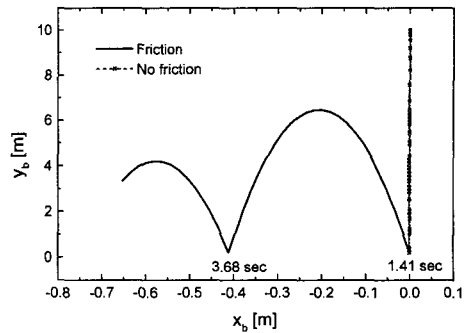


Fig. 3 Loci of ball mass center

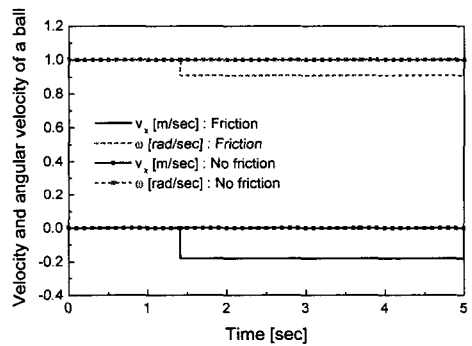


Fig. 4 Velocity of ball

도는 0이 된다. 충돌하는 순간을 제외한 시간에서 중력에 의한 작용력만이 공에 작용하므로 1.41초에서의 충돌 직후 시간 3.68초에서의 충돌 직전 사이에 공의 속도와 각속도는 동일하다. 따라서 시간 3.68초에서 충돌점에서의 상대속도는 0이 되어 마찰력에 의한 충격력이 작용하지 않으므로 공의 횡방향 속도는 변하지 않는다.

3.2 충돌하는 두 개의 단진자

Fig. 5은 두 개의 단진자로 구성된 계를 보여준다. 지면과 강체 ①, 지면과 강체 ②는 회전 조인트들로 연결되어 있다. 계에 작용하는 외력으로는 중력이 n_1 방향으로 작용하고 중력가속도는 $9.81m/sec^2$ 의 크기를 갖는다. Table 2는 해석에 사용된 계의 관성특성치와 위치 및 속도의 초기치를 나타낸다. 표에서 $m_i, J_i (i=1,2)$ 는 각각 강체 i 의 질량과 질량 관성모멘트를 의미

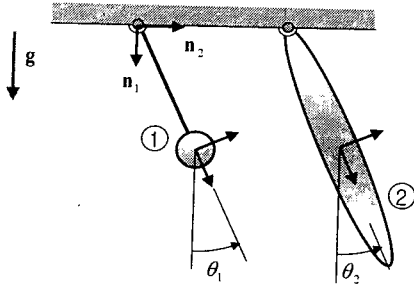


Fig. 5 Two pendulums

Table 2 Inertia properties and Initial values of example 2

Inertia properties	
m_1, J_1	1.0 [kg], 0.3 [kg·m ²]
m_2, J_2	2.0 [kg], 1.0 [kg·m ²]
Initial values	
r_1, θ_1	[0.000 -0.500] ^T [m], -1.571 [rad]
$\dot{r}_1, \dot{\theta}_1$	[0.000 0.000] ^T [m/sec], 0.000 [rad/sec]
r_2, θ_2	[0.500 0.300] ^T [m], 0.000 [rad]
$\dot{r}_2, \dot{\theta}_2$	[0.000 0.000] ^T [m/sec], 0.000 [rad/sec]

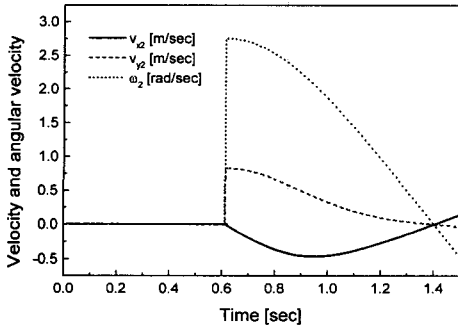


Fig. 6 Velocity of body 2

한다. 강체 ①의 경계 곡선은 질량중심을 원점으로 하고 0.1m의 반경을 갖는 원의 방정식으로 표현된다. 강체 ②의 경계곡선은 질량중심을 원점으로 하고 0.3m의 장반경과 0.1m의 단반경을 갖는 타원의 방정식으로 표현된다. Fig. 6은 강체 ②의 시간에 따른 속도 및 각속도의 변화를 보여준다. 해석 결과로부터 시간 0.613초

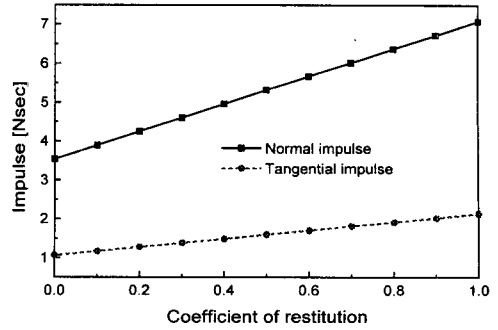


Fig. 7 Vertical and tangential impulse vs. coefficient of restitution

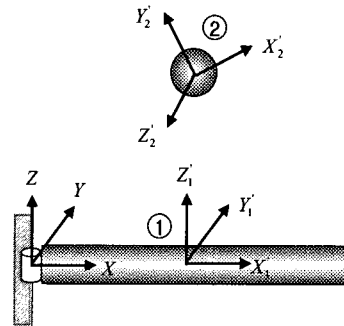


Fig. 8 A ball colliding with a bat

에서 두 강체가 충돌하고 속도의 불연속이 생김을 알 수 있다. Fig. 7은 반발계수의 변화에 따른 수직방향과 접선방향 충격량의 변화를 보여준다. 해석결과로부터 수직방향과 수평방향 충격량은 모두 반발계수에 비례하여 증가함을 알 수 있다.

3.3 충돌하는 공과 방망이

Fig. 8은 방망이와 충돌하는 공을 보여준다. 그림에서 좌표계 $X-Y-Z$, $X_1-Y_1-Z_1$ 그리고 $X_2-Y_2-Z_2$ 는 각각 절대좌표계, 강체 ①에 고정된 좌표계 그리고 강체 ②에 고정된 좌표계를 의미한다. 강체 ①로 표현된 방망이는 지면과 회전조인트로 연결되어 있다. Table 3은 해석에 사용된 계의 관성특성치와 위치, 자세, 속도 및 각속도의 초기치를 나타낸다. 표에서 m_i , J_{ix} , J_{iy} , J_{iz} ($i=1,2$)는 각각 강체 i 의 질량과

Table 3 Inertia properties and Initial values of example 3

Inertia properties	
m_1	1.500 [kg]
J_{1x}, J_{1y}, J_{1z}	0.100, 0.500, 0.500 [$kg \cdot m^2$]
m_2	0.500 [kg]
J_{2x}, J_{2y}, J_{2z}	0.125, 0.125, 0.125 [$kg \cdot m^2$]
Initial values	
r_1	$[0.500 \ 0.000 \ 0.000]^T$ [m]
e_1	$[0.000 \ 0.000 \ 0.000 \ 1.000]^T$
\dot{r}_1	$[0.000 \ 0.250 \ 0.000]^T$ [m/sec]
ω_1	$[0.000 \ 0.000 \ 0.500]^T$ [rad/sec]
r_2	$[0.500 \ 2.000 \ 0.100]^T$ [m]
e_2	$[0.000 \ 0.000 \ 0.000 \ 1.000]^T$
\dot{r}_2	$[0.000 \ -10.000 \ 0.000]^T$ [m/sec]
ω_2	$[1.000 \ 1.000 \ 1.000]^T$ [m/sec]

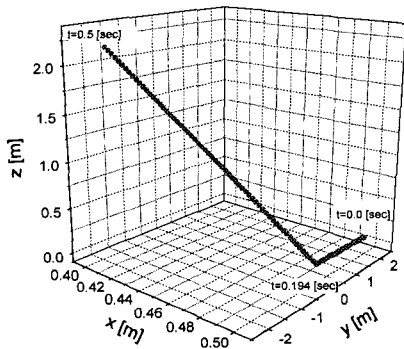


Fig. 9 Loci of ball mass center

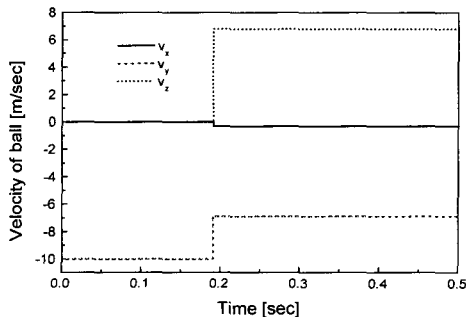


Fig. 10 Velocity of ball mass center

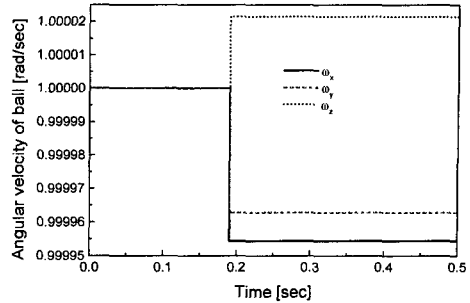


Fig. 11 Angular velocity of ball

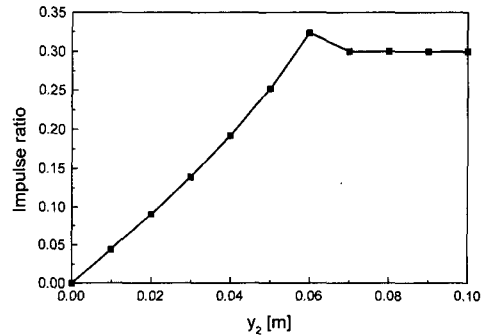


Fig. 12 Impulse ration vs. initial value y of ball

강체 i 에 고정된 좌표계에 대해 표현된 질량 관성모멘트를 의미하고 e_i 와 ω_i 는 각각 강체 i 의 자세를 표현하기 위해 사용된 오일러 파라미터와 강체에 고정된 좌표계에 대해 표현된 각속도를 의미한다. 강체 ①의 곡면은 0.06 m의 반경을 갖는 원통으로 표현되고 강체 ②는 0.05 m의 반경을 갖는 구로 표현된다. 공과 지면과의 충돌시 반발계수는 0.8이 사용되었고 충돌시 충돌점에 작용하는 마찰력을 고려하기 위해 마찰계수와 정지마찰계수는 각각 0.3과 0.35가 사용되었다. Fig. 9는 시간에 따른 공의 궤적을 보여준다. 그림으로부터 시간 0.194초에서 공과 방망이가 충돌하고 있음을 알 수 있다. Fig. 10과 Fig. 11은 시간에 따른 공의 속도와 각속도의 변화를 보여준다. 해석결과로부터 충돌시간 0.194초에서 공의 속도와 각속도의 불연속이 생김을 알 수 있다. Fig. 12는 공의 Y방향 초기치의 변화에 따른 충격력비(수직방향 충격력에 대한 접선방향

충격력의 비)의 변화를 보여준다. 해석에 사용된 방망이의 초기 속도 및 각속도와 공의 초기 회전 각속도는 0이고 공의 초기 위치 성분중 두 번째 성분을 0.00 m로부터 0.1 m까지 0.01 m씩 증가한 값들을 사용하였다. 해석결과로부터 공의 Y방향 초기치 y_2 가 0.00 m로부터 0.06 m까지는 충돌시 고착현상이 일어나고 0.07 m부터 미끄럼이 발생함을 알 수 있다. 이는 공의 Y방향 초기치가 증가할수록 공과 방망이상의 충돌점에서의 접선방향 상대속도의 증가에 기인한다.

4. 결론

본 연구에서는 충돌시 마찰력이 작용하는 경우에 대해 편속도행렬을 이용한 다물체 동역학 해석방법에 적용 가능한 충돌하는 두 물체에 대한 해석방법을 제시하였다. 제안된 해석방법은 충돌시 마찰력에 의한 고착과 미끄럼 현상들을 고려하여 충돌에 의한 속도 증분치와 수직방향 및 접선방향 충격량을 계산하였다. 충돌시 마찰을 고려한 수치예제를 통해 마찰이 계의 거동에 미치는 영향을 살펴보았다. 본 연구에서 제안된 해석방법은 야구공과 야구방망이의 충돌과 같이 충돌시 마찰력이 계의 거동에 큰 영향을 미치는 스포츠 공학에 활용될 수 있다.

참고문헌

- (1) Wittenburg, J., 1977, *Dynamics of Systems of Rigid Bodies*, Teubner, Stuttgart.
- (2) Wu, S. C., Yang, S. M., and Haug, E. J., 1984, *Dynamics of Mechanical Systems with Coulomb Friction, Stiction, Impact, and Constraint Addition-deletion*, Technical Report N0. 84-19.
- (3) Jalón, J. G. and Bayo, E., 1993, *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems*, Springer-Verlag.
- (4) 박정훈, 유홍희, 황요하, 양현익, 1999, “충돌하는 구속 다물체계의 동역학 해석,” 대한기계학회 1999년도 춘계학술대회논문집(A), pp. 266~271.
- (5) ADAMS/View manual (version 8.0), 1994, *Mechanical Dynamics*.
- (6) 박정훈, 유홍희, 황요하, 배대성, 1997, “케인 방법을 이용한 구속 다물체계의 동역학 해석,” 대한기계학회논문집(A), 제21권, 제12호, pp. 2156~2164.
- (7) 박정훈, 유홍희, 황요하, 1998, “접촉하는 두 강체 사이에서의 접촉력 계산을 위한 동역학 해석 알고리즘,” 대한기계학회 1998년도 춘계학술대회 논문집(A), pp. 560~565.
- (8) Rosenberg, R. M., 1977, *Analytical Dynamics of Discrete Systems*, Plenum Press.
- (9) Shampine, L. F. and Gordon, M. K., 1974, *Computer Solution of Ordinary Differential Equations: The Initial Value Problem*, W. H. Freeman and Company.

(1) Wittenburg, J., 1977, *Dynamics of Systems of*