영역 제거법의 확장을 통한 전체 최적화 알고리듬 개선

오 승 환* • 이 병 채**

(1999년 5월 7일 접수)

A Global Optimization Algorithm Based on the Extended Domain Elimination Method

Seung-Hwan Oh and Byung-Chai Lee

Key Words : Global Optimization(전체 최적화), Domain Elimination Method(영역 제거법), Attraction Region(유력영역), Triangular Patch(삼각 패치)

Abstract

An improved global optimization algorithm is developed by extending the domain elimination method. The concept of triangular patch consists of two or more trajectories of local minimizations is introduced to widen the attraction region of the domain elimination method. Using the angle between each of three vertices of the patch and a design point, we measure the proximity between the design point and the patch. With the Gram-Schimidt orthonormalization, this method can be extended to general n-dimensional problems. We code the original domain elimination algorithm and a patch-based algorithm. Then we compare the performance of two algorithms. Through the well-known example problems, the algorithm using patch is shown to be superior to the original domain elimination algorithm in view of computational efficiency.

1. 서 론

일반적으로 공학적 최적화 문제에서 국소 최적점이 여러 개 있는 경우가 빈번하게 발생하며 이 중에서 가장 작은 전체 최적점을 찾는 것이 중요하다. 국소 최적점을 찾는 문제는 이미 수학적으로 정립 되어 있고 구현 알고리듬개발에도 많은 연구가 진행되어 왔으며 효율성과 안정성 측면에서 신뢰할 만한 알고리듬들을 찾을 수 있다. 그러나, 전체 최적점을 찾는 문제는 수학적인 해법을 구할 수 없다는 것이 정설로 되어 있으며 많은 계산을 요구한다는 점, 수렴 판정의 어려움 등 많은 난제가 있으며 앞으로의 연구 과제로 인식되고 있다.

현재까지 개발되어 온 전체 최적화 알고리듬을 통계적 요소가 포함되어 있는가의 유무에 따라 크게 결정론적 방법과 통계적 방법의 두 가지로 나눌 수 있다. 결정론적 방법에는 전체 탐색(exhaustive search), 커버링 방법(covering method),[1] 주밍 방법(zooming method),[2] 확장된 감소 방법(methods of generalized descent),[3] 뚫기 방법(tunneling method),[4] 채우기 방법(filling method)[5] 등이 있으며 통계적 방법으로는 임의 탐색 방법(pure random search), 다중 출발점 방법(multi-start method), 군집 방법(clustering methods),[6] 임의 조절 탐색 방법(controlled random search),[7] 시뮬레이티드 어닐링(simulated annealing),[8] 채택-제외 기반 최적화 방법(acceptance-rejection based optimization

* 회원, KAIST 기계공학과
E-mail : osh@sys713.kaist.ac.kr
TEL : (042)869-5034 FAX : (042)861-1694
** 회원, KAIST 기계공학과

methods),[9] 유전자 알고리듬(genetic algorithms),[10] 타부 탐색(tabu search),[11] 진화 연산을 이용한 알고리듬[12] 등이 있다.

Elwakeil 과 Arora 는 강건한 국부 최적화 알고리듬을 이용하여 국부 최적화 알고리듬이 해를 내주는 문제에 모두 이용할 수 있는 영역 제외 방법(domain elimination method)과 줌잉 방법(zooming methods) 등,[13] 두 개의 전체 최적화 알고리듬을 개발하였다. 이 방법들은 현재까지 탐색했던 국부 최적화 자취들을 점과 선으로 기억시킨 후 이 자취들을 다음 탐색시에 다시 따라 가지 못하도록 탐색 영역에서 제외하는 전략을 사용한 방법이며 통계적 전체 최적화 알고리듬에서 자주 사용하는 베이시안 수렴 판정 방법을 채택하여 효율성과 신뢰성이 우수한 전체 최적화 알고리듬을 만든 것이다.

본 논문의 목적은 Elwakeil 과 Arora 가 개발한 점과 선을 이용한 방법을 확장시켜 두 개 이상의 선이 만날시에 생기는 삼각 패치(triangular patch)까지 고려하여 자취 기록을 남김으로써 효율 면에서 보다 우수한 알고리듬을 개발하는데 있다. 이를 위해 새로운 알고리듬을 구성하고 이를 컴퓨터 상에 구현하여 참고 문헌의 문제들을 풀고 성능을 비교 검토하였다.

2. 영역 제외 방법 알고리듬

영역 제외 방법은 국부 최적해가 이미 구해 놓은 국부 최적해로 다시 접근할 영역(유력영역, attraction region)을 정의하고, 국부 최적화 과정을 수행하면서 현 설계점이 유력영역에 있는지 검토하여 제거하는 방법이다. 유력영역은 기존 국부 최적점, 국부 최적화 시작점, 국부 최적점으로의 접근로 등으로 정의되며 국부 최적화 횟수가 많아질수록 넓어진다. 국부 최적화 축차 중에는 대개 M 회 축차 후 유력영역에 접근했는지 검토한다. M 값은 보통 2-3 을 택한다. 기술의 편의를 위해 다음과 같이 점들의 집합과 계수기를 정의한다.

$\mathbf{X}_b = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x}$ 는 상.하한 값을 만족하는 변수들의 집합 $\}$

$\mathbf{X}_o = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x}=\mathbf{x}^o$; 국부 최적화가 수행된 시작점들 $\}$

$\mathbf{X}_* = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x}^*$; 이미 구한 국부 최적화 점들 $\}$

$\mathbf{X}_r = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x}$ 는 제외 기준을 만족한 점들 $\}$

c_1 ; $\mathbf{X}_r$ 요소의 개수

c_2 ; $\mathbf{X}_r$ 요소들에 가까이 있어 제거된 요소들의 개수

c_3 ; $\mathbf{X}_o$ 요소의 개수

c_4 ; $\mathbf{X}_*$ 요소의 개수

단계 1 : 집합 $\mathbf{X}_o$,$\mathbf{X}_*$과 $\mathbf{X}_r$를 초기화 한다. 계수기 c_1~c_4의 값을 0 으로 셋팅한다.

단계 2 : 수렴 판정 기준을 만족하면 알고리듬을 끝내고, 그렇지 않으면 $\mathbf{X}_b$에 등분포하도록 임의 수를 발생시켜 시작 점으로 택한다. 수렴 기준은 3 절에서 언급한다.

단계 3 : 만약 임의 발생 점 $\mathbf{x}^R$이 $\mathbf{X}_*$나 $\mathbf{X}_o$에 가까이 있다면 $\mathbf{x}^R$을 $\mathbf{X}_r$ 집합에 포함시키고 계수 c_1을 1 증가시키도록 한다. 그렇지 않고 만약에 $\mathbf{X}_r$에 가까이 있다면 계수 c_2를 1 증가시킨다. 만약 $\mathbf{x}^R$이 궤적에 가까이 있다면 계수 c_1을 1 증가 시키고 $\mathbf{x}^R$을 $\mathbf{X}_r$ 집합에 포함시킨다. 위 네 경우 중에 하나라도 참이라면 단계 2 로 가고 모두 거짓이라면 단계 4 로 간다.

단계 4: 국부 최적화를 M 번 만큼 수행한다.

만약에 $\mathbf{x}^M$이 국부 최적점이라면 $\mathbf{x}^*=\mathbf{x}^M$으로 셋팅하고 단계 6 으로 간다. 그렇지 않으면 단계 5 로 간다.

단계 5 : 만약에 현재 점 $\mathbf{x}^M$점이 $\mathbf{X}_o$나 궤적에 가까이 있다면 c_1을 하나 증가시키고 $\mathbf{x}^M$ 점을 $\mathbf{X}_r$ 집합에 포함시킨다. 그렇지 않고 만약 $\mathbf{X}_r$에 가까이 있다면 c_2를 하나 증가시킨다. 이 세가지 경우 중 하나라도 해당이 되면 시작점과 $\mathbf{x}^M$점을 잇는 궤적을 만들어 저장하고 단계 2 로 넘어 간다. 그렇지 않으면 단계 4 로 간다.

단계 6 : 만약에 $\mathbf{x}^*$가 새로운 국부 최적점이라면 $\mathbf{X}_*$ 집합에 포함 시키고 c_4를 1 증가 시킨다. 단계 2 로 간다.

3. 삼각 패치를 이용한 제거 알고리듬

본 논문에서는 점과 궤적뿐만 아니라 궤적이 2 개 이상 한 점에서 만날 경우에 생겨나는 삼각

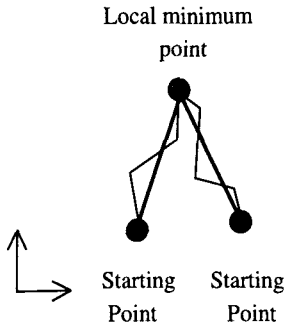


Fig. 1 The concept of extended elimination region

패치를 고려하여 영역을 제거하는 삼각 패치 기반 제거 알고리듬을 제안하였다. Fig. 1 은 삼각 패치에 관한 기본적인 개념을 설명하기 위해 설계 변수가 두 개일 때 2 차원 평면상에 나타낸 그림이다.

Fig. 1 에서 아래 두 개의 점은 국소 최적화를 수행하기 위한 시작점이고 위의 한 점은 한 개의 국부 최소 점이다. 이때 얇은 선으로 그린 것이 실제 국소 최적화에 따른 설계 변수의 궤적이고 시작점과 국소 최소점을 직선으로 연결한 것이 가상의 삼각 패치를 만들기 위한 가상의 궤적이다. 이때 세 점으로 만들어지는 삼각형 내부와 가까운 주위의 점들은 모두 그림에 나타난 국소 최소점으로 수렴할 가능성이 많다. 이들 점을 현재의 국소 최소점에 대한 유력영역이라 정의 하였다.

기존의 영역 제거법은 위의 경우에 있어 점 주위의 영역과 선 주위의 영역만을 고려하는 데 반하여 제안한 알고리듬은 어떤 방향성을 가질 때 더 넓은 영역을 제거 대상으로 삼을 수 있으므로 효율의 증대가 예상된다. 삼각 패치에 의한 제거 효과는 설계 변수의 개수가 많아질수록 더 크게 나타나게 된다. 설계 변수가 n 차원에서 기술이 된다면 궤적에 따라 생겨나는 삼각 패치의 유력영역도 n 차원에서 정의한다. 삼각 패치를 이용한 영역 제거 알고리듬의 밑바탕에는 두 개 이상의 궤적이 모이는 부분은 하나의 점이나 궤적보다 유력영역에 대한 기여 측면에서 더 중요하게 다루어야 한다는 관점이 깔려 있다. 두 개의 궤적의 중간 부분은 이 둘의 성분으로 만들어지는 삼각형을 이루는데 이 삼각형 내부의 점들과 삼각형 주위의 점들을 유력영역으로 볼 수 있다. 점과 궤적, 그리고 삼각형을 중심으로 하는 유력영역을 나타내는 방법은 여러 가지가 있을 수 있는데 본 논문에서는 점, 선, 삼각 패치에 대해서 다음과 같이 유력영역을 제안하였다.

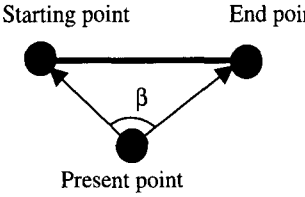


Fig. 2 Definition of contingency measure for the trajectory

3.1 점에 대한 유력영역

영역 소거 법에서 제거 기준이 되는 점으로는 시작 점, 기존의 제거 점, 국부 최적점 등이 있다. 설계 점이 이들 점에서 근접해 있게 되면 제거 대상이 되는데 이때 근접도를 정의할 필요가 있다. 점과 점 사이의 근접도는 여러 가지 방법으로 정의할 수 있는데 본 논문에서는 한 점을 중심점으로 하여 일정 거리 이하로 들어 오는 점들의 집합인 하이퍼 구의 반경으로 근접도를 정의하였다. 이를 수식으로 나타내면 다음과 같다.

$$D = \left\| \mathbf{x}^T - \mathbf{x}^S \right\| \le D_{cr}$$
$$D_{cr} = \alpha \left\| x_u - x_l \right\|, \quad 0.01 \le \alpha \le 0.20 \qquad (1)$$

여기서 $\mathbf{x}^T$는 현재 대상이 되는 설계점이며 $\mathbf{x}^S$는 지금까지 저장해 놓았던 유력 영역을 대표하는 점들의 집합이다. x_u와 x_l은 설계 변수의 상· 하한 값이다.

3.2 궤적의 유력 영역

영역 제거 법에서는 시작점과 제거점 사이를 연결하는 궤적들을 저장하여 이 궤적에 근접하는 점들은 다시 제외 대상으로 삼고 있다. 궤적과의 근접도도 여러 가지 형태로 표현할 수 있는데 본 논문에서는 근접도를 간단하게 기술할 수 있도록 궤적의 시작점, 끝점과 현재 설계 점을 연결하여 생기는 내각이 150 도 이상일 때 점이 궤적에 근접한 것으로 생각한다. 내각은 β로 표현한다. Fig. 2 는 궤적 파라미터 β를 설명한 그림이다.

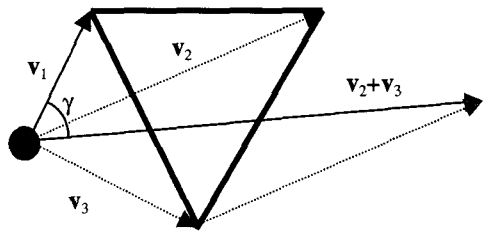


Fig. 3 Definition of contingency measure for a 2-D triangular patch

3.3 삼각 패치의 유력 영역

하나의 국부 최적점으로 수렴해 가는 영역의 점들을 모아 놓은 것을 유력영역이라 할 때 한 점으로 모이는 두 개의 궤적은 하나의 삼각 패치를 만든다. 이처럼, 본 논문에서는 시작점 두 개와 국부 최소점 한 개로 구성되는 유력영역을 삼각 패치라 정의한다. 이때 삼각 패치의 영역을 수학적으로 표시할 수 있다면 현재 설계점이 이 유력영역 안에 포함되는가에 대한 판단을 내릴 수 있을 것이다. 이 때 유력영역을 간단하면서도 충분히 표현할 방법이 필요하다. Fig. 3은 설계 점과 세 점을 연결하는 벡터를 이용하여 유력영역을 나타내는 방법을 설명한 그림이다.

현재 설계점이 삼각형 주위에 있는가에 대한 판단은 Fig. 3과 같이 한 점과 세 점을 연결하는 벡터들의 각도로써 표현할 수 있다. 즉, 현재 설계점과 삼각형 꼭지점 중의 하나를 연결하는 벡터와 설계 점과 나머지 두 개의 꼭지점을 연결하는 벡터들의 합과의 사이각을 계산하여 이 각도가 어느 이상 크기가 되면 유력영역에 속한 것으로 판정한다. 이렇게 차례대로 합 벡터를 구하는 꼭지점들을 번갈아 가며 고려하게 되면 삼각형 주위의 모든 영역을 나타낼 수 있다. 이 때 각도는 유력영역의 상대적 크기를 나타내는 매개 변수로서 γ로 표현한다. 유력 영역은 원래 세 점이 이루는 삼각형의 모양과 γ에 따라 달라지게 된다. Fig. 4는 세 점이 정삼각형의 모양을 이룰 때 γ에 따른 유력영역을 그린 그림이다. Fig. 5와 6는 삼각형의 모양이 각각 예각일 때와 둔각일 때를 나타낸 그림이다. 정삼각형일 때보다 유력영역이 더 커짐을 알 수 있다.

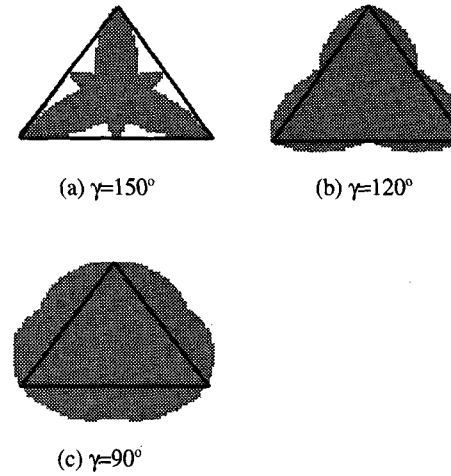


Fig. 4 The attraction region of a regular triangle

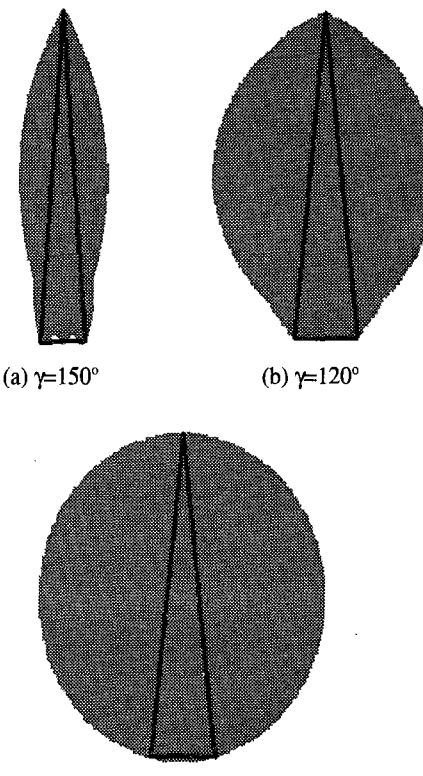
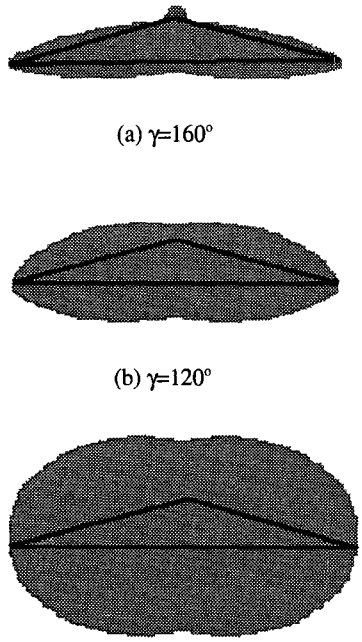


Fig. 5 The attraction region of an acute angle triangle



(a) γ=160°

(b) γ=120°

(c) γ=90°

Fig. 6 The attraction region of an obtuse angle triangle

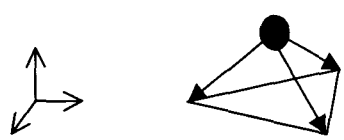


Fig. 7 Outspan component in view of angle between triangular patch and design point

한편, 일반적으로 n-차원 문제일 경우 삼각형을 이루는 벡터 두 개의 기저 벡터로 표현되지 못하는 설계점의 성분들 또한 앞의 각도 파라미터로 한꺼번에 유력영역으로 표현될 수 있으나 본 논문에서는 따로 파라미터를 두어 면에 수직인 성분을 따로 제어할 수 있도록 하였다. 문제를 간단히 형상화하여 Fig. 7 에서 3 차원 공간 상에서 γ가 90° 일 때 유력영역의 한 점을 나타내었다.

삼차원 공간까지는 각도 γ를 이용하여 근접도를 표현하는 것이 가능하지만 일반적인 n 차원에서는 각도가 애매해지므로 파라미터를 도입하여 유력영역을 세밀하게 조절할 필요가 있다. 이는 앞으로의 유력영역에 관한 연구를 심화시켜 진행하는데도 도움이 될 것이다. 두 성분 외적인 요소에 대하여는 그람 슈미츠 원리를 응용하여 조절 파라미터를 생성할 수 있다. 그람 슈미츠 원리를 응용하면 삼각형의 두 개의 벡터를 이용하여 두 개의 기저 벡터를 만들 수 있고, n 차원 공간 상의 나머지 기저 벡터 또한 만들 수 있다. 이 때 나머지 기저 벡터의 성분으로 이루어지는 거리가 일정 정도 이하이어야 한다는 조건을 주게 되면 일반적인 n 차원 공간상에서 세 점이 이루는 유력영역을 적절하게 표현할 수 있게 된다. 이 때 거리는 삼각형의 특성 길이로 적절하게 조절할 수 있다. 본 논문에서는 이 제한을 삼각형 특성 거리의 1.5 배로 정하였다.

3.4 수렴 기준

수렴 기준은 미리 정해 놓은 c_1, c_2, c_3, c_4 계수들의 최대값에 의한 것과 베이시안 수렴 방법에 의한 것을 결합한다. 여기서 c_1, c_2, c_3 는 설계 변수의 40 배로 정하고, 국소 최소점의 개수인 c_4 는 설계 변수의 10 배로 하는 Elwakeil 의 방법을 따른다. 베이시안 수렴 판정을 다음의 수식으로 나타낼 수 있다.[13]

$$K = \text{integer}\left(\frac{M(L-1)}{L-M-2}\right) \quad \text{provided } L \geq M+3 \tag{2}$$

여기서 K 는 예상되는 국소 최소점의 개수, M 은 지금까지 찾은 국소 최소점의 개수, L 은 국부 최적화를 시도한 개수로서 시작점의 개수와 일치한다.

3.5 알고리듬

개발된 알고리듬은 Elwakeil & Arora 가 제안한 영역 제거 법의 기본적인 알고리듬 틀에다 삼각 패치를 만드는 과정과 이 삼각 패치의 영역 안에 설계 점이 포함되어 있는가를 검사하는 과정이 덧붙여진다. 즉 2 장에서 기술한 알고리듬 단계 3 과 단계 5 에서 삼각 패치를 처리하는 부분을 첨가한다. 단계 3 과 단계 5 의 차이점은 단계 5 에서는 새로운 시작점이 생겨난 것이므로 이 시작점을 다음 축차 때 이 시작점으로 인해 삼각 패치가 생성될 수 있도록 처리하는 과정이 필요하고 단계 3

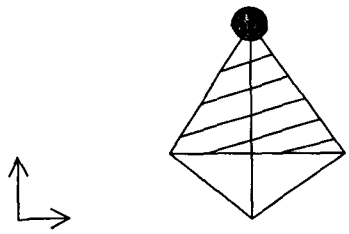


Fig. 8 Attraction region represented by three initial points that result in the same optimal point

은 그 과정이 필요하지 않다는 것이다. 단계 5 에서 국부 최적화를 수행하다 어떤 유력영역 안으로 설계 점이 이동하였을 때 당해 국부 최적화 시작점을 그 유력영역을 대표하는 국부 최적점 수렴 그룹에 속하게 하여 삼각 패치를 이루는 새로운 점으로 포함시킨다. 이런 식으로 최적화를 진행해 나가면 하나의 국부 최적점에 연결된 여러 개의 시작점이 나오게 되는데 시작점 두 개와 한 개의 국부 최적점으로 구성된 여러 개의 조합들을 이용하여 삼각 패치의 영역을 표현하게 되는 것이다. 예를 들어 2 차원 문제에서 Fig. 8 과 같이 한 개의 국부 최적점과 세 개의 시작점으로 이루어진 유력영역이 있다면 세 개의 시작점을 차례대로 조합하여 삼각 패치를 표현한다. 이렇게 모든 조합을 고려하면 사선으로 표현되는 겹치는 영역이 존재 하게 되지만 겹치는 영역을 조사하여 처리 대상에서 제외하는 방법은 알고리듬 구현이 더 복잡해 지고 계산 효율에 있어서도 그리 큰 장점을 갖지 못한다.

4. 예제 및 결과

제안한 알고리듬의 성능을 분석하기 위하여 10 개의 예제를 풀었다. 국부 최적화 알고리듬은 Vanderplaats 이 개발한 최적화 프로그램인 DOT 중 순차 이차 계획법(SQP) 을 이용하였다.[15] 국부 최적화 알고리듬은 다른 어떤 것을 써도 무방할 것이다. 예제는 설계 변수와 제한 조건의 개수가 다양하게 적용될 수 있도록 하였고 국부 최적점의 개수나 위치 등의 변화에 따른 성능도 시험할 수 있도록 문제들을 선택하였다.

예제 1.

$$\text{minimize} \quad f(x)=\left(4-2.1x_1^2+\frac{1}{3}x_1^4\right)x_1^2 + x_1x_2+\left(-4+4x_2^2\right)x_2^2$$

$$\text{subject to} \quad -3\le x_1\le 3$$

$$-2\le x_2\le 2$$

이 문제는 6 개의 국부 최적점을 가지며 두 개가 전체 최적점이다.

예제 2.

$$\text{minimize} \quad f(x)=2x_1+3x_2-x_1^3-2x_2^2$$

$$\text{subject to} \quad \frac{1}{6}x_1+\frac{1}{2}x_2-1\le 0$$

$$\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{5}x_2-1\le 0$$

$$x_1, x_2\le 0$$

이 문제는 많은 국부 최소점을 가지며 한 개의 전체 최적점을 갖는다.

예제 3.

$$\text{minimize} \quad f(x)=-\left[\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{6}\sin 2\pi\left(x_i+\frac{i}{5}\right)\right]^2$$

$$\text{subject to} \quad 0\le x_i\le 1, i=1,....,6$$

이 문제는 많은 국부 최적점을 가지며 두 개의 전체 최적점을 갖는다.

예제 4.

$$\text{minimize} \quad f(x)=2x_1+3x_2-x_1^3-2x_2^2$$

$$\text{subject to} \quad \frac{1}{6}x_1+\frac{1}{2}x_2-1\le 0$$

$$\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{5}x_2-1\le 0$$

$$x_1, x_2\ge 0$$

이 문제는 4 개의 국부 최소점을 가지며 한 개의 전체 최적점이 존재한다.

예제 5.

$$\text{minimize} \quad f(x)=x_1x_4(x_1+x_2+x_3)+x_3$$

$$\text{subject to } x_1x_2x_3x_4 - 25 \geq 0$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 40 = 0$$
$$1 \leq x_i \leq 5;\ i = 1,...,4$$

이 문제는 4개의 국부 최소점을 가지며 한 개의 전체 최적점이 존재한다.

예제 6.

$$f(x) = 2x_1^2 - 1.05x_1^4 + \frac{x_1^6}{6} - x_1x_2 + x_2^2$$
$$\text{subject to } -3 \leq x_i \leq 3,\ i = 1,2$$

이 함수는 세 개의 국소 최소점을 가지며 한 개의 전체 최소점을 가진다.

예제 7.

$$f(x) = 4x_1^2 - 2.1x_1^4 + \frac{x_1^6}{3} + x_1x_2 - 4x_2^2 + 4x_2^4$$
$$-2 \leq x_i \leq 2,\ i = 1,2$$

예제 8.

$$f(x) = 0.5x_1^2 + 0.5(1 - \cos 2x_1) + x_2^2$$
$$-10 \leq x_i \leq 10,\ i = 1,2$$

이 함수는 몇 개의 국소 최소점을 가지며 전체 최소점은 1개이다. 이 문제는 국소 최소점이 설계 공간중에 (0,0) 근처에 모두 모여 있어 영역 제거 법으로 풀기 어려운 특성을 가진 문제이다.

예제 9.

$$f(x) = 10^6 x_1^2 + x_2^2 - (x_1^2 + x_2^2)^2 + 10^{-6}(x_1^2 + x_2^2)^4$$

이 함수는 3개의 국소 최소점을 가지며 x_2 축상에 두 개의 전체 최소점을 갖는다.

예제 10.

$$f(x) = \left(x_2 - \frac{5.1x_1^2}{4\pi^2} + \frac{5x_1}{\pi} - 6\right)^2 + 10\left(1 - \frac{1}{8\pi}\right)\cos x_1 + 10$$
$$-5 \leq x_1 \leq 10,\ 0 \leq x_2 \leq 10$$

이 함수는 많은 국소 최소점을 가지며 전체 최소점은 두 개이다.

개발한 삼각 패치 기반 영역 제거 알고리듬의 효율과 신뢰성을 알기 위하여 점의 영역을 나타내는 파라미터의 값을 바꾸어 가면서 수치 실험을 하였다. 궤적에 관한 파라미터 β는 참고 문헌이 추천하는 값인 150°-170° 중, 더 넓은 영역을 나타낼 수 있는 150°로 고정시켰다. 삼각 패치에 필요한 파라미터는 삼각 패치를 이루는 각 ϕ, 유력영역을 나타내는 데 필요한 각 γ, 두 개의 기저 벡터에 수직인 성분의 제한을 위해 필요한 거리 파라미터 δ인데 이들은 각각, 20°<ϕ<150°, 90°, 특성 길이의 1.5 배로 고정시켰다. 특성 길이는 삼각형 세 변 길이의 평균을 취하였다.

Table 1 에 각 문제에 대해 다중 출발법으로 가능한 많은 해를 구해 얻은 전체 최적점의 값(F_G), 국소 최소점 중 가장 큰 값(max F_L)과 국부 최적해의 개수(NLM)를 정리하였다.

Table 2 와 3 은 문헌에 나와 있는 영역 제거 알고리듬과[13] 채움 함수 방법을[5] 이용하여 계산한 결과값으로 본 논문의 결과와의 비교를 위해 수록한 것이다. 문헌에 나오는 영역 제거 알고리듬은 수치 실험 결과로 볼 때 알고리듬에 필요한 계수들을 문제에 따라 바꾸어 가며 실험을 한 것으로 추정된다. 여기서 NCFE 는 함수 계산 횟수이다.

Table 1 The global optimization results by a multi-start method

Problem	F_G	max F_L	NLM
1	-1.03E+0	7.05E+0	4
2	7.34E-4	4.42E+0	40
3	-1.00E+0	-1.68E-1	45
4	-4.00E+0	0.00E+0	4
5	1.70E+1	3.29E+1	6
6	0.00E+0	8.77E-1	5
7	-1.03E+0	2.10E+0	6
8	0.00E+0	2.83E-1	20
9	-8.09E+5	2.52E-1	10
10	3.98E-1	7.96E-1	13

Table 2 The results of a domain elimination method

Problem	F_G	NLM	NCFE
1	-1.03E+0	2	127
2	3.14E-4	8	5886
3	-1E+0	11	2703
4	-4.00E+0	3	51
5	1.70E+1	4	299

Table 3 The results of the filled funtion method

Problem	NCFE
6	278
7	131
8	85
9	165
10	103

Table 4 The global optimization results and the number of function evaluations with α=0.05, γ=0°

Problem	F_G	NLM	NCFE
1	-1.03E+0	2	238
2	2.20E-3	40	1846
3	-1.00E+0	40	8502
4	-4.00E+0	4	192
5	1.70E+1	4	688
6	0.00E+0	3	248
7	-1.03E+0	2	163
8	1.67E-1	1	61
9	-8.09E+5	3	205
10	3.98E-1	2	187

Table 3 은 Lee 가 제안한 채움 함수법에 의한 결과이다.

Table 4 와 Table 5 는 점의 유력영역에 관련한 파라미터 α를 0.05 로 고정시킨 후 삼각 패치를 고려한 경우와 안한 경우를 비교한 것이다. γ가 0° 인 경우는 삼각 패치를 고려하지 않은 경우이다.

Table 5 The global optimization results and the number of function evaluations with α=0.05, γ=90°

Problem	F_G	NLM	NCFE
1	-1.03E+0	2	122
2	5.90E-3	4	281
3	-9.84E-1	5	440
4	-4.00E+0	3	35
5	1.70E+1	3	161
6	0.00E+0	3	117
7	-1.03E+0	2	93
8	1.67E-1	1	30
9	-8.09E+5	3	44
10	3.98E-1	2	79

결과를 살펴 보면 삼각 패치를 고려한 경우 함수 값 계산 회수가 확연하게 줄어듦을 알 수 있다. 알고리듬을 통해 구한 해의 최소값은 문제 특성에 따라 다른데 국소 최소점이 몇 개로 한정되어 있는 경우에는 두 경우 모두 전체 최적점을 찾아갔으며 구한 해의 개수도 별 차이가 없다. 하지만 해가 무수히 많은 경우에는 두 가지 모두 전체 최적점을 찾지는 못했으나 삼각 패치를 고려하지 않은 경우가 고려한 경우보다 더 작은 값을 찾으며 찾은 국소 최소점의 개수 또한 많음을 알 수 있다. 하지만 다음의 논의에서 삼각 패치를 고려해 얻어낸 해의 결과가 전체적인 해의 성능의 관점에서 보았을 때 전체 최소점으로서 타당한 값을 내 주면서 함수 값 계산을 대폭 줄인다는 것을 알 수 있다.

Table 6 은 다중 출발 방법으로 가능한한 많은 개수의 최소점을 구한 후 이들의 최대값과 최소점의 거리와 영역 제거 법에 의해 구한 최소점과 다중 출발점에 의해 구한 최소점과의 거리의 비를 나타낸 것이다. 이 비가 0 으로 근접하면 할수록 다중 출발로 구한 전체 최적점과 비슷한 결과를 산출함을 나타낸다. 결과를 살펴보면 문제 8 만 제외하고 모두 0 에 근접하고 있음을 알 수 있다. 문제 8 은 국소 최소점이 전체 영역 중에 아주 작은 범위 내에 몰려 있는 문제로서 영역 제거 법으로 풀기 힘든 문제이다. 그러나, 이와 같은 경우에도 설계 범위를 줄이게 되면 해의 성능이 올라 가게 된다.

Table 6 The relative magnitude of the least minimum point of the present algorithm in view of the range of the local minimum values from the multi-start method

Problem	Ratio
1	0
2	0
3	0.02
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0.6
9	0
10	0

Table 7 The global optimization results and the number of function evaluations with α=0.15, γ=0°

Problem	F_G	NLM	NCFE
1	-1.03E+0	2	110
2	8.70E-3	3	346
3	-1E-1	16	2107
4	-4.00E+0	3	80
5	1.70E+1	2	263
6	0.00E+0	2	98
7	-1.03E+0	2	128
8	1.67E-1	1	51
9	-8.09E+5	1	53
10	3.98E-1	2	100

Table 7 과 8 은 α를 3배로 하여 앞의 수치 실험을 반복한 것이다. 앞의 결과보다 전반적으로 함수 계산량이 줄어들었으며 전체 최적점의 값은 최적점이 많은 경우에 값이 커진 것을 알 수 있었으며 일반적인 경향은 앞의 결과와 같음을 알 수 있다. Table 5 와 7 을 비교해 보면 삼각 패치를 이용한 것이 함수 계산량이나 전체 최적점의 값에서 비슷하거나 우수한 결과를 초래함을 알 수 있다.

Table 9 와 10 에서는 α값을 0.2로 하였다. 전반적으로 함수 계산량과 국소 최소점들의 개수는 줄어들고 최소값의 크기는 커지는 것을 알 수 있다.

Table 8 Global optimization results and the number of function evaluation with α=0.15, γ=90°

Problem	F_G	NLM	NCFE
1	-1.03E+0	2	89
2	1.46E-2	2	134
3	-9.84E-1	3	250
4	-4.00E+0	2	34
5	1.70E+1	2	127
6	0.00E+0	2	70
7	-1.03E+0	2	76
8	1.67E-1	1	37
9	-8.09E+5	1	32
10	3.98E-1	2	79

Table 9 The global optimization results and the number of function evaluations with α=0.2, γ=0°

Problem	F_G	NLM	NCFE
1	1.03E+0	1	87
2	1.46E-2	1	78
3	9.87E-1	1	181
4	4.00E+0	3	62
5	1.70E+1	1	95
6	0.00E+0	2	84
7	1.03E+0	1	86
8	1.67E-1	1	37
9	-8.09E+5	1	53
10	3.98E-1	2	100

Table 10 The global optimization results and the number of function evaluations with α=0.2, γ=90°

Problem	F_G	NLM	NCFE
1	-1.03E+0	1	73
2	1.46E-2	1	60
3	9.87E-1	1	181
4	-4.00E+0	2	34
5	1.70E+1	1	79
6	0.00E+0	2	70
7	-1.03E+0	1	66
8	1.67E-1	1	37
9	-8.09E+5	1	39
10	3.98E-1	2	79

전체적으로 삼각 패치를 적용 시킨 알고리듬이 모든 예제에 대해 함수값 계산 횟수가 적음을 알 수 있으며 전체 최적화 값은 국소값이 많은 문제에 대해서 조금 큰 값들이 얻어지나 문제 8을 제외하고는 모든 알고리듬들이 전체 최적점과 가까운 국소점들을 구하는 것을 알 수 있었다.

5. 결 론

전체 최적화 기법의 하나인 영역 제거법을 확장하여 계산량을 줄였다. 두 개 이상의 궤적을 따라 생겨난 삼각 패치의 형상을 고려하여 효율을 향상시켰으며 매개변수를 조절하여 신뢰성을 크게 저해하지 않음을 보였다. 점과 궤적만을 고려하여 영역 제거를 하는 것과 비교했을 때 구해지는 최소점의 개수나 최소값의 변화는 크기 않았으며 함수 계산량은 대폭 줄일 수 있었다. 여러 가지 예제를 통해 타당한 범위 내에서 해를 구해 주며 함수 계산을 대폭 줄일 수 있음을 보였다. 매개 변수 결정을 위한 합리적인 방법의 도입, 신뢰성 제고를 위한 보완 방법, 효과적인 유력영역 정의 및 근접 여부 판정 방법 개발 등이 앞으로의 연구 과제로 남아있다.

참고문헌

(1) Evtushenko, Y. G.,1974, "Methods of Search for the Global Extremum," *Operation Research*, Vol. 4, pp. 39~68.

(2) Arora, J. S., 1992, "Global Optimization Methods for Engineering Applications," *Technical Report, Optimal Design Laboratory, Iowa Univ.*

(3) Snyman, J. A. and Fatti, L. P., 1987, "A Multistart Global Minimization Algorithm with Dynamic Search Trajectories," *Journal of Optimization Theory and Algorithms*, Vol. 54, pp. 121~141.

(4) Levy, A.S. and Montalvo, A., 1985, "The Tunneling Algorithm for Golbal Minimization of Functions," *SIAM Journal of Sciences and Statistical Computation,* Vol. 6, pp.15~29.

(5) Lee, J. B., and Lee, B. C., 1996, "A Global Optimization Algorithm based on the New Filled Function Method and the Genetic Algorithm," *Engineering Optimization*, Vol. 27, pp.1~20.

(6) Rinnooy, A. H. G. and Timmer, G. T., 1987a, "Stochastic Global Optimization Methods, Part I: Clustering Methods," *Mathmatical Progress*, Vol. 39, pp. 27~56.

(7) Price, W. L., 1987, "Global Optimziation Algorithms for a CAD workstation," *Journal of Optimization Theory and Application*, Vol. 55, pp.133~146.

(8) May, S. A. and Balling, R. J., 1992, "A Filtered Simulated Annealing Strategy for Discrete Optimization of 3D Frameworks," *Structural Optimization*, Vol. 4, pp. 142~148.

(9) Lucidi, S. , 1988, "New Resultes on a Class of Exact Augmented Lagrangian," *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 58, pp. 259~277.

(10) Goldberg, D. E. and Kou, C. H., 1987, "Genetic Algorihms in Pipeline Optimization," *Journal of Computing in Civil Engineering*, Vol. 1, pp. 128~141.

(11) Glover, F., 1977, "Heuristics for Integer Programming using Surrogate Constraints," *Decision Sience*, Vol. 8, pp. 156~166.

(12) Myung, H. and Kim J. H.,1996, "Hybrid Evolutionary Programming for Heavily Constrained Problems," *Biosystems*, Vol. 38, pp. 29~43.

(13) Elwakeil, O. A. and Arora, J. S., 1996, "Tow Algorithms for Global Optimization of General NLP Problems," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, pp. 3305~3325.

(14) Arora, J. S. , Elwakeil , O. A. and Chahande, A. I., 1995, "Global Optimization Methods for Engineering Applications: a Review," *Structural Optimization*, Vol. 9, pp.137~159.

(15) Vanderplaats, 1993, *DOT User's Manual,* Ver.4, VMA Engineering.